

09. Podobné trojúhelníky a jejich užití

Intuitivní přístup k zavedení shodných a podobných útvarů.

K čemu slouží zavedení podobných trojúhelníků na základní škole.

Středoškolská definice podobných trojúhelníků, koeficient (poměr) podobnosti. Zápis definice bez užití koeficientu.

Vlastnosti podobných trojúhelníků. Věty o podobnosti trojúhelníků.

Které veličiny dvou podobných trojúhelníků jsou ve stejném poměru jako jejich strany. Poměr obsahů dvou podobných trojúhelníků.

Dva způsoby zápisu poměrů stran podobných trojúhelníků.

Praktický význam podobnosti útvarů. Užití podobných trojúhelníků v geometrii.

Věty o pravoúhlém trojúhelníku a jejich odvození pomocí podobnosti. Význam těchto vět pro konstrukce délek určených vzorci z jiných délek.

Geometricky úměrné veličiny, konstrukce čtvrté geometrické úměrné. Konstrukční rozdělení dané úsečky v daném poměru.

Intuitivní pojetí shodných a podobných útvarů:

- (1) Dva útvary se nazývají geometricky *shodné*, lze ji jeden z nich vhodně *přemístit* tak, aby se kryl s druhým útvarem (tj. byl pak tvořen stejnou množinou bodů).
- (2) Dva útvary se nazývají geometricky *podobné*, lze jeden z nich ve vhodném měřítku *zvětšit* či *zmenšit* tak, aby pak byl geometricky shodný s druhým útvarem. Také dva shodné útvary považujeme za podobné (v měřítku 1 : 1).

Znamená to, že podobné útvary mají stejný *tvar*, zatímco shodné útvary mají navíc i stejnou *velikost*.

O podobných trojúhelnících se učí na ZŠ hlavně proto, aby bylo možné zavést goniometrické funkce ostrého úhlu pomocí poměrů stran pravoúhlého trojúhelníku. Tyto poměry totiž závisí pouze na tvaru vybraného trojúhelníku, nikoli na jeho velikosti.

Shodnost a podobnost útvarů se na SŠ popisuje exaktněji pomocí shodných, resp. podobných *zobrazení* (v našich otázkách 10 a 15). Podobné trojúhelníky je však účelné probírat dříve nežli geometrická zobrazení. Proto se podobné trojúhelníky na střední škole zavádějí způsobem, které je obdobou věty *sss* pro shodnost trojúhelníků.

Definice. Trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC , pokud existuje reálné číslo $k > 0$ tak, že pro obvykle značené délky stran těchto dvou trojúhelníků platí

$$a' = ka, \quad b' = kb, \quad c' = kc.$$

Tedy píšeme $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ (dbáme na pořadí odpovídajících si vrcholů). Číslo k nazýváme koeficient (poměr) podobnosti trojúhelníku $A'B'C'$ s trojúhelníkem ABC . V případě $k > 1$ mluvíme o zvětšení, v případě $k < 1$ o zmenšení, v případě $k = 1$ jde o shodnost.

Určující podmínku z definice $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ lze zapsat bez koeficientu podobnosti následovně:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \quad \text{nebo také} \quad a' : b' : c' = a : b : c.$$

Slovně: „podíly délek odpovídajících si stran trojúhelníků jsou stejné“ nebo „délky stran jednotlivých trojúhelníků jsou ve stejných poměrech“.

Vlastnosti podobných trojúhelníků.

- (1) Je-li trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC s koeficientem k , pak trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku $A'B'C'$ s koeficientem $1/k$.
- (2) Platí-li $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ a $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_3B_3C_3$, pak také $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_3B_3C_3$.
- (3) Podobné trojúhelníky mají shodné vnitřní úhly:
V případě $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ platí $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ a $\gamma' = \gamma$.
- (4) O podobnosti trojúhelníků rozhodujeme podle dvou vět.
Věta uu. Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se shodují ve dvou vnitřních úhlech.
Věta sus. Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se shodují v poměru délek dvou stran a v úhlu jimi sevřeném.
- (5) V poměru k jsou nejen délky stran podobných trojúhelníků, ale také délky všech dalších významných úseček (těžnic, výšek, poloměrů kružnic vepsaných a opsaných). Obsahy dvou trojúhelníků, které jsou podobné s koeficientem k , jsou v poměru k^2 .

Vztahy mezi délkami dvou dvojic odpovídajících si stran podobných trojúhelníků $\triangle KLM \sim \triangle PQR$ zapisujeme jedním ze způsobů:

- a) $\frac{|KL|}{|PQ|} = \frac{|KM|}{|PR|}$ (podíly rovné koeficientu podobnosti),
- b) $\frac{|KL|}{|KM|} = \frac{|PQ|}{|PR|}$ (podíly stran jednotlivých \triangle jako v sinové větě).

Praktický význam podobnosti – zachovává *tvar* útvarů (rozpoznávání objektů z fotografií, mapy a plánky, obrazovky, projektoř apod.).

Užití podobných trojúhelníků v geometrii:

- ▷ prostředek odvozování vzorců a dokazování tvrzení,
- ▷ teoretický základ trigonometrie,
- ▷ prostředek řešení konstrukčních úloh,
- ▷ konstrukce délek určených vzorci z jiných délek.

Věty o pravoúhlém trojúhelníku.

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s výškou CP na přeponu AB k obvyklým značením a , b , c , α , β přidáváme ještě $v = |CP|$, $c_a = |BP|$ a $c_b = |AP|$ (úseky přepony AB rozdělené výškou CP , které jsou přilehlé k odvěsně a , resp. b).

Na přednášce zdůvodníme podobnosti $\triangle ABC \sim \triangle ACP \sim \triangle CBP$. V důsledku toho platí rovnosti $a : b : c = v : c_b : b = c_a : v : a$, ze kterých odvodíme

- ▷ **Eukleidovu větu o výšce:** $v^2 = c_a c_b$,
- ▷ **Eukleidovu větu o odvěsnách:** $a^2 = c c_a$ a $b^2 = c c_b$,
- ▷ **Pythagorovu větu:** $a^2 + b^2 = c^2$.

Příklad: Z úseček daných délek u, v sestrojíme úsečky délek

$$x = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad y = \sqrt{v^2 - u^2}, \quad z = \sqrt{uv}.$$

Definice. Hodnoty a, b, c, d se nazývají *geometricky úměrné*, pokud pro ně platí $a : b = c : d$.

Konstrukce čtvrté geometrické úměrné.

Konstrukce bodu X , který dělí danou úsečku AB v poměru daných čísel $m : n$.

KONEC DOKUMENTU