Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita

C1480: Úvod do matematiky - seminář

Téma 1: Lineární algebra 2/2

Veronika Bendová

bendova.veroonika@gmail.com

Přehled pojmů

- **reprezentace prostoru pomocí vektorů**

- **lineární kombinace vektorů**
- **lineární závislost vektorů** ... vektory jsou lineárně závislé, pokud lze minimálně jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů;
- **lineární nezávislost vektorů** ... vektory jsou lineárně nezávislé, pokud žádný z nich nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů

- **schodovitý tvar matice** . . . tvar matice, kde jsou pod diagonálou samé nuly;

Každou matici můžeme převést na schodovitý tvar procesem zvaným Gaussova eliminace.

- **Gaussova eliminace** . . . algoritmus, pomocí kterého převádíme matici v libovolném tvaru na matici ve schodovitém tvaru pomocí vhodně volené posloupnosti následujících úprav

  a) záměna řádků,

  b) vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem,

  c) přičtení některého řádku nebo jeho násobku k jinému řádku,

- **hodnost matice** . . . počet lineárně nezávislých řádků matice (lineárně nezávislé řádky matice jsou ty, které po úpravě na schodovitý tvar neobsahují samé nuly)

- **homogenní matice** . . . matice ve tvaru $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **nehomogenní matice** . . . matice ve tvaru $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 4 \\ 0 & 3 & 2 & | & 4 \\ 1 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$

- soustava lineárních rovnic . . . $\begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}$

Příklad 1.11. Lineární závislost a nezávislost vektorů
Zjistěte, zda jsou následující vektory lineárně závislé nebo lineárně nezávislé. V případě lineární závislosti vyjádřete jeden z vektorů jako lineární kombinaci zbylých lineárně nezávislých vektorů.

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4 & -1 & 5\end{pmatrix}$

Příklad 1.12. Hodnost matice
Stanovte, jaká je hodnost následujících matic

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Příklad 1.13. Řešení soustavy lineárních rovnic
Vyřešte následující soustavy lineárních rovnic

1. $$\begin{array}{rcrcrcl} r_1 & + & 3r_2 & & & = & 7 \\ -r_1 & + & r_2 & + & 2r_3 & = & 5 \\ -2r_1 & & & + & 4r_3 & = & 4 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2s & - & 2g & - & a & = & 1 \\ 3s & + & g & & & = & 0 \\ -s & + & 5g & + & 4a & = & 2 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 4h_1 & + & 3h_2 & + & 6h_3 & = & 1 \\ 3h_1 & + & 5h_2 & + & 4h_3 & = & 10 \\ h_1 & - & 2h_2 & + & 2h_3 & = & -9 \end{array}$$