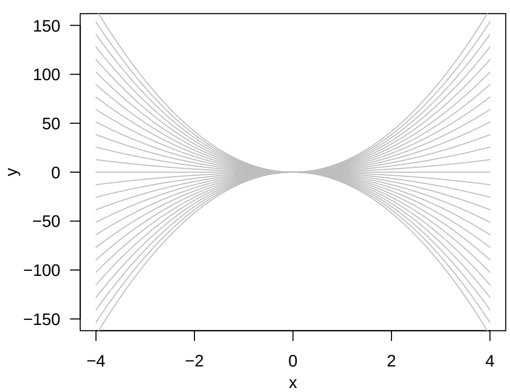
C1480: Úvod do matematiky - seminář
Téma 5: Diferenciální rovnice

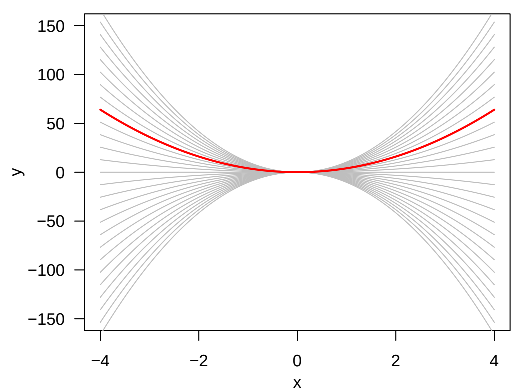
Teorie

Veronika Horská
podzimní semestr, 2024

5 Diferenciální rovnice - Přehled pojmů

- **Obyčejná diferenciální rovnice (ODR)**
  - rovnice, v níž se vyskytuje alespoň jedna derivace
- **Obyčejná diferenciální rovnice 1 řádu** $\ldots y' = f(x, y)$
  - rovnice, v níž se vyskytuje alespoň jedna derivace nejvýše prvího řádu
  - úkol: najděte tvar funkce y tak, aby platila rovnost $y' = f(x, y)$
- **Obecné řešení ODR**
  - množina všech funkcí y, které splňují rovnost $y' = f(x, y)$; řešení y se vzájemně liší pouze v konstantě
- **Počáteční podmínka** $\ldots y(x_0) = y_0$, kde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$
  - podmínka, která může (ale nemusí) být zadaná společně se zadáním diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$
  - ze všech obecných řešení určuje jedno konkrétní tzv. **partikulární řešení ODR**
- **Integrální křivka ODR**
  - křivka znázorňující určité řešení ODR





Obrázek 1: (a) obecné řešení diferenciální rovnice (vlevo); (b) partikulární řešení diferenciální rovnice (vpravo)

Rovnice se separovanými proměnnými

- ODR 1. řádu
- rovnice, ve kterých je možné od sebe oddělit (separovat) složku proměnné x (na jednu stranu rovnice) a složku proměnné y (na druhou stranu rovnice)
- $f(x) + g(y)y' = 0$

Algoritmus pro nalezení obecného řešení ODR se separovanými proměnnými

- Zadání: Najděte řešení rovnice $f(x) + g(y)y' = 0$.
- Řešení:

1. vyjdeme ze zadání $f(x) + g(y)y' = 0$
2. y' nahradíme podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx} \rightarrow f(x) + g(y)\frac{dy}{dx} = 0$
3. **proces separace** ... všechny výrazy proměnné y převedeme na levou stranu rovnice, všechny výrazy proměnné x převedeme na pravou stranu $\rightarrow g(y)dy = -f(x)dx$
4. obě strany rovnice integrujeme $\rightarrow \int g(y)dy = \int -f(x)dx \rightarrow G(y) = F(x) + C$, kde C je konstanta
5. vztah $G(y) = F(x) + C$ upravujeme tak dlouho, dokud nám na levé straně nezůstane pouze proměnná y, tj. $y = \mathcal{F}(x) + C$
6. prověříme, že výsledná množina řešení je kompletní + doplnění chybějících řešení
7. získáme **obecné řešení** $y = \mathcal{F}(x) + C$, $x \in \ldots$, $C \in \ldots$

Algoritmus pro nalezení partikulárního řešení ODR se separovanými proměnnými

- Zadání: Najděte řešení rovnice $f(x) + g(y)y' = 0, \quad y(x_0) = y_0$.
- Řešení:

6. provedením kroků 1–6 najdeme tvar obecného řešení rovnice $f(x) + g(y)y' = 0$, tj. $y = \mathcal{F}(x) + C$
7. do obecného řešení dosadíme za x hodnotu x_0 a za y hodnotu y_0
8. ze vztahu $y_0 = \mathcal{F}(x_0) + C$ dopočítáme hodnotu C (nyní konkrétní číslo $\mathcal{C}$)
9. $\mathcal{C}$ dosadíme do obecného řešení $y = \mathcal{F}(x) + C \rightarrow$ získáme **partikulární řešení** $y = \mathcal{F}(x) + \mathcal{C}$, $x \in \ldots$