Národní centrum pro výzkum biomolekul
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita

C1460: Úvod do matematiky

Téma 3: Průběh funkce

Veronika Horská

horska.veroonika@gmail.com

Motivace

Přednáška 02: Graf funkce $f(x) \rightarrow$ vlastnosti funkce $f(x)$

Přednáška 03: předpis funkce $f(x) \rightarrow$ vlastnosti funkce $f(x) \rightarrow$ graf funkce $f(x)$

Pro funkci $f(x)$ budeme postupně určovat

1. definiční obor
2. paritu
3. body nespojitosti
4. nulové body + intervaly, na kterých je funkce kladná / záporná
5. lokální extrémy + intervaly, na kterých je funkce rostoucí / klesající
6. inflexní body + intervaly, na kterých je funkce konvexní / konkávní
7. asymptoty bez směrnice
8. asymptoty se směrnicí
9. graf funkce + obor hodnot.

Poznámka: V předmětech C1460 a C1480 se omezíme výhradně na vyšetření průběhu racionálně lomenných funkcí $f(x)$. Uvedené poznatky jsou však přirozeně rozšiřitelné a použitelné pro vyšetření průběhu libovolné funkce jedné proměnné.

Vyšetření průběhu funkce

+

Ukázkový příklad 3.1

1. Definiční obor funkce $f(x)$

Definiční obor $D(f)$ funkce $f(x)$ je množina čísel x, pro které je funkce $f(x)$ definovaná

Algoritmus pro vyšetření definičního oboru

1. předpokládáme, že definiční obor funkce $D(f) = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$
2. z definičního oboru vyloučíme body x, ve kterých není $f(x)$ definovaná

Příklady definičních oborů

- racionálně lomenná funkce $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\text{kořeny polynomu } h(x)\}$
- funkce $f(x) = \sqrt{x}$: $D(f) = \langle 0; \infty)$
- funkce $f(x) = \ln(x)$: $D(f) = (0; \infty)$

Příklad 3.1.1

Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.

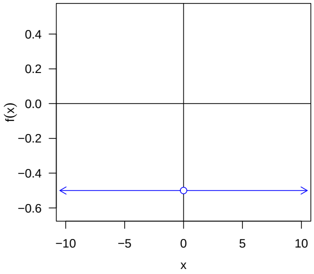
Řešení podle algoritmu

1. předpokládáme, že $D(f) = \mathbb{R}$
2. $f(0) = \dfrac{0^2 - 1}{0^2} = \dfrac{-1}{0}$ $\rightarrow$ funkce $f(x)$ **není definovaná v bodě** $x = 0$

Závěr

- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

Grafická interpretace



2. Parita funkce

$f(x)$ je **sudá funkce**, pokud je symetrická podle osy y, tj. $f(-x) = f(x)$

$f(x)$ je **lichá funkce**, pokud je souměrná podle počátku, tj. $f(-x) = -f(x)$

Algoritmus pro vyšetření, zda je $f(x)$ sudá funkce

1. vypočítáme $f(-x)$
2. vypočítáme $f(x)$
3. ověřujeme rovnost $f(-x) = f(x)$
   - pokud $f(-x) = f(x) \rightarrow$ funkce $f(x)$ je sudá
   - pokud $f(-x) \neq f(x) \rightarrow$ funkce $f(x)$ není sudá

Algoritmus pro vyšetření, zda je $f(x)$ lichá funkce

1. vypočítáme $f(-x)$
2. vypočítáme $-f(x)$
3. ověřujeme rovnost $f(-x) = -f(x)$
   - pokud $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ funkce $f(x)$ je lichá
   - pokud $f(-x) \neq -f(x) \rightarrow$ funkce $f(x)$ není lichá

Příklad 3.1.2
Určete paritu funkce $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.

Je $f(x)$ sudá funkce? - Řešení podle algoritmu

1. $f(-x) = \frac{(-x)-1}{(-x)^2} = \frac{-x-1}{x^2}$
2. $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$
3. $f(-x) \neq f(x) \rightarrow$ funkce $f(x)$ **není sudá**

Je $f(x)$ lichá funkce? - Řešení podle algoritmu

1. $f(-x) = \frac{-x-1}{x^2}$
2. $-f(x) = -\left(\frac{x-1}{x^2}\right) = \frac{-x+1}{x^2}$
3. $f(-x) \neq -f(x) \rightarrow$ funkce $f(x)$ **není lichá**

Závěr

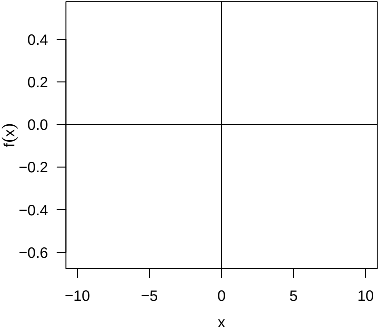
- Funkce $f(x)$ není ani sudá ani lichá funkce.
- Funkce $f(x)$ není symetrická okolo osy y ani souměrná podle počátku.

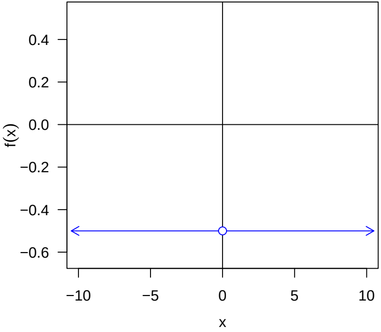
Příklad 3.1.2 (pokračování)

Závěr

- Funkce $f(x)$ není ani sudá ani lichá funkce.
- Funkce $f(x)$ není symetrická okolo osy y ani souměrná podle počátku.

Grafická interpretace





3. Body nespojitosti

Bod nespojitosti (BN) je bod x, ve kterém funkce $f(x)$ není spojitá

Algoritmus pro vyšetření bodů nespojitosti

1. předpokládáme, že funkce $f(x)$ nemá body nespojitosti
2. hledáme body x, ve kterých je spojitost funkce $f(x)$ porušena
    - Příklad: racionálně lomenná funkce $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$: BN jsou kořeny polynomu $h(x)$

Příklad 3.1.3
Určete body nespojitosti funkce $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.

Řešení podle algoritmu

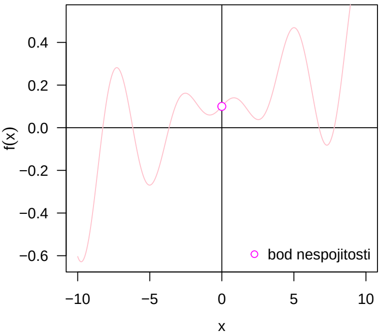
1. předpokládáme, že funkce $f(x)$ nemá body nespojitosti
2. hledání bodů nespojitosti
    - funkce $f(x)$ není definovaná v bodě $x = 0$, v ostatních bodech ano; v bodě $x = 0$ tedy funkce $f(x)$ nemůže být spojitá
    - BN: $x = 0$

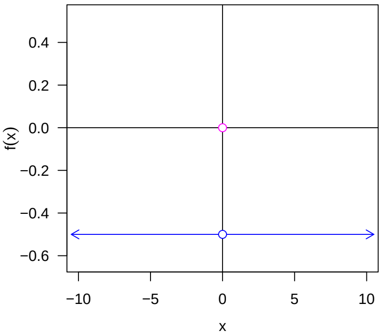
Příklad 3.1.3 (pokračování)

Závěr

- BN: $x = 0$

Grafická interpretace





4. Nulové body + intervaly, na kterých je funkce kladná / záporná

Nulové body (NB) a kladné / záporné znaménko funkce určujeme na základě $f(x)$.

- $f(x_0) = 0$ $\rightarrow$ x_0 je **nulový bod** funkce $f(x)$
- $f(x) > 0$ pro každé $x \in I$ $\rightarrow$ $f(x)$ je **kladná funkce** na intervalu I
- $f(x) < 0$ pro každé $x \in I$ $\rightarrow$ $f(x)$ je **záporná funkce** na intervalu I

Poznámka: Změna znaménka funkce může nastat buď v nulovém bodě, či v bodě nespojitosti.

Algoritmus pro vyšetření NB a znaménka funkce

1. pracujeme s funkcí $f(x)$
2. řešíme rovnici $f(x) = 0$
   - kořeny rovnice jsou **nulové body**
3. k NB přidáme BN (celkem m bodů)
4. nakreslíme reálnou osu, na které vyznačíme NB a BN

5. vyznačením bodů získáme na reálné ose $m+1$ intervalů I_j, $j = 1, \dots, m+1$
6. pro každý interval vybereme jednoho reprezentanta $x_j \in I_j$
7. pro každého reprezentanta x_j spočítáme hodnotu $f(x_j)$
8. podle znaménka $f(x_j)$ stanovíme znaménko funkce $f(x)$ na intervalu I_j
   - $f(x_j) < 0 \rightarrow f(x)$ je na intervalu I_j záporná
   - $f(x_j) > 0 \rightarrow f(x)$ je na intervalu I_j kladná

Příklad 3.1.4

Určete NB funkce $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ a intervaly, na nichž je $f(x)$ kladná, či záporná.

Řešení podle algoritmu

1. $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$
2. řešíme rovnici $f(x) = 0$

   $\frac{x-1}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad$ NB: $x_{01} = 1$
3. BN: $x_0 = 0$; celkový počet NB a BN: $m = 1 + 1 = 2$
4. reálná osa s NB a BN

   $$\underset{0}{|} \qquad \underset{1}{|}$$
5. $m = 2 \rightarrow$ tři intervaly
   - $I_1 = (-\infty; 0)$
   - $I_2 = (0; 1)$
   - $I_3 = (1; \infty)$
6. výběr reprezentanta pro každý interval
   - $x_1 = -1 \in I_1$
   - $x_2 = 0.5 \in I_2$
   - $x_3 = 2 \in I_3$
7. výpočet funkční hodnoty pro každého reprezentanta
   - $f(-1) = \frac{(-1)-1}{(-1)^2} = -2$
   - $f(0.5) = \frac{(0.5)-1}{(0.5)^2} = -2$
   - $f(2) = \frac{(2)-1}{(2)^2} = \frac{1}{4}$
8. určení znaménka funkce $f(x)$ na každém intervalu
   - $f(-1) < 0 \cdots \ominus$ na I_1
   - $f(0.5) < 0 \cdots \ominus$ na I_2
   - $f(2) > 0 \cdots \oplus$ na I_3

   $$\ominus \quad \underset{0}{|} \quad \ominus \quad \underset{1}{|} \quad \oplus$$

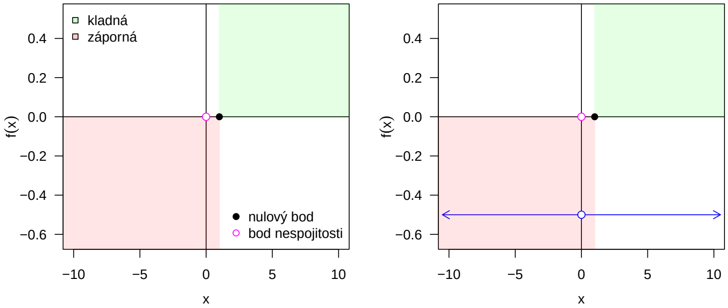
Příklad 3.1.4 (pokračování)

$\ominus$		$\ominus$		$\oplus$
	0		1	

Závěr

- $f(x)$ je záporná na intervalu $(-\infty; 0)$
- $x = 0$: BN
- $f(x)$ je záporná na intervalu $(0; 1)$
- $x = 1$: NB; $f(1) = 0$
- $f(x)$ je kladná na intervalu $(1; \infty)$

Grafická interpretace



5. Lokální extrémy + intervaly, na kterých je funkce rostoucí / klesající

Lokální extrémy (LE) a rostoucí / klesající průběh funkce určujeme na základě $f'(x)$

- $f'(x) > 0$ pro každé $x \in I \quad \rightarrow \quad f(x)$ je **rostoucí funkce** na intervalu I
- $f'(x) < 0$ pro každé $x \in I \quad \rightarrow \quad f(x)$ je **klesající funkce** na intervalu I
- $f'(x_0) = 0 \quad \wedge$

  $f'(x) < 0$ v levém okolí bodu $x_0 \quad \wedge \quad f'(x) > 0$ v pravém okolí bodu $x_0 \rightarrow$

  $\rightarrow x_0$ je **lokální minimum** funkce $f(x)$.

$$\begin{array}{ccc} \searrow & | & \nearrow \\ \hline & x_0 & \end{array}$$

- $f'(x_0) = 0 \quad \wedge$

  $f'(x) > 0$ v levém okolí bodu $x_0 \quad \wedge \quad f'(x) < 0$ v pravém okolí bodu $x_0 \rightarrow$

  $\rightarrow x_0$ je **lokální maximum** funkce $f(x)$.

$$\begin{array}{ccc} \nearrow & | & \searrow \\ \hline & x_0 & \end{array}$$

Poznámka: Změna průběhu funkce z rostoucího na klesající, nebo naopak, nastává v LE (vždy) nebo v BN (může, ale nemusí).

Algoritmus pro vyšetření LE a rostoucího / klesajícího průběhu funkce

1. spočítáme $f'(x)$
2. řešíme rovnici $f'(x) = 0$
   - kořeny rovnice jsou **možné lokální extrémy**
3. k možným LE přidáme BN (celkem m bodů)
4. nakreslíme reálnou osu, na které vyznačíme možné LE a BN

$$\begin{array}{ccccccc} I_1 & | & I_2 & | & I_3 & | & I_4 \\ \hline & b_1 & & b_2 & & b_3 & \end{array}$$

5. vyznačením bodů získáme na reálné ose $m + 1$ intervalů I_j, $j = 1, \ldots, m + 1$
6. pro každý interval vybereme jednoho reprezentanta $x_j \in I_j$
7. pro každého reprezentanta x_j spočítáme hodnotu $f'(x_j)$
8. podle znaménka $f'(x_j)$ stanovíme průběh funkce $f(x)$ na intervalu I_j
   - $f'(x_j) < 0 \to f(x)$ je na intervalu I_j klesající
   - $f'(x_j) > 0 \to f(x)$ je na intervalu I_j rostoucí
9. identifikujeme lokální extrémy
   - $f(x)$ je klesající v levém okolí a rostoucí v pravém okolí možného LE $\to$ možný LE je **lokální minimum**
   - $f(x)$ je rostoucí v levém okolí a klesající v pravém okolí možného LE $\to$ možný LE je **lokální maximum**
   - je-li v bodě x_0 LE, spočítáme funkční hodnotu $f(x_0)$

Příklad 3.1.5

Určete LE funkce $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ a intervaly, na nichž je $f(x)$ rostoucí, či klesající.

Řešení podle algoritmu

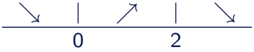
1. $f'(x) = \left(\frac{x-1}{x^2}\right)' = (\dots) = \frac{-x+2}{x^3}$
2. řešíme rovnici $f'(x) = 0$

   $\frac{-x+2}{x^3} = 0 \quad \rightarrow \quad -x+2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad$ možný LE: $x_{01} = 2$
3. BN: $x_0 = 0$; celkový počet možných LE a BN: $m = 1 + 1 = 2$
4. reálná osa s možnými LE a BN

   $\begin{array}{ccc} & | & | & \\ \hline & 0 & 2 & \end{array}$
5. $m = 2 \rightarrow$ tři intervaly
   - $I_1 = (-\infty; 0)$
   - $I_2 = (0; 2)$
   - $I_3 = (2; \infty)$
6. výběr reprezentanta pro každý interval
   - $x_1 = -1 \in I_1$
   - $x_2 = 1 \in I_2$
   - $x_3 = 3 \in I_3$
7. výpočet funkční hodnoty $f'(x)$ pro každého reprezentanta
   - $f'(-1) = \frac{-(-1)+2}{(-1)^3} = -3$
   - $f'(1) = \frac{-(1)+2}{(1)^3} = 1$
   - $f'(3) = \frac{-(3)+2}{(3)^3} = -\frac{1}{27}$
8. určení průběhu funkce $f(x)$ na každém intervalu
   - $f'(-1) < 0 \cdots \searrow$ na I_1
   - $f'(1) > 0 \cdots \nearrow$ na I_2
   - $f'(3) < 0 \cdots \searrow$ na I_3

   $\begin{array}{ccccc} \searrow & | & \nearrow & | & \searrow \\ \hline & 0 & & 2 & \end{array}$
9. určení lokálních extrémů
   - $x_{01} = 2$: lokální maximum; $f(2) = \frac{(2)-1}{(2)^2} = \frac{1}{4}$

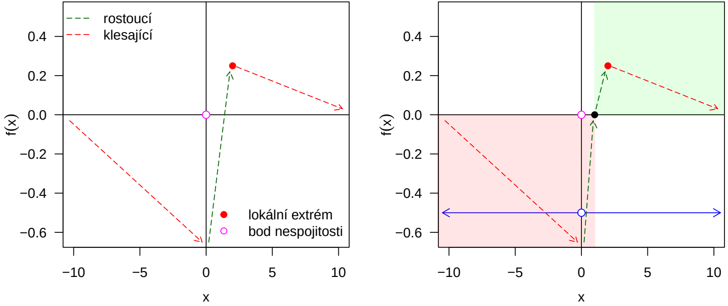
Příklad 3.1.5 (pokračování)



Závěr

- $f(x)$ je klesající na intervalu $(-\infty; 0)$
- $x = 0$: BN
- $f(x)$ je rostoucí na intervalu $(0; 2)$
- $x_{01} = 2$: LE (maximum); $f(2) = \frac{1}{4}$
- funkce je klesající na intervalu $(2; \infty)$

Grafická interpretace



6. Inflexní body + intervaly, na kterých je funkce konkávní / konvexní

Inflexní body (IB) a konkávní / konvexní průběh funkce určujeme na základě $f''(x)$

- $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I \quad \rightarrow \quad f(x)$ je **konkávní funkce** na intervalu I
- $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I \quad \rightarrow \quad f(x)$ je **konvexní funkce** na intervalu I
- $f''(x_0) = 0 \quad \wedge$

  $f''(x) < 0$ v levém okolí bodu $x_0 \quad \wedge \quad f''(x) > 0$ v pravém okolí bodu $x_0 \rightarrow$

  $\rightarrow x_0$ je **inflexní bod** funkce $f(x)$.

$$\begin{array}{ccc} \cap & | & \cup \\ \hline & x_0 & \end{array}$$

- $f''(x_0) = 0 \quad \wedge$

  $f''(x) > 0$ v levém okolí bodu $x_0 \quad \wedge \quad f''(x) < 0$ v pravém okolí bodu $x_0 \rightarrow$

  $\rightarrow x_0$ je **inflexní bod** funkce $f(x)$.

$$\begin{array}{ccc} \cup & | & \cap \\ \hline & x_0 & \end{array}$$

Poznámka: Změna průběhu funkce z konkávního na konvexní, nebo naopak, nastává v IB (vždy) nebo v BN (může, ale nemusí).

Algoritmus pro vyšetření IB a konkávního / konvexního průběhu funkce

1. spočítáme $f''(x)$
2. řešíme rovnici $f''(x) = 0$
   - kořeny rovnice jsou **možné inflexní body**
3. k možným IB přidáme BN (celkem m bodů)
4. nakreslíme reálnou osu, na které vyznačíme možné IB a BN

$$\underset{}{I_1} \;\; \underset{b_1}{|} \;\; \underset{}{I_2} \;\; \underset{b_2}{|} \;\; \underset{}{I_3} \;\; \underset{b_3}{|} \;\; \underset{}{I_4}$$

5. vyznačením bodů získáme na reálné ose $m + 1$ intervalů I_j, $j = 1, \ldots, m + 1$
6. pro každý interval vybereme jednoho reprezentanta $x_j \in I_j$
7. pro každého reprezentanta x_j spočítáme hodnotu $f''(x_j)$
8. podle znaménka $f''(x_j)$ stanovíme průběh funkce $f(x)$ na intervalu I_j
   - $f''(x_j) < 0 \to$ funkce $f(x)$ je na intervalu I_j konkávní
   - $f''(x_j) > 0 \to$ funkce $f(x)$ je na intervalu I_j konvexní
9. identifikujeme inflexní body
   - $f(x)$ je konkávní v levém okolí a konvexní v pravém okolí možného IB (nebo naopak) $\to$ jde o IB
   - je-li v bodě x_0 IB, spočítáme funkční hodnotu $f(x_0)$

Příklad 3.1.6

Určete IB funkce $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ a intervaly, na nichž je $f(x)$ konkávní, či konvexní.

Řešení podle algoritmu

1. $f''(x) = \left(\frac{x-1}{x^2}\right)'' = (\dots) = \frac{2x-6}{x^4}$
2. řešíme rovnici $f''(x) = 0$

   $\frac{2x-6}{x^4} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x-6=0 \quad \rightarrow \quad x=3 \quad \rightarrow$ možný IB: $x_{01} = 3$
3. BN: $x_0 = 0$; celkový počet možných IB a BN: $m = 1+1 = 2$
4. reálná osa s možnými IB a BN

   $0 \qquad 3$
5. $m = 2 \rightarrow$ tři intervaly
   - $I_1 = (-\infty; 0)$
   - $I_2 = (0; 3)$
   - $I_3 = (3; \infty)$
6. výběr reprezentanta pro každý interval
   - $x_1 = -1 \in I_1$
   - $x_2 = 1 \in I_2$
   - $x_3 = 4 \in I_3$
7. výpočet funkční hodnoty $f''(x)$ pro každého reprezentanta
   - $f''(-1) = \frac{2\cdot(-1)-6}{(-1)^4} = -8$
   - $f''(1) = \frac{2\cdot(1)-6}{(1)^4} = -4$
   - $f''(4) = \frac{2\cdot(4)-6}{(4)^4} = \frac{1}{128}$
8. určení průběhu funkce $f(x)$ na každém intervalu
   - $f''(-1) < 0 \cdots \cap$ na I_1
   - $f''(1) < 0 \cdots \cap$ na I_2
   - $f''(4) > 0 \cdots \cup$ na I_3

   $\cap \;|\; \cap \;|\; \cup$

   $0 \qquad 3$
9. určení inflexních bodů
   - $x_{01} = 3$: IB; $f(3) = \frac{(3)-1}{(3)^2} = \frac{2}{9}$

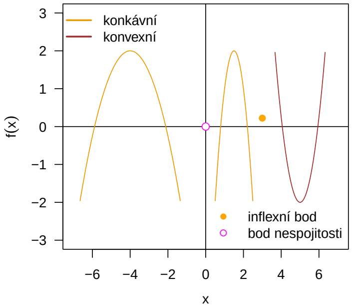
Příklad 3.1.6 (pokračování)

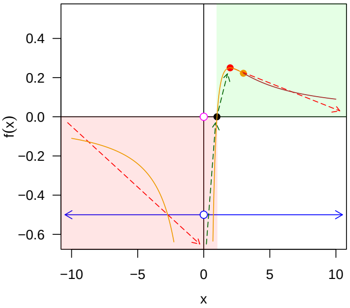
$\cap$	|	$\cap$	|	$\cup$
	0		3	

Závěr

- funkce je konkávní na intervalu $(-\infty; 0)$
- $x = 0$: BN
- funkce je konkávní na intervalu $(0; 3)$
- $x_{01} = 3$: IB; $f(3) = \frac{2}{9}$
- funkce je konvexní na intervalu $(3; \infty)$

Grafická interpretace





7. Asymptoty bez směrnice

Asymptota bez směrnice (ABS) je vertikální přímka procházející bodem x_0, podél které „utíká“ funkce $f(x)$ do $+\infty/-\infty$.

Poznámka: ABS může procházet buď BN nebo krajními body definičního oboru, kromě $\pm\infty$.

Algoritmus pro vyšetření ABS v bodech nespojitosti

1. nalezneme BN
2. pro každý BN počítáme limitu zleva $\lim_{x \to BN-} f(x)$
3. pro každý BN počítáme limitu zprava $\lim_{x \to BN^+} f(x)$
4. určujeme ABS
   - pokud $\lim_{x \to BN-} f(x) = \pm\infty$, nebo $\lim_{x \to BN^+} f(x) = \pm\infty$, potom ABS: $x = BN$

Poznámka: Vyšetřením asymptot v krajních bodech definičního oboru se v předmětech C1460 a C1480 detailně zabývat nebudeme. Algoritmus k vyšetření asymptot v krajních bodech $D(f)$ je pro zájemce uveden v Příloze A této prezentace.

Příklad 3.1.7

Určete ABS funkce $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ a zjistěte, jak se $f(x)$ v okolí těchto asymptot chová.

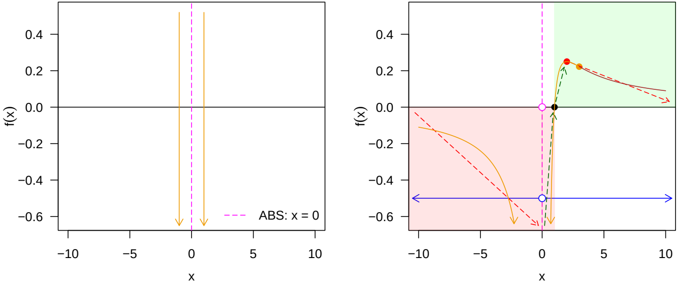
Řešení podle algoritmu

1. BN: $x = 0$
2. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x^2} = \frac{(0^-)-1}{(0^-)^2} = \frac{-1^-}{0^+} = -\infty$
3. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x^2} = \frac{(0^+)-1}{(0^+)^2} = \frac{-1^+}{0^+} = -\infty$
4. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad$ ABS: $x = 0$

Závěr

- ABS: $x = 0$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

Grafická interpretace



8. Asymptoty se směrnicí

Asymptota se směrnicí (ASS) je přímka, k níž směřuje funkce $f(x)$, když $x \to -\infty$, resp. $x \to \infty$.

ASS je přímka $y = ax + b$, kde $a \in \mathbb{R}$ je **směrnice** a $b \in \mathbb{R}$ je **absolutní člen**.

Algoritmus pro vyšetření ASS pro $x \to \infty$

1. počítáme směrnici $a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$
   - pokud $a \in \mathbb{R}$, pak ASS existuje a a je její směrnice
   - pokud $a = \pm\infty$, pak ASS neexistuje
2. pokud ASS existuje, počítáme dále absolutní člen $b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$
3. výsledná ASS je přímka $y = ax + b$

Algoritmus pro vyšetření ASS pro $x \to -\infty$

1. počítáme směrnici $a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$
   - pokud $a \in \mathbb{R}$, pak ASS existuje a a je její směrnice
   - pokud $a = \pm\infty$, pak ASS neexistuje
2. pokud ASS existuje, počítáme dále absolutní člen $b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax)$
3. výsledná ASS je přímka $y = ax + b$

Příklad 3.1.8

Určete ASS funkce $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.

Vyšetření ASS pro $x \to \infty$ podle algoritmu

1. výpočet směrnice a

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^3} = \frac{\infty-1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot(1-\frac{1}{x})}{x\cdot(x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{x^2} = \frac{1-\frac{1}{\infty}}{\infty^2} = \frac{1-0}{\infty} = 0$$

   směrnice $a = 0 \quad \to \quad$ ASS existuje

2. výpočet absolutního členu b

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x^2} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x^2}\right) = \frac{\infty-1}{\infty^2} = \frac{\infty}{\infty}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot(1-\frac{1}{x})}{x\cdot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{x} = \frac{1-\frac{1}{\infty}}{\infty} = \frac{1-0}{\infty} = 0$$

   absolutní člen $b = 0$

3. ASS: $y = a\cdot x + b = 0\cdot x + 0 = 0 \to \mathbf{y = 0}$

Příklad 3.1.8 (pokračování)

Vyšetření ASS pro $x \to -\infty$ podle algoritmu

1. výpočet směrnice a

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x-1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^3} = \frac{-\infty-1}{-\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\cdot(1-\frac{1}{x})}{x\cdot(x^2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{x^2} = \frac{1-\frac{1}{-\infty}}{(-\infty)^2} = \frac{1+0}{\infty} = 0$$

směrnice $a = 0 \quad \to \quad$ ASS existuje

2. výpočet absolutního členu b

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-1}{x^2} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-1}{x^2}\right) = \frac{-\infty-1}{(-\infty)^2} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\cdot(1-\frac{1}{x})}{x\cdot x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{x} = \frac{1-\frac{1}{-\infty}}{-\infty} = \frac{1+0}{-\infty} = 0$$

absolutní člen $b = 0$

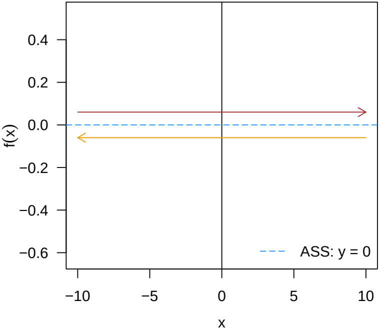
3. ASS: $y = a\cdot x + b = 0\cdot x + 0 = 0 \to \mathbf{y = 0}$

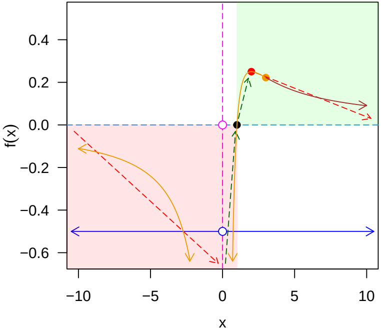
Příklad 3.1.8 (pokračování)

Závěr

- ASS: $y = 0$

Grafická interpretace





9. Grafická vizualizace + obor hodnot $H(f)$

Obor hodnot $H(f)$ funkce $f(x)$ je množina čísel $y = f(x)$, které mohou být výsledkem funkce $f(x)$.

Algoritmus pro vyšetření oboru hodnot

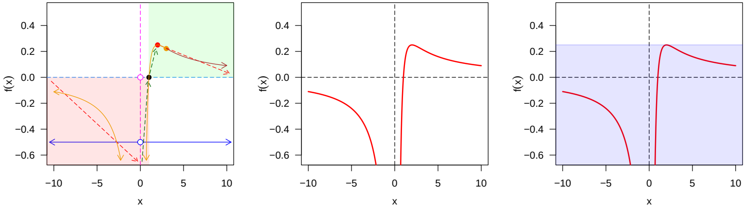
1. sestrojíme graf funkce $f(x)$
2. na základě sestrojeného grafu stanovíme obor hodnot $H(f)$

Příklad 3.1.9

Sestrojte graf funkce $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ a určete obor hodnot $H(f)$.

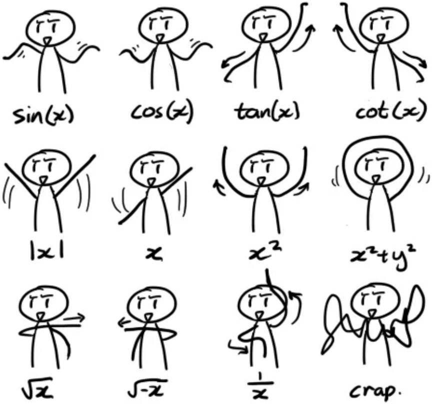
Řešení podle algoritmu

1. sestrojení grafu funkce $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$



2. na základě sestrojeného grafu docházíme k závěru, že $H(f) = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right\rangle$.

Děkuji za pozornost.



Příloha A: Vyšetření ABS v krajních bodech definičního oboru

Algoritmus pro vyšetření asymptot v krajních bodech $D(f)$

1. určíme $D(f)$
2. je-li $D(f)$ zleva omezen nějakým číslem $a \in \mathbb{R}$, počítáme $\lim_{x \to a^+} f(x)$
3. určujeme, zda $x = a$ je asymptota bez směrnice
   - pokud $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, potom ABS: $x = a$
4. je-li $D(f)$ zprava omezen nějakým číslem $b \in \mathbb{R}$, počítáme $\lim_{x \to b^-} f(x)$
5. určujeme, zda $x = b$ je asymptota bez směrnice
   - pokud $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$, potom ABS: $x = b$