Národní centrum pro výzkum biomolekul
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita

C1460: Úvod do matematiky

Téma 3: Průběh funkce

(rozšiřující materiály)

Veronika Horská

horska.veroonika@gmail.com

Ukázkový příklad 3.2

Příklad 3.2.1
Určete definiční obor funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

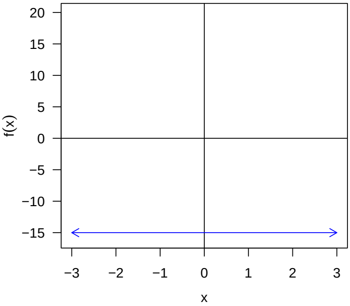
Řešení podle algoritmu

1. předpokládáme, že $D(f) = \mathbb{R}$
2. neexistuje žádný bod x, ve kterém by funkce $f(x)$ nebyla definovaná

Závěr

- $D(f) = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$

Grafická interpretace



Příklad 3.2.2
Určete paritu funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Je $f(x)$ sudá funkce? - Řešení podle algoritmu

1. $f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2$
2. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
3. $f(-x) \neq f(x) \rightarrow$ funkce $f(x)$ **není sudá**

Je $f(x)$ lichá funkce? - Řešení podle algoritmu

1. $f(-x) = -x^3 + 3x + 2$
2. $-f(x) = -(x^3 - 3x + 2) = -x^3 + 3x - 2$
3. $f(-x) \neq -f(x) \rightarrow$ funkce $f(x)$ **není lichá**

Závěr

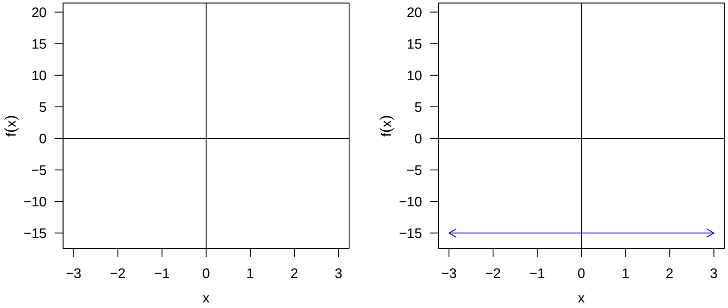
- Funkce $f(x)$ není ani sudá ani lichá funkce.
- Funkce $f(x)$ není symetrická okolo osy y ani souměrná podle počátku.

Příklad 3.2.2 (pokračování)

Závěr

- Funkce $f(x)$ není ani sudá ani lichá funkce.
- Funkce $f(x)$ není symetrická okolo osy y ani souměrná podle počátku.

Grafická interpretace



Příklad 3.2.3

Určete body nespojitosti funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

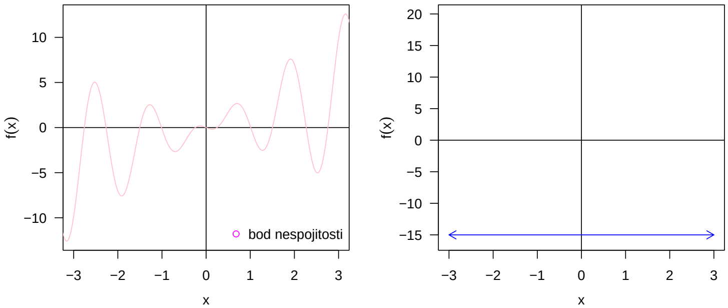
Řešení podle algoritmu

1. předpokládáme, že funkce $f(x)$ nemá body nespojitosti
2. hledání bodů nespojitosti
    - funkce $f(x)$ je racionálně lomenná funkce $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, kde $h(x) = 1$; neexistuje tedy bod x_0, který by byl kořenem polynomu $h(x)$, a tedy $f(x)$ nemá žádný bod nespojitosti

Závěr

- BN: $\varnothing$

Grafická interpretace



Příklad 3.2.4

Určete NB funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2$ a intervaly, na nichž je $f(x)$ kladná, či záporná.

Řešení podle algoritmu

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
2. řešíme rovnici $f(x) = 0$

   $x^3 - 3x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 \cdot (x+2) = 0 \quad \rightarrow \quad$ NB: $x_{01} = -2$; $x_{02} = 1$
3. BN: $\varnothing$; celkový počet NB a BN: $m = 2 + 0 = 2$
4. reálná osa s NB a BN

	-2	1

5. $m = 2 \rightarrow$ tři intervaly
   - $I_1 = (-\infty; -2)$
   - $I_2 = (-2; 1)$
   - $I_3 = (1; \infty)$
6. výběr reprezentanta pro každý interval
   - $x_1 = -3 \in I_1$
   - $x_2 = 0 \in I_2$
   - $x_3 = 2 \in I_3$
7. výpočet funkční hodnoty pro každého reprezentanta
   - $f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3) + 2 = -16$
   - $f(0) = (0)^3 - 3 \cdot (0) + 2 = 2$
   - $f(2) = (2)^3 - 3 \cdot (2) + 2 = 4$
8. určení znaménka funkce $f(x)$ na každém intervalu
   - $f(-3) < 0 \cdots \ominus$ na I_1
   - $f(0) > 0 \cdots \oplus$ na I_2
   - $f(2) > 0 \cdots \oplus$ na I_3

$\ominus$		$\oplus$		$\oplus$
	-2		1	

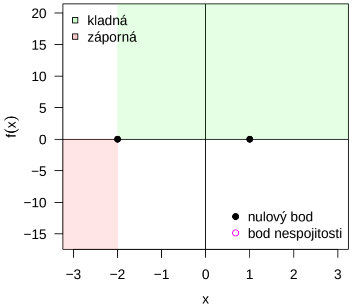
Příklad 3.2.4 (pokračování)

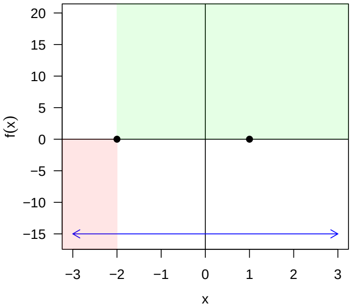
$\ominus$	|	$\oplus$	|	$\oplus$
	-2		1	

Závěr

- $f(x)$ je záporná na intervalu $(-\infty; -2)$
- $x = -2$: NB; $f(-2) = 0$
- $f(x)$ je kladná na intervalu $(-2; 1)$
- $x = 1$: NB; $f(1) = 0$
- $f(x)$ je kladná na intervalu $(1; \infty)$

Grafická interpretace





Příklad 3.2.5

Určete LE funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2$ a intervaly, na nichž je $f(x)$ rostoucí, či klesající.

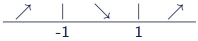
Řešení podle algoritmu

1. $f'(x) = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3$
2. řešíme rovnici $f'(x) = 0$

   $3x^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1 \quad \rightarrow$ možné LE: $x_{01} = -1$, $x_{02} = 1$
3. BN: $x_0 = \emptyset$; celkový počet možných LE a BN: $m = 2 + 0 = 2$
4. reálná osa s možnými LE a BN

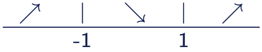
   

5. $m = 2 \rightarrow$ tři intervaly
   - $I_1 = (-\infty; -1)$
   - $I_2 = (-1; 1)$
   - $I_3 = (1; \infty)$
6. výběr reprezentanta pro každý interval
   - $x_1 = -2 \in I_1$
   - $x_2 = 0 \in I_2$
   - $x_3 = 2 \in I_3$
7. výpočet funkční hodnoty $f'(x)$ pro každého reprezentanta
   - $f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9$
   - $f'(0) = 3 \cdot (0)^2 - 3 = -3$
   - $f'(2) = 3 \cdot (2)^2 - 3 = 9$
8. určení průběhu funkce $f(x)$ na každém intervalu
   - $f'(-2) > 0 \cdots \nearrow$ na I_1
   - $f'(0) < 0 \cdots \searrow$ na I_2
   - $f'(2) > 0 \cdots \nearrow$ na I_3

9. určení lokálních extrémů
   - $x_{01} = -1$: lokální maximum; $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 4$
   - $x_{02} = 1$: lokální minimum; $f(1) = (1)^3 - 3 \cdot (1) + 2 = 0$

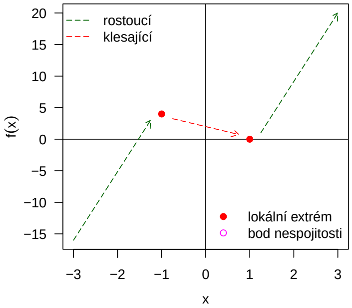
Příklad 3.2.5 (pokračování)

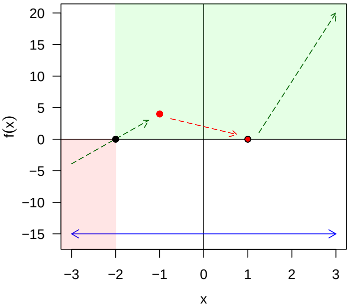


Závěr

- $f(x)$ je rostoucí na intervalu $(-\infty; -1)$
- $x_{01} = -1$: LE (maximum); $f(-1) = 4$
- $f(x)$ je klesající na intervalu $(-1; 1)$
- $x_{02} = 1$: LE (minimum); $f(1) = 0$
- funkce je rostoucí na intervalu $(1; \infty)$

Grafická interpretace





Příklad 3.2.6

Určete IB funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2$ a intervaly, na nichž je $f(x)$ konkávní, či konvexní.

Řešení podle algoritmu

1. $f''(x) = (x^3 - 3x + 2)'' = (3x^2 - 3)' = 6x$
2. řešíme rovnici $f''(x) = 0$

   $$6x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{možný IB: } x_{01} = 0$$

3. BN: $x_0 = \varnothing$; celkový počet možných IB a BN: $m = 1 + 0 = 1$
4. reálná osa s možnými IB a BN

   $$\begin{array}{c} | \\ \hline 0 \end{array}$$

5. $m = 1 \rightarrow$ dva intervaly
   - $I_1 = (-\infty; 0)$
   - $I_2 = (0; \infty)$
6. výběr reprezentanta pro každý interval
   - $x_1 = -1 \in I_1$
   - $x_2 = 1 \in I_2$
7. výpočet funkční hodnoty $f''(x)$ pro každého reprezentanta
   - $f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6$
   - $f''(1) = 6 \cdot (1) = 6$
8. určení průběhu funkce $f(x)$ na každém intervalu
   - $f''(-1) < 0 \cdots \cap$ na I_1
   - $f''(1) > 0 \cdots \cup$ na I_2

   $$\begin{array}{ccc} \cap & | & \cup \\ \hline & 0 & \end{array}$$

9. určení inflexních bodů
   - $x_{01} = 0$: IB; $f(0) = (0)^3 - 3 \cdot (0) + 2 = 2$

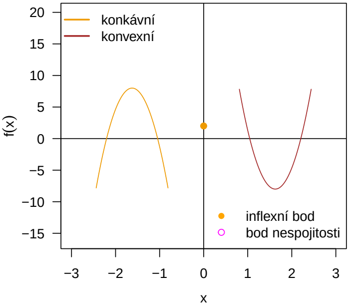
Příklad 3.2.6 (pokračování)

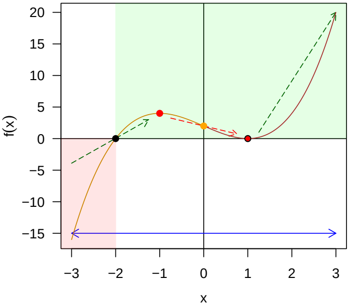
$\cap$	$\cup$
	0

Závěr

- funkce je konkávní na intervalu $(-\infty; 0)$
- $x_{01} = 0$: IB; $f(0) = 2$
- funkce je konvexní na intervalu $(0; \infty)$

Grafická interpretace





Příklad 3.2.7

Určete ABS funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2$ a zjistěte, jak se $f(x)$ v okolí těchto ABS chová.

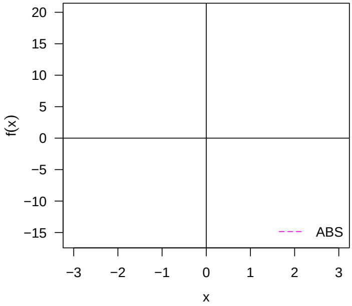
Řešení podle algoritmu

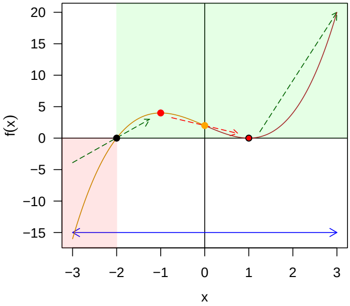
1. BN: $\varnothing$
2. $\lim_{x \to BN-} f(x)$ nepočítáme
3. $\lim_{x \to BN^+} f(x)$ nepočítáme
4. ABS: $\varnothing$

Závěr

- ABS: $\varnothing$

Grafická interpretace





Příklad 3.2.8
Určete ASS funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Vyšetření ASS pro $x \to \infty$ podle algoritmu

1. výpočet směrnice a

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(x^2 - 3 + \frac{2}{x}\right)$$
$$= \infty^2 - 3 + \frac{2}{\infty} = \infty^2 - 3 + 0 = \infty$$

   směrnice $a = \infty \quad \to \quad$ ASS neexistuje
2. absolutní člen b nepočítáme
3. ASS: $\varnothing$

Vyšetření ASS pro $x \to -\infty$ podle algoritmu

1. výpočet směrnice a

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(x^2 - 3 + \frac{2}{x}\right)$$
$$= (-\infty)^2 - 3 + \frac{2}{-\infty} = \infty^2 - 3 - 0 = \infty$$

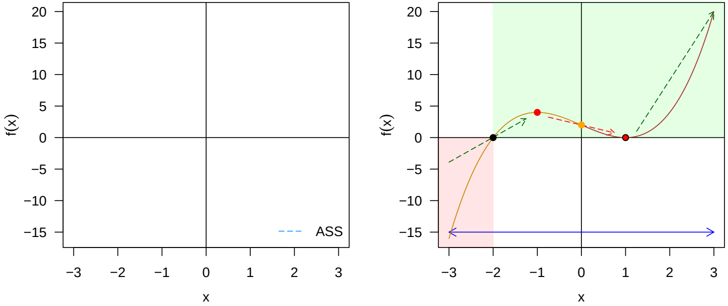
   směrnice $a = \infty \quad \to \quad$ ASS neexistuje
2. absolutní člen b nepočítáme
3. ASS: $\varnothing$

Příklad 3.2.8 (pokračování)

Závěr

- ASS: $\emptyset$

Grafická interpretace

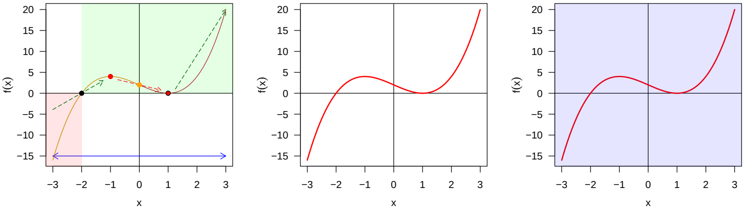


Příklad 3.2.9

Sestrojte graf funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2$ a určete obor hodnot $H(f)$.

Řešení podle algoritmu

1. sestrojení grafu funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2$



2. na základě sestrojeného grafu docházíme k závěru, že $H(f) = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$.

Děkuji za pozornost.