C1480: ÚVOD DO MATEMATIKY - SEMINÁŘ
TÉMA 1: LINEÁRNÍ ALGEBRA

SKUPINA: **C**

VERONIKA HORSKÁ
PODZIMNÍ SEMESTR, 2022

1.1 Základní operace s vektory

Mějme vektory $a = (2, 1, 2)$, $b = (-1, 0, 1)$, $c = (1, 2, 1, 1)$, $d = (1, 0, -2, 0)$, $e = (3, 0, 1, 3)$, $f = (-1, 1, 0, -2)$.

Příklad 1.1. Délka vektorů
Určete délku následujících vektorů

1. $c = (1, 2, 1, 1)$ — 4
2. $b = (-1, 0, 1)$ — 3

Příklad 1.2. Sčítání vektorů, odčítání vektorů, násobení skalárem
Vypočítejte

1. $e + f$ — $(2, 1, 1, 1)$
2. $2c - 2f$ — $(4, 2, 2, 6)$
3. $a + b - 4c$ — nejde
4. $4d - 2(e - f)$ — $(-4, 2, -10, -10)$

Příklad 1.3. Skalární součin vektorů
Vypočítejte následující skalární součiny

1. $7f \cdot c$ — -7
2. $b \cdot a - 6e \cdot d$ — -6

1.2 Základní operace s maticemi

Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.4. Transpozice matic
Určete tvar následujících matic

1. C^T — $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
2. E^T — $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Příklad 1.5. Dimenze matic
Určete dimenzi následujících matic

1. D — 3×2
2. $D^T \cdot F^T$ — 2×3
3. $C \cdot E$ — nejde

Příklad 1.6. Sčítání matic, odčítání matic, násobení skalárem
Vypočítejte

1. $3F - B^T$ nejde
2. $D - 2C^T$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

Příklad 1.7. Násobení matic
Vypočítejte

1. $D^T \cdot F^T$ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 11 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
2. $A \cdot D - 2B^T \cdot C^T$ $\begin{pmatrix} 4 & 8 \end{pmatrix}$

Příklad 1.8. Diagonála matice
Najděte (hlavní) diagonálu následujících matic

1. $D^T \cdot F^T$ $\begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix}$
2. $A \cdot D - 2B^T \cdot C^T$ 4

1.3 Gaussova eliminace, lineární (ne)závislost vektorů, soustavy lineárních rovnic

Příklad 1.9. Lineární závislost a nezávislost vektorů
Zjistěte, zda jsou následující vektory lineárně závislé nebo lineárně nezávislé. V případě lineární závislosti vyjádřete jeden z vektorů jako lineární kombinaci zbylých lineárně nezávislých vektorů.

1. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ lineárně nezávislé
2. $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ lineárně závislé; $\frac{5}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Příklad 1.10. Hodnost matice
Stanovte, jaká je hodnost následujících matic

1. $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ 3
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2

Příklad 1.11. Řešení soustavy lineárních rovnic
Vyřešte následující soustavy lineárních rovnic

1. $\begin{aligned} 2b_1 - b_2 + 3b_3 &= 6 \\ b_1 + 2b_3 &= 5 \\ 6b_1 + 3b_2 + 4b_3 &= -2 \end{aligned}$ $b_1 = -3, b_2 = 0, b_3 = 4$
2. $\begin{aligned} -t_1 + 2t_2 + 5t_3 &= 3 \\ -2t_1 + 2t_2 + 7t_3 &= 0 \\ t_1 - 2t_3 &= -2 \end{aligned}$ nemá řešení

1.4 Determinant matice

Příklad 1.12. Determinant matice
Stanovte následující determinanty

1. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ $\qquad -1$

2. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ $\qquad 7$

Příklad 1.13. Rovnice s determinanty
Vyřešte následující rovnici

1. $2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ u & 3 & u \\ 0 & u & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & 0 & 1 \\ -u & 0 & 1 \\ -1 & 3 & u \end{vmatrix} = 6$ $\qquad u = -2$ nebo $u = 0$