C1480: Úvod do matematiky - seminář
Téma 1: Lineární algebra

Skupina: **0V**

Veronika Horská
podzimní semestr, 2022

## 1.1 Základní operace s vektory

Mějme vektory $a = (2, 1, 2)$, $b = (-1, 0, 1)$, $c = (1, 2, 1, 1)$, $d = (1, 0, -2, 0)$, $e = (3, 0, 1, 3)$, $f = (-1, 1, 0, -2)$.

**Příklad 1.1. Délka vektorů**
Určete délku vektoru

1. $c = (1, 2, 1, 1)$ 4

**Příklad 1.2. Sčítání vektorů, odčítání vektorů, násobení skalárem**
Vypočítejte

1. $a + b$ $(1, 1, 3)$
2. $a - 2b$ $(4, 1, 0)$

**Příklad 1.3. Skalární součin vektorů**
Vypočítejte následující skalární součin

1. $4a \cdot b$ 0

## 1.2 Základní operace s maticemi

Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 1.4. Transpozice matic**
Určete tvar následujících matic

1. $A^T$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $B^T$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Příklad 1.5. Dimenze matic**
Určete dimenzi následujících matic

1. $A$ $1 \times 3$
2. $A^T$ $3 \times 1$
3. $A^T \cdot B^T$ $3 \times 3$

**Příklad 1.6. Sčítání matic, odčítání matic, násobení skalárem**
Vypočítejte

1. $A + B$ nejde
2. $A + B^T$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

**Příklad 1.7. Násobení matic**
Vypočítejte

1. $A \cdot B$ $\qquad (0)$

2. $A^T \cdot B^T$ $\qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A \cdot C^T$ $\qquad \begin{pmatrix} 5 & -6 \end{pmatrix}$

**Příklad 1.8. Diagonála matice**
Najděte (hlavní) diagonálu následujících matic

1. $A \cdot B$ $\qquad (0)$

2. $A^T \cdot B^T$ $\qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

## 1.3 Gaussova eliminace, lineární (ne)závislost vektorů, soustavy lineárních rovnic

**Příklad 1.9. Lineární závislost a nezávislost vektorů**
Zjistěte, zda jsou následující vektory lineárně závislé nebo lineárně nezávislé. V případě lineární závislosti vyjádřete jeden z vektorů jako lineární kombinaci zbylých lineárně nezávislých vektorů.

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ lineárně nezávislé

2. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ lineárně závislé; $-4 \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

**Příklad 1.10. Hodnost matice**
Stanovte, jaká je hodnost následujících matic

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad 3$

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad 2$

**Příklad 1.11. Řešení soustavy lineárních rovnic**
Vyřešte následující soustavy lineárních rovnic

1. $\begin{aligned} r_1 + 3r_2 \phantom{{}+2r_3} &= 7 \\ -r_1 + r_2 + 2r_3 &= 5 \\ -2r_1 \phantom{{}+r_2} + 4r_3 &= 4 \end{aligned}$ $\qquad r_1 = -2, r_2 = 3, r_3 = 0$

2. $\begin{aligned} -2s_1 - 2g_2 - a_3 &= 1 \\ 3s_1 + g_2 \phantom{{}-a_3} &= 0 \\ -s_1 + 5g_2 + 4a_3 &= 2 \end{aligned}$ $\qquad$ nemá řešení

3. $\begin{aligned} 4h_1 + 3h_2 + 6h_3 &= 1 \\ 3h_1 + 5h_2 + 4h_3 &= 10 \\ h_1 - 2h_2 + 2h_3 &= -9 \end{aligned}$ $\qquad$ nekonečně mnoho řešení

## 1.4 Determinant matice

**Příklad 1.12. Determinant matice**
Stanovte následující determinanty

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ $\qquad 5$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ $\qquad 4$

**Příklad 1.13. Rovnice s determinanty**
Vyřešte následující rovnici

1. $\begin{vmatrix} z & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z & 1 \\ 2 & z \end{vmatrix} = -1$ $\qquad$ $z = 3$ nebo $z = -1$