M U N I

Rozkolísání jistot: Alternativní geometrie

CORE004 Matematika jako součást kultury

Zdeněk Pospíšil
707@mail.muni.cz

Masarykova univerzita

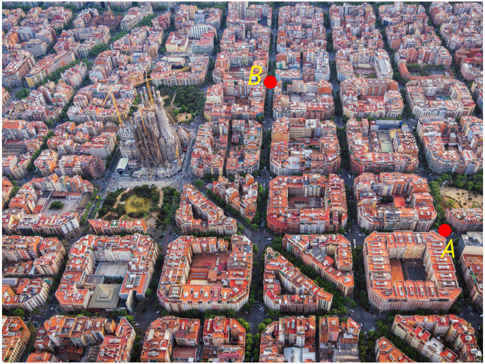
11. listopadu 2024

Obsah

Cesta taxíkem

Barcelona, čtvrt *L'Eixample*
Ildefons Cerdà (1815–1876)

Cesta taxíkem



Barcelona, čtvrt *L'Eixample*
Ildefons Cerdà (1815–1876)

Cesta taxíkem

Barcelona, čtvrt *L'Eixample*
Ildefons Cerdà (1815–1876)

Cesta taxíkem

Barcelona, čtvrt *L'Eixample*
Ildefons Cerdà (1815–1876)

Cesta taxíkem

Barcelona, čtvrt *L'Eixample*

Ildefons Cerdà (1815–1876)

Cesta taxíkem

Barcelona, čtvrt *L'Eixample*
Ildefons Cerdà (1815–1876)

Cesta taxíkem

Barcelona, čtvrt *L'Eixample*
Ildefons Cerdà (1815–1876)

Cesta taxíkem

$$\varrho(A, B) \geq 0$$

$$\varrho(A, B) = \varrho(B, A)$$

Barcelona, čtvrt *L'Eixample*
Ildefons Cerdà (1815–1876)

Cesta taxíkem

$$\varrho(A, B) \geq 0$$

$$\varrho(A, B) = \varrho(B, A)$$

Barcelona, čtvrt *L'Eixample*
Ildefons Cerdà (1815–1876)

Cesta taxíkem

$\varrho(A, B) \geq 0$

$\varrho(A, B) = \varrho(B, A)$

Barcelona, čtvrt *L'Eixample*
Ildefons Cerdà (1815–1876)

Cesta taxíkem

$$\varrho(A,B) \geq 0$$

$$\varrho(A,B) = \varrho(B,A)$$

$$\varrho(A,C) + \varrho(C,B) \geq \varrho(A,B)$$

Barcelona, čtvrt *L'Eixample*
Ildefons Cerdà (1815–1876)

Cesta taxíkem

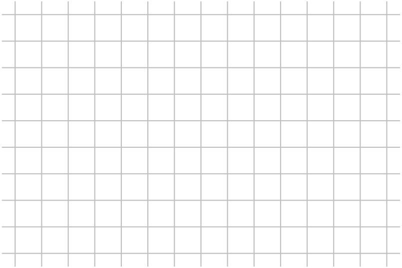
$$\varrho(A,B) \geq 0,\ \varrho(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

$$\varrho(A,B) = \varrho(B,A)$$

$$\varrho(A,C) + \varrho(C,B) \geq \varrho(A,B)$$

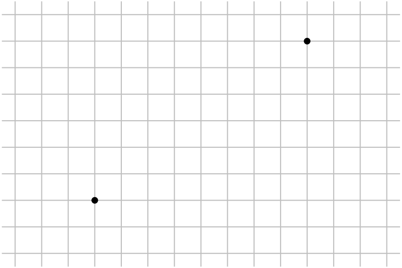
Barcelona, čtvrt *L'Eixample*
Ildefons Cerdà (1815–1876)

Manhattanská-taxíkářská-Minkowského metrika



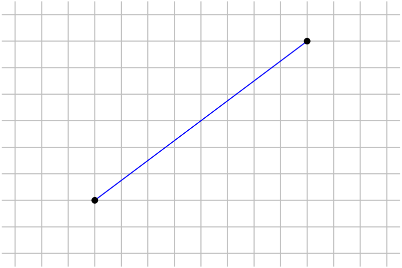
Herman Minkowski
1864–1909

Manhattanská-taxíkářská-Minkowského metrika



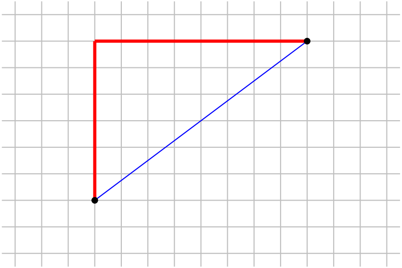
Vzdálenost dvou bodů

Manhattanská-taxíkářská-Minkowského metrika



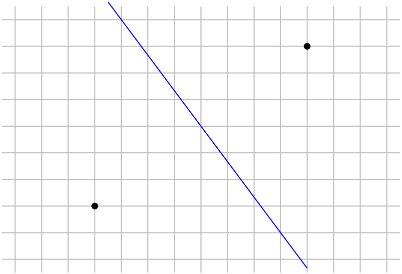
Vzdálenost dvou bodů Eukleidovská

Manhattanská-taxíkářská-Minkowského metrika



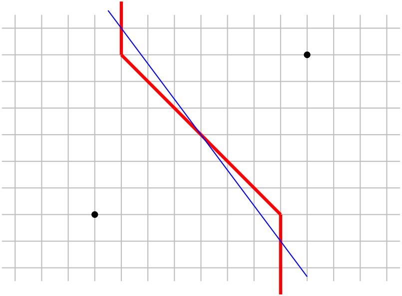
Vzdálenost dvou bodů Eukleidovská a Manhattanská

Manhattanská-taxíkářská-Minkowského metrika



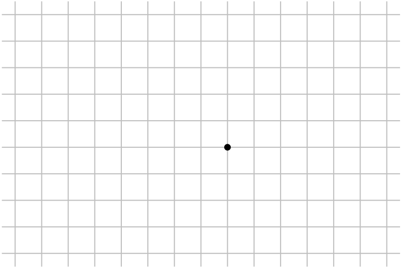
Osa Eukleidovská

Manhattanská-taxíkářská-Minkowského metrika



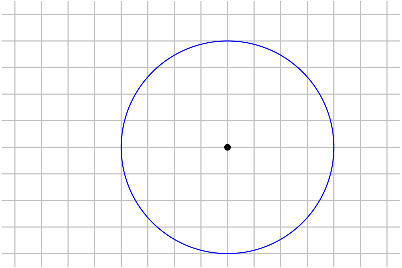
Osa Eukleidovská a Manhattanská

Manhattanská-taxíkářská-Minkowského metrika



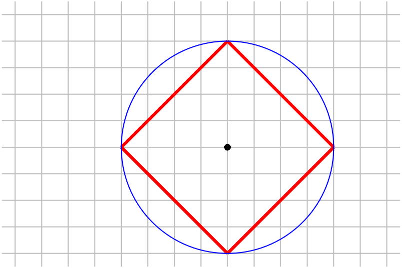
Kružnice

Manhattanská-taxíkářská-Minkowského metrika



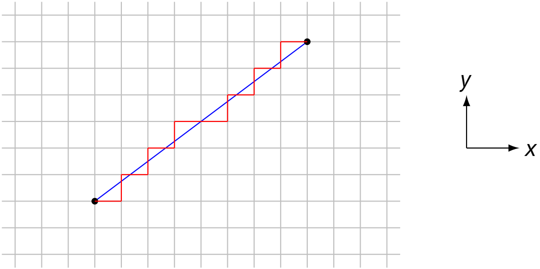
Kružnice Eukleidovská

Manhattanská-taxíkářská-Minkowského metrika



Kružnice Eukleidovská a Manhattanská

Manhattanská-taxíkářská-Minkowského metrika



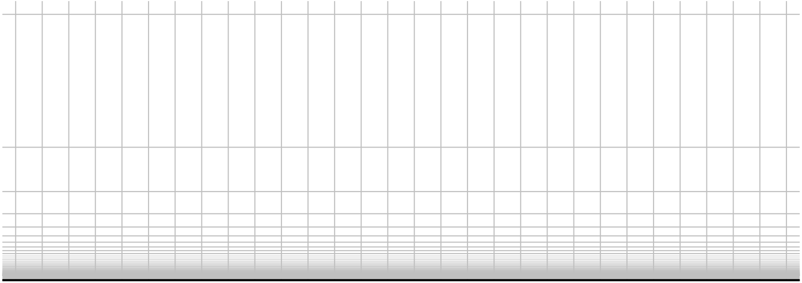
Lokální infinitesimální vzdálenost – Eukleidovská: $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

Minkowského: $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}x| + |\mathrm{d}y|$

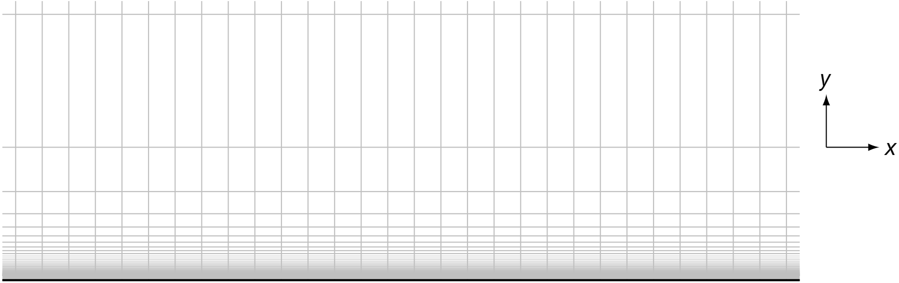
Cesta po Zeměkouli

Sférická (eliptická) metrika

Hyperbolická metrika



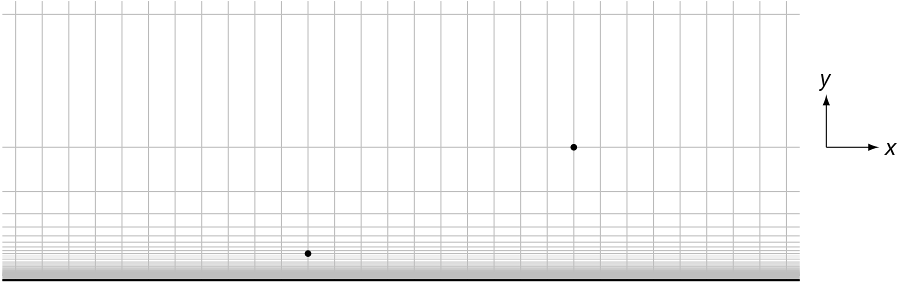
Hyperbolická metrika



Lokální infinitesimální vzdálenost – Eukleidovská: $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

hyperbolická: $\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{y}$

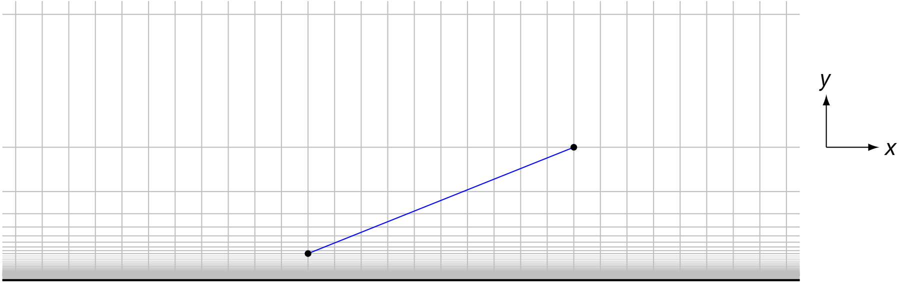
Hyperbolická metrika



Lokální infinitesimální vzdálenost – Eukleidovská: $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

hyperbolická: $\mathrm{d}s = \dfrac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{y}$

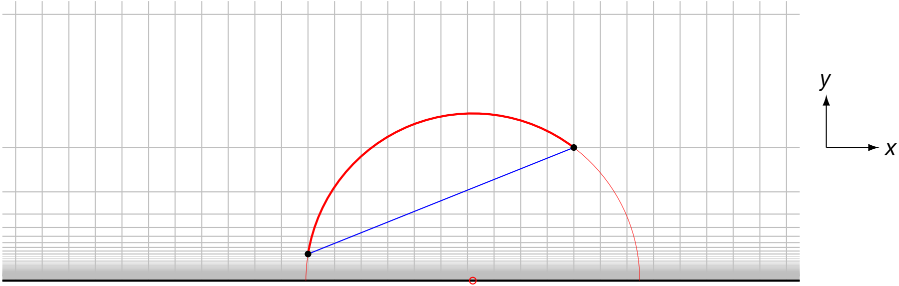
Hyperbolická metrika



Lokální infinitesimální vzdálenost – Eukleidovská: $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

hyperbolická: $\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{y}$

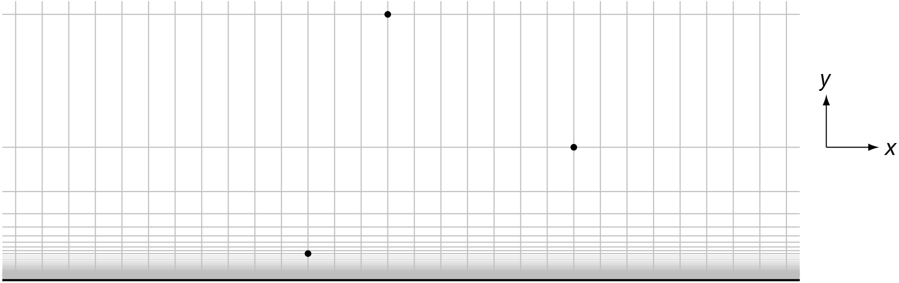
Hyperbolická metrika



Lokální infinitesimální vzdálenost – Eukleidovská: $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

hyperbolická: $\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{y}$

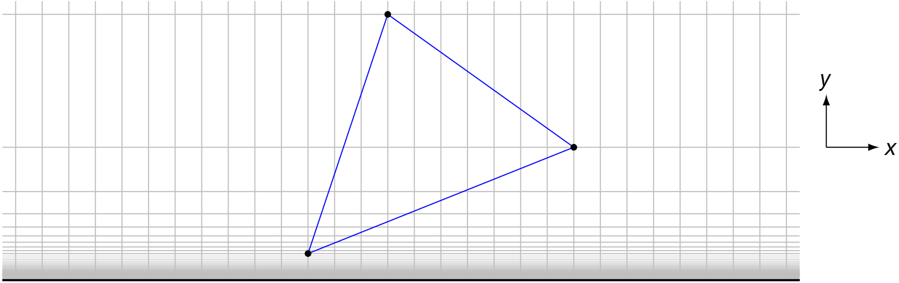
Hyperbolická metrika



Lokální infinitesimální vzdálenost – Eukleidovská: $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

hyperbolická: $\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{y}$

Hyperbolická metrika

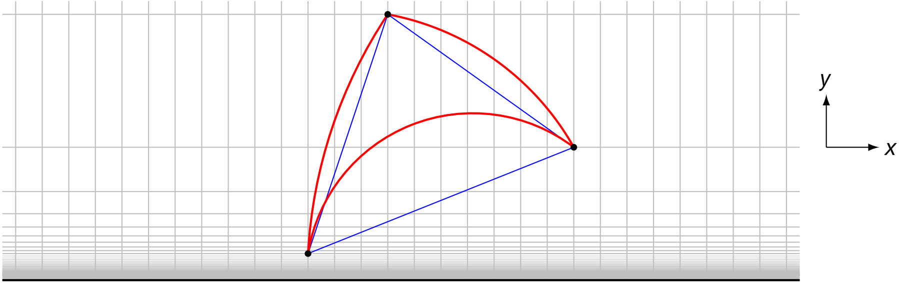


Lokální infinitesimální vzdálenost – Eukleidovská: $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

hyperbolická: $\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{y}$

Trojúhelník

Hyperbolická metrika

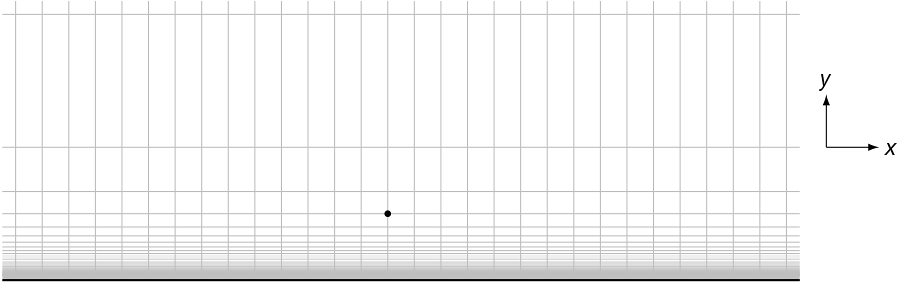


Lokální infinitesimální vzdálenost – Eukleidovská: $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

hyperbolická: $\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{y}$

Trojúhelník

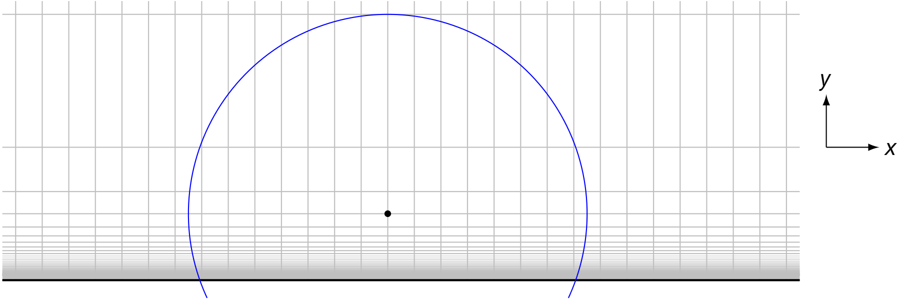
Hyperbolická metrika



Lokální infinitesimální vzdálenost – Eukleidovská: $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

hyperbolická: $\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{y}$

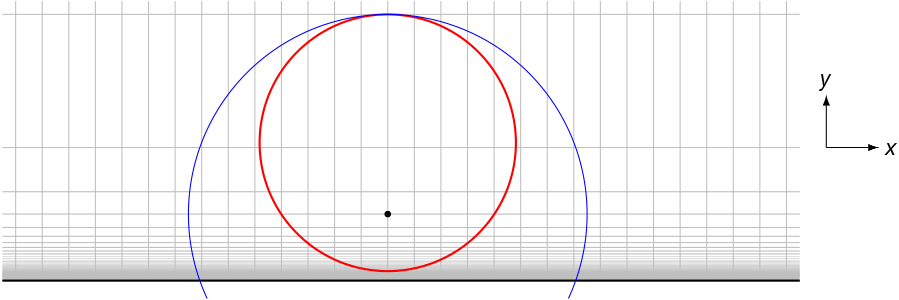
Hyperbolická metrika



Lokální infinitesimální vzdálenost – Eukleidovská: $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

hyperbolická: $\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{y}$

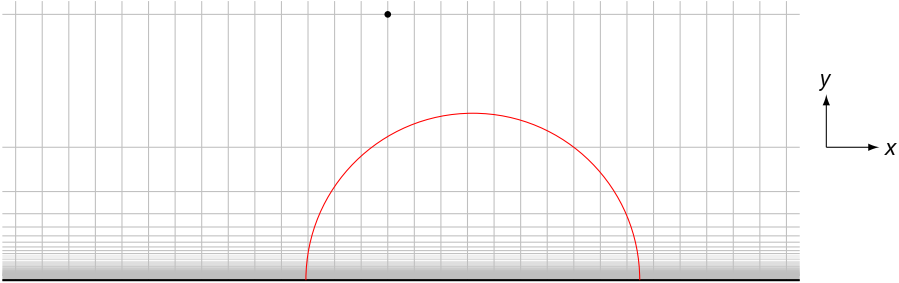
Hyperbolická metrika



Lokální infinitesimální vzdálenost – Eukleidovská: $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

hyperbolická: $\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{y}$

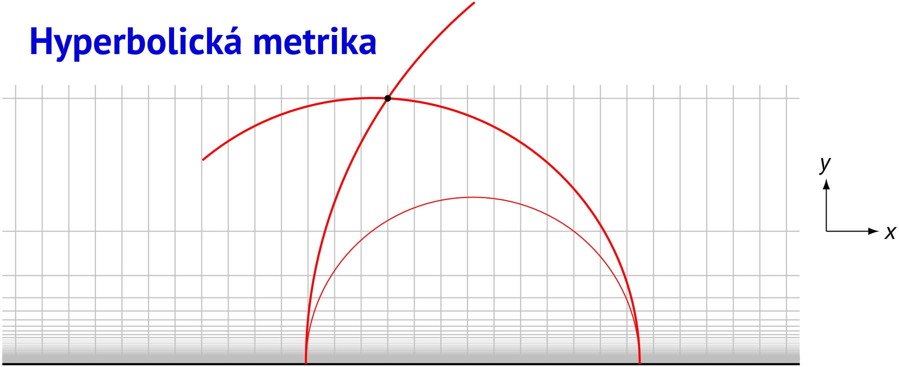
Hyperbolická metrika



Lokální infinitesimální vzdálenost – Eukleidovská: $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

hyperbolická: $\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{y}$

Hyperbolická metrika

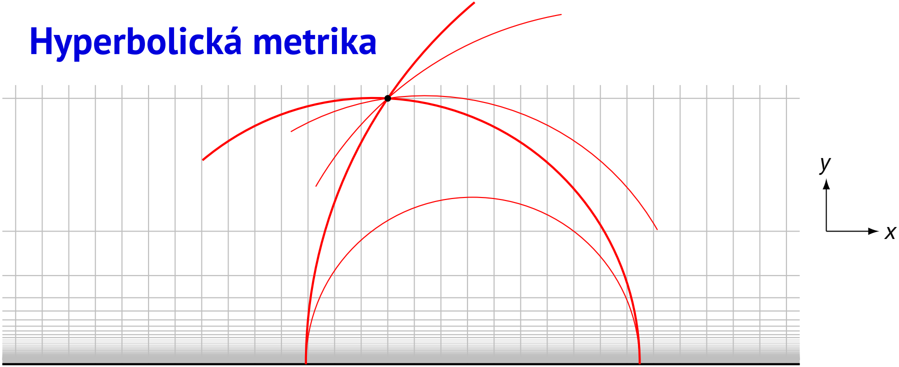


Lokální infinitesimální vzdálenost – Eukleidovská: $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

hyperbolická: $\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{y}$

Rovnoběžky

Hyperbolická metrika

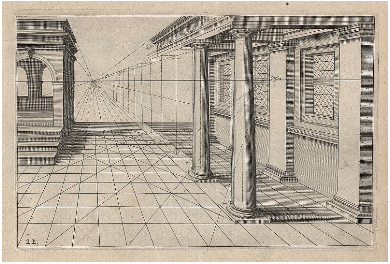


Lokální infinitesimální vzdálenost – Eukleidovská: $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

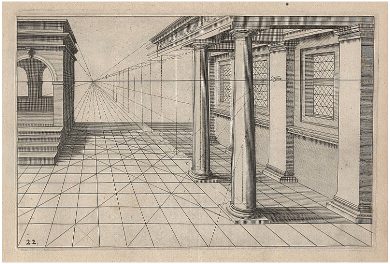
hyperbolická: $\mathrm{d}s = \dfrac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{y}$

Rovnoběžky

Projektivní geometrie – geometrie malířů

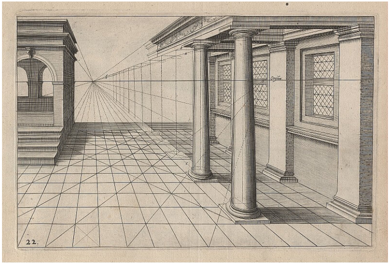


Projektivní geometrie – geometrie malířů



Rovina je doplněna o *nevlastní body* v nekonečnu, ve kterých se protínají rovnoběžné přímky.

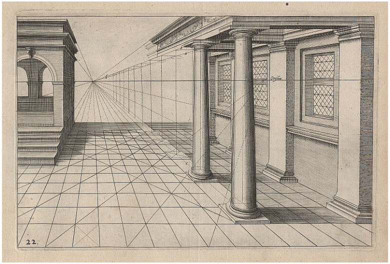
Projektivní geometrie – geometrie malířů



Rovina je doplněna o *nevlastní body* v nekonečnu, ve kterých se protínají rovnoběžné přímky.

Každé dva různé body určují jedinou přímku, každé dvě různé přímky se protínají v jediném bodě.

Projektivní geometrie – geometrie malířů



Rovina je doplněna o *nevlastní body* v nekonečnu, ve kterých se protínají rovnoběžné přímky.

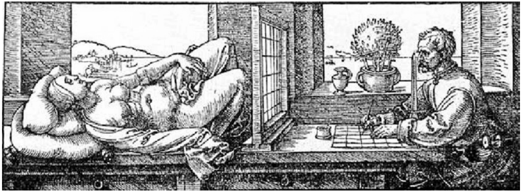
Každé dva různé body určují jedinou přímku, každé dvě různé přímky se protínají v jediném bodě.

Při projekcích se nezachovávají vzdálenosti ani úhly.

Projektivní geometrie – geometrie malířů

Albrecht Dürer:

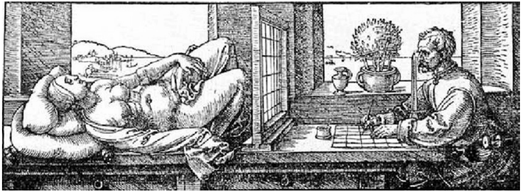
Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt, 1525



Projektivní geometrie – geometrie malířů

Albrecht Dürer:

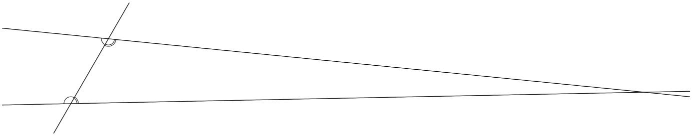
Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt, 1525



Zdvojené hledisko – vnitřní: oko malíře
vnější: oko diváka

Eukleidovy postuláty

1. Vytvořit přímou čáru z každého bodu do každého bodu.
2. Omezenou přímou čáru souvisle prodloužit přímým směrem (tak daleko, jak potřebujeme).
3. Pro každý střed a každý rozestup vytvořit kruh.
4. Aby si všechny pravé úhly byly navzájem rovny.
5. Jestliže dvě přímé čáry protne jiná přímá tak, že vytvoří na jedné straně vnitřní úhly menší než dva pravé, potom na této straně jest tyto přímé čáry prodloužiti tak, aby se protly.



Pokusy o důkaz pátého postulátu

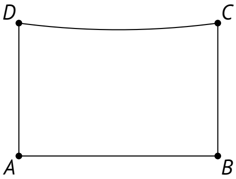
Nevyslovený předpoklad – rovnoběžky mají konstantní vzdálenost.

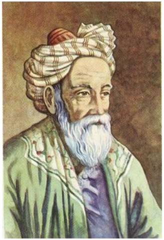
Proklos
410–485

Pokusy o důkaz pátého postulátu

Proklos
410–485

Nevyslovený předpoklad – rovnoběžky mají konstantní vzdálenost.





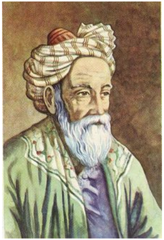
Omar Chajjám
1048–1131

Předpoklady: strany AD a BC jsou shodné,
úhly $\angle DAB$ a $\angle ABC$ jsou pravé.

Důsledek: úhly $\angle ADC$ a $\angle BCD$ jsou shodné.

Nepodařilo se dokázat, že úhly $\angle ADC$ a $\angle BCD$ jsou pravé.

Pokusy o důkaz pátého postulátu



Omar Chajjám
1048–1131

Předpoklady: strany AD a BC jsou shodné,
úhly $\angle DAB$ a $\angle ABC$ jsou pravé.

Důsledek: úhly $\angle ADC$ a $\angle BCD$ jsou shodné.

Nepodařilo se dokázat, že úhly $\angle ADC$ a $\angle BCD$ jsou pravé.

Nevyslovený předpoklad – čára, která je v každém bodě stejně vzdálena od přímky, je také přímka.

Christopher Clavius
1538–1612

Pokusy o důkaz pátého postulátu

Nevyslovený předpoklad – čára, která je v každém bodě stejně vzdálena od přímky, je také přímka.

Christopher Clavius
1538–1612

Nevyslovený předpoklad – ke každému trojúhelníku lze sestrojit další, který má stejné úhly a poměry stran.

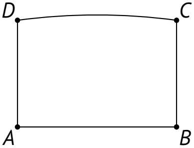
John Wallis
1616–1703

Pokusy o důkaz pátého postulátu

John Wallis
1616–1703

Nevyslovený předpoklad – ke každému trojúhelníku lze sestrojit další, který má stejné úhly a poměry stran.

Giovanni Girolamo Saccheri (1667–1733)



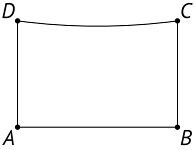
Předpoklad, že úhly $\angle ADC$ a $\angle BCD$ jsou tupé, vede ke sporu s 2. postulátem.

Pokusy o důkaz pátého postulátu

Nevyslovený předpoklad – ke každému trojúhelníku lze sestrojit další, který má stejné úhly a poměry stran.

John Wallis
1616–1703

Giovanni Girolamo Saccheri (1667–1733)



Předpoklad, že úhly $\angle ADC$ a $\angle BCD$ jsou tupé, vede ke sporu s 2. postulátem.

Nepodařilo se najít spor v předpokladu, že úhly $\angle ADC$ a $\angle BCD$ jsou ostré.

Pokusy o důkaz pátého postulátu

Farkas Bolyai
1775–1856

Z dopisu synovi: Žádám tě, aby ses vůbec nezabýval teorií rovnoběžek. Pouze bys ztrácel čas a důkaz jejich teorémů bys stejně nenašel. V její neproniknutelné temnotě by se ztratilo i tisíc géniů Newtonova formátu. Náš svět se nikdy nedočká řešení tohoto problému a nešťastné lidstvo v tomto životě nikdy nic nevyřeší – a rozhodně ne geometrii. Je to hluboká otevřená rána na mé duši ...

Proboha tě prosím, vzdej to. Obávej se toho stejně jako své smyslné touhy, protože tě to stejně jako ona připraví o veškerý tvůj čas, tvé zdraví, pokoj a štěstí ...

Pokusy o důkaz pátého postulátu

Farkas Bolyai
1775 – 1856

Z dopisu synovi: Žádám tě, aby ses vůbec nezabýval teorií rovnoběžek. Pouze bys ztrácel čas a důkaz jejich teorémů bys stejně nenašel. V její neproniknutelné temnotě by se ztratilo i tisíc géniů Newtonova formátu. Náš svět se nikdy nedočká řešení tohoto problému a nešťastné lidstvo v tomto životě nikdy nic nevyřeší – a rozhodně ne geometrii. Je to hluboká otevřená rána na mé duši …
Proboha tě prosím, vzdej to. Obávej se toho stejně jako své smyslné touhy, protože tě to stejně jako ona připraví o veškerý tvůj čas, tvé zdraví, pokoj a štěstí …

Jsem přesvědčen, že odmítnutí postulátu rovnoběžek nevede ke sporu, ačkoliv je pravda, že z něj vyplývají paradoxní jevy.

Carl Friedrich Gauß
1777 – 1855

Pokusy o důkaz pátého postulátu

Jsem přesvědčen, že odmítnutí postulátu rovnoběžek nevede ke sporu, ačkoliv je pravda, že z něj vyplývají paradoxní jevy.

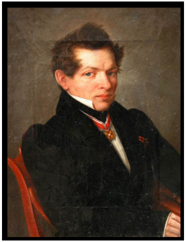
Carl Friedrich Gauß
1777–1855

Immanuel Kant
1724–1804

Prostor je systém, který existuje v lidské mysli, a eukleidovské axiomy a postuláty jsou proto apriorní poznatky vryté přímo do mysli.
Bez těchto axiomů a postulátů nelze o prostoru rozumně uvažovat.

Alternativy pátého postulátu

Hyperbolická geometrie



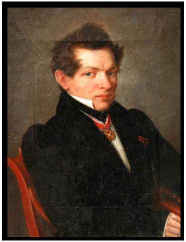
Николай И. Лобачевский
1792–1856

Bodem neležícím na dané přímce může procházet nekonečně mnoho přímek, které nemají s danou přímkou žádný společný bod.
Dvě „krajní“ se nazývají rovnoběžky.

János Bolyai
1802–1860

Alternativy pátého postulátu

Hyperbolická geometrie

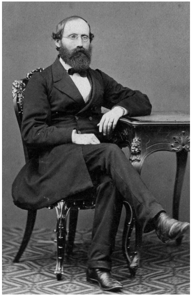


Николай И. Лобачевский
1792–1856

Bodem neležícím na dané přímce může procházet nekonečně mnoho přímek, které nemají s danou přímkou žádný společný bod.
Dvě „krajní“ se nazývají rovnoběžky.

Alternativy pátého postulátu

Eliptická (sférická) geometrie

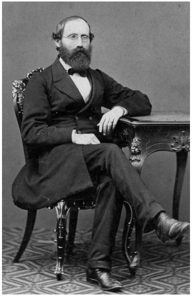


Bernhard Riemann
1826–1866

Eukleides postuluje, že bodem neležícím na dané přímce může procházet pouze jedna rovnoběžka k této přímce, Lobačevskij tvrdí, že jich může být nekonečně mnoho, a já říkám, že nemůže existovat ani jedna.

Alternativy pátého postulátu

Eliptická (sférická) geometrie



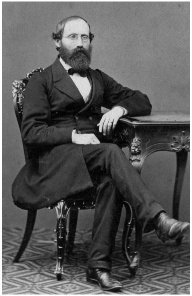
Bernhard Riemann
1826–1866

Eukleides postuluje, že bodem neležícím na dané přímce může procházet pouze jedna rovnoběžka k této přímce, Lobačevskij tvrdí, že jich může být nekonečně mnoho, a já říkám, že nemůže existovat ani jedna.

Nekonečně dlouhá přímka tedy neexistuje, protože by se dříve či později musela stát křivkou, a stejně tak neexistuje ani dokonale plochá rovina, protože by při postupném rozšiřování musela sledovat zakřivení Vesmíru. Protože je však sleduje ve všech směrech, je jedinou zakřivenou rovinou povrch koule.

Alternativy pátého postulátu

Eliptická (sférická) geometrie



Bernhard Riemann
1826–1866

Eukleides postuluje, že bodem neležícím na dané přímce může procházet pouze jedna rovnoběžka k této přímce, Lobačevskij tvrdí, že jich může být nekonečně mnoho, a já říkám, že nemůže existovat ani jedna.

Nekonečně dlouhá přímka tedy neexistuje, protože by se dříve či později musela stát křivkou, a stejně tak neexistuje ani dokonale plochá rovina, protože by při postupném rozšiřování musela sledovat zakřivení Vesmíru. Protože je však sleduje ve všech směrech, je jedinou zakřivenou rovinou povrch koule.

Jediná geometrie, která skutečně existuje, je sférická.

Erlengenský program

Algebraická geometrie

Felix Klein
1849–1925

Profesorská přednáška 1872: Geometrie je studium grup transformací a invariantů.

Parabolické geometrie

Andreas Čap
1965–

Parabolic geometries encompass a very diverse class of geometric structures, including such important examples as conformal, projective, and almost quaternionic structures, hypersurface type CR-structures and various types of generic distributions. The characteristic feature of parabolic geometries is an equivalent description by a Cartan geometry modeled on a generalized flag manifold (the quotient of a semisimple Lie group by a parabolic subgroup).

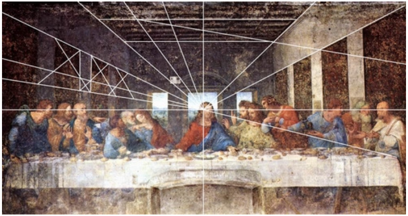
Jan Slovák
1960–

Eukleidovská geometrie – narativní malba

Svatý Mikuláš, konec 16. stoleti

Projektivní geometrie – lineární perspektiva

Leonardo da Vinci (1452–1519): *Poslední večeře*, 1495–1498



Projektivní geometrie – lineární perspektiva

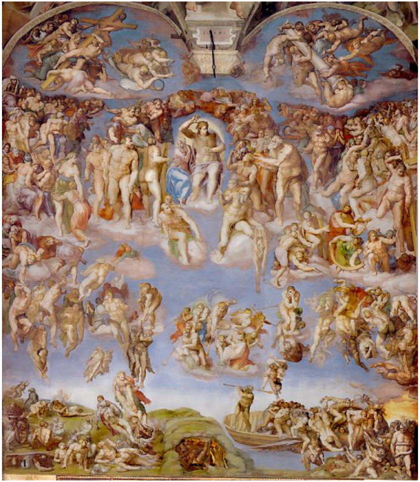
Hans Holbein ml. (1452–1519): *Vyslanci*, 1533

Projektivní geometrie – lineární perspektiva

Hans Holbein ml. (1452–1519): *Vyslanci*, 1533

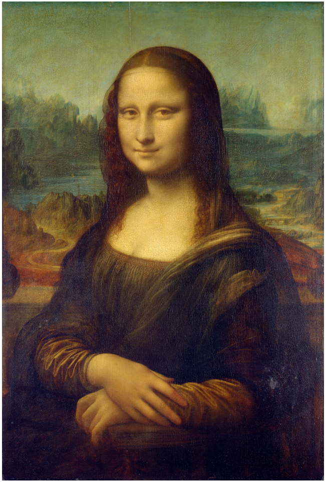
Projektivní geometrie – lineární perspektiva

Michelangelo Buonaroti (1475−1564): *Poslední soud*, 1536−1531



Projektivní geometrie – lineární perspektiva

Leonardo da Vinci (1452–1519): *La Gioconda*, 1516



Projektivní geometrie – lineární perspektiva

El Greco (1541–1614): *Jan Křtitel*, 1600

Neeuklidovské geometrie – interpretativní forma

Michelangelo Merisi, Caravaqqio (1571−1610): *David s hlavou Goliáše,* 1607

Neeuklidovské geometrie – interpretativní forma

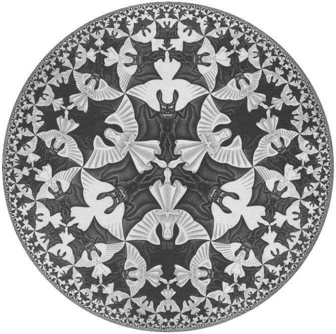
Rembrandt van Rijn (1606–1669): *Agatha Bas*, 1641

Neeuklidovské geometrie – interpretativní forma

Diego Velásquez (1599–1660): *Las Meninas*, 1656

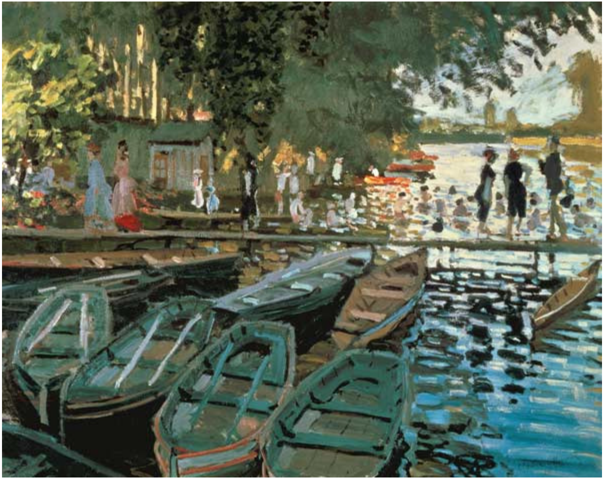
Neeuklidovské geometrie

Mauritius Cornelis Escher (1898–1972): *Circle Limit,* 1960



Geometrie jako grupa transformací – integrativní forma

Claude Monet (1840–1926): *Koupání v La Grenouillère*, 1869



Geometrie jako grupa transformací – integrativní forma

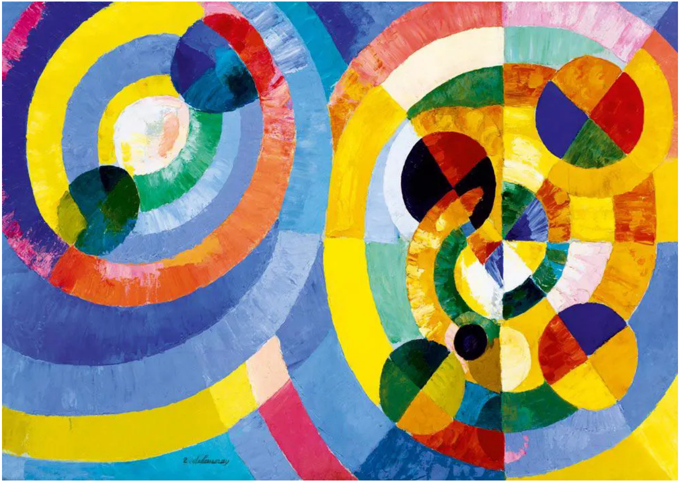
Paul Cézanne (1839–1906): *Zatáčka v La Roche-guyon,* 1885

Geometrie jako grupa transformací – integrativní forma

Pablo Picasso (1881–1973): *Portrét Ambroise Vollarda*, 1909–1910

Abstrakce

Robert Delaunay (1885–1941): *Kruhové formy*, 1913



Abstrakce

František Kupka (1871–1957): *Amorfa – Dvoubarevná fuga*, 1912

MASARYKOVA
UNIVERZITA