C1480: Úvod do matematiky - seminář
Téma 4: Integrální počet

Teorie

Veronika Horská
podzimní semestr, 2024

4 Integrální počet - Přehled pojmů

4.1 Neurčitý integrál

- značení $\int f(x)\,\mathrm{d}x$
- nese odpověď na otázku: Jak vypada funkce $f(x)$ předtím, než jsme ji zderivovali?
- $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$
  - $F(x)$ ... primitivní funkce
  - c ... konstanta

Proč $F(x)$ vždy doprovází konstanta c?

$$(F(x)+c)' = f(x) \quad \Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$$

Neurčité integrály vybraných funkcí - Nutné minimum

- $\int a\ \mathrm{d}x = ax + c$, kde a je konstanta $\qquad (ax+c)' = a$
- $\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$, kde a je konstanta $\qquad \left(\frac{x^{a+1}}{a+1}+c\right)' = \frac{(a+1)\cdot x^a}{a+1} = x^a$
- $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + c \qquad (-\cos(x)+c)' = \sin(x)$
- $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + c \qquad (\sin(x)+c)' = \cos(x)$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \tan(x) + c \qquad (\tan(x)+c)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c \qquad (e^x+c)' = e^x$
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c \qquad (\ln(x)+c)' = \frac{1}{x}$

Pravidla pro výpočet neurčitého integrálu

- Integrál součinu konstanty b a funkce = součin konstanty b a integrálu funkce

$$\int b \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = b \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Integrál součtu (rozdílu) = součet (rozdíl) integrálů

$$\int (f(x) \pm g(x))\ \mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Metody výpočtu neurčitého integrálu

1. úprava na jednoduchý tvar
2. metoda substituce
3. metoda per partes (není obsahem předmětů C1460 a C1480)

1. Úprava na jednoduchý tvar

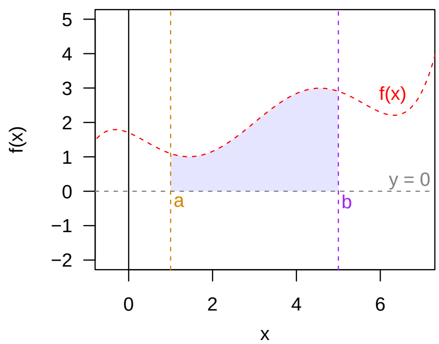
- Integrovanou funkci $f(x)$ zjednodušíme matematickými operacemi na tvar, který umíme zintegrovat pomocí základních vzorců a pravidel

2. Metoda substituce

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} g(x) = t \\ g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + k = F(g(x)) + c$$

4.2 Určitý integrál

- značení $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- nese odpověď na otázku: Jak velká je plocha ohraničená osou x (tj. přímkou $y = 0$) a funkcí $f(x)$ na intervalu $\langle a; b\rangle$?



- $\int_a^b (f(x) - 0)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
  - a . . . dolní mez
  - b . . . horní mez
  - $f(x)$ . . . funkce

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \;\rightarrow\; \text{výsledkem je reálné číslo}$$

Vlastnosti určitého integrálu

1. Pokud $a = b$, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
2. Přehození mezí a a b mění znaménko určitého integrálu.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

   Poznámka: V souladu s konvencí převádíme meze určitého integrálu podle pravidla (2) tak, aby vždy $a \leq b$.

3. Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a; b\rangle$ **kladná**, je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **kladné číslo**.
   Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a; b\rangle$ **záporná**, je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **záporné číslo**.

Určitý integrál a metoda substituce

- Při výpočtu určitého integrálu metodou substituce je rovněž třeba substituovat dolní mez a i horní mez b.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} g(x) = t \\ g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \hline g(a) = a_2 \\ g(b) = b_2 \end{array} \right| = \int_{a_2}^{b_2} f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_{a_2}^{b_2} = [F(g(x))]_a^b$$

- Následně existují dva možné způsoby, kterými lze určitý integrál dopočítat
  I. dopočítáme výraz $[F(t)]_{a_2}^{b_2}$
  II. dopočítáme výraz $[F(g(x))]_a^b$

4.3 Aplikace určitého integrálu: Výpočet obsahu plochy pod křivkou

Úkol: Vypočítejte obsah S^2 zadané plochy $\mathcal{P}$.

Algoritmus výpočtu

1. nakreslíme plochu $\mathcal{P}$
2. určíme funkci $\mathbf{f(x)}$ ohraničující plochu $\mathcal{P}$ shora
3. určíme funkci $\mathbf{g(x)}$ ohraničující plochu $\mathcal{P}$ zdola
4. určíme dolní mez $\mathbf{a}$ ohraničující plochu $\mathcal{P}$ zleva
5. určíme horní mez $\mathbf{b}$ ohraničující plochu $\mathcal{P}$ zprava
6. vypočítáme obsah plochy $\mathbf{S^2} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\mathbf{f(x)} - \mathbf{g(x)})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$
7. k výslednému obsahu přidáme jednotku (případně zástupný symbol $\mathbf{j^2}$, je-li jednotka neznámá)