Lineární a adaptivní zpracování dat

1. ÚVOD: SIGNÁLY, ČASOVÉ ŘADY a SYSTÉMY

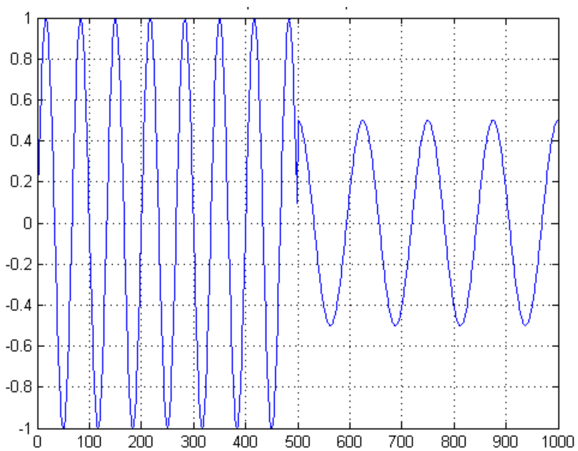
Daniel Schwarz
Jakub Jamárik

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Investice do rozvoje vzdělávání

Osnova

- Úvodní informace o předmětu E0440
- Signály, časové řady – klasifikace, příklady, vlastnosti
- Vzorkovací věta jako dogma
- Kvantování
- Příklady:
  - vliv vzorkovací periody na povahu signálu
  - aliasing
  - kvantovací šum
- Systémy
- Vlastnosti systémů



Úvodní informace o předmětu E0440

??? proč LINEÁRNÍ A ADAPTIVNÍ ZPRACOVÁNÍ DAT **???**

Cíl předmětu

Poskytnout informace o vědním oboru ZPRACOVÁNÍ DIGITÁLNÍCH SIGNÁLŮ a v *mezidruhové komunikaci* ukázat některé jeho výhody pro matematické biology.

Souvislost předmětu s jinými

- Časové řady
- Spektrální analýza časových řad

Klíčová slova

Časové řady, signály, systémy, spektrum, impulsní charakteristika, frekvenční charakteristika, přenosová funkce, lineární filtrace, modely časových řad, adaptivní filtrace, identifikace systémů, lineární predikce

Úvodní informace o předmětu E0440

Organizace předmětu

- Přednášky
- Počítačové „procvičování“ (MATLAB)
    - Úvod do MATLABu: Vít Vondrák, VŠB-TU Ostrava
- Skripta JSOU K DISPOZICI

1. Schwarz D (2012): Lineární a adaptivní zpracování dat.
2. Vyškovský R & Schwarz D (2017): Lineární a adaptivní zpracování dat: řešené úlohy v MATLABu.

Úvodní informace o předmětu E0440

Hodnocení

- Ústní zkouška
- Bonusy za aktivitu (zejména při počítačovém „procvičování“)

Konzultace

- po předchozí dohodě emailem kdykoli

Úvodní informace o předmětu E0440

Plán přednášek – téma (1/4) SIGNÁLY A SYSTÉMY

P1. Úvod: SIGNÁLY, ČASOVÉ ŘADY a SYSTÉMY. Signály, časové řady, posloupnosti, data. Vzorkovací věta, aliasing – zatím jako dogma. Kvantování. Definice, struktura systému. Příklady systémů a jejich vlastnosti. Princip superpozice.

P2. SYSTÉMY a jejich popis v časové doméně. LTI systémy. Popis LTI systému v časové oblasti. Odvození konvoluce a impulsní charakteristiky. SYSTÉMY a jejich popis ve frekvenční oblasti. Fourierovy řady v komplexním tvaru. Eulerovy vztahy. Odezva systému na harmonický signál, frekvenční charakteristika.

Plán přednášek – téma (2/4) LINEÁRNÍ FILTRACE

P3. LINEÁRNÍ FILTRACE I: Princip filtrování, idealizované filtry. Vzorkování, překrývání spekter – aliasing nikoli jako dogma. Z transformace, přenosová funkce systému. Vztah přenosové funkce a frekvenční charakteristiky. Nuly, póly. Odhad tvaru frekvenční charakteristiky z rozložení nul a pólů přenosové funkce sytému. Stabilita systému / filtru.

P4. LINEÁRNÍ FILTRACE II: IIR, FIR, AR, MA, ARMA. Skupinové zpoždění. Lineární fázová charakteristika. Návrh FIR filtru vzorkováním frekvenční charakteristiky. Návrh IIR filtru na základě podobnosti a analogovými filtry.

Plán přednášek – téma (3/4) KUMULACE

P5. Kumulační zvýrazňování signálů v šumu I: Repetiční signál, podmínky vymizení šumu, princip kumulačních technik, odvození zlepšení SNR pro kumulační techniky obecně, vliv korelace mezi realizacemi šumu v jednotlivých repeticích. Kumulační technika s pevným oknem.

P6. Kumulační zvýrazňování signálů v šumu II: Kumulace s klouzavým oknem, exponenciální kumulace.

Úvodní informace o předmětu E0440

Plán přednášek - téma (4/4) MODELY ČASOVÝCH ŘAD

P7. Náhodné procesy a modely časový řad I. Aditivní model vzniku časové řady. Stacionarita, trend, sezónnost. Exponenciální vyhlazování a predikce.

P8. Náhodné procesy a modely časový řad II. Modely časových řad: AR, MA, ARMA, ARIMA, bílý šum. Posouzení kvality předpovídání. Analýza residuí – validace modelu.

P9. ADAPTIVNÍ FILTRACE A PREDIKCE I. Identifikace systémů. Predikční filtr, minimalizace střední kvadratické odchylky – optimální filtrace.

P10. ADAPTIVNÍ FILTRACE A PREDIKCE II. Řešení normálních rovnic metodou nejstrmějšího sestupu, LMS algoritmus.

P11. ADAPTIVNÍ FILTRACE A PREDIKCE III. RLS algoritmus.

P12. ČASOVĚ-FREKVENČNÍ ANALÝZA signálů pro vyhlazování, extrakci příznaků apod.

Signály

?

Signály

Signál je nositelem informace.

Signály

Signál je nositelem informace.

data / informace / znalosti

Signály

Signál je nositelem informace.

data / informace / znalosti

…o procesech a jevech, které existují a probíhají v realitě.

Signály

Signál je nositelem informace.

data / informace / znalosti

…o procesech a jevech, které existují a probíhají v realitě.

Signál je funkce v čase nebo v prostoru proměnných a měřitelných veličin.

Signály

Signál je nositelem informace.

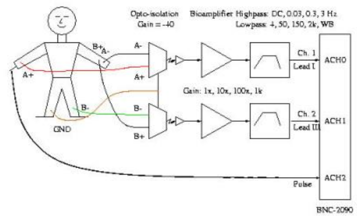
data / informace / znalosti

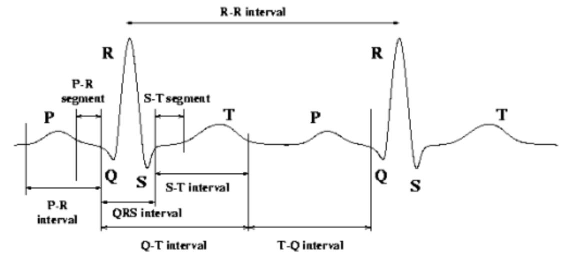
…o procesech a jevech, které existují a probíhají v realitě.

Signál je funkce v čase nebo v prostoru proměnných a měřitelných veličin, která je nositelem informace.

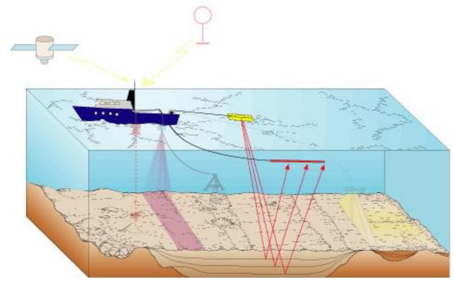
Signály - příklady

- Elektrické signály





- Akustické signály



- Video signály

- Biologické signály

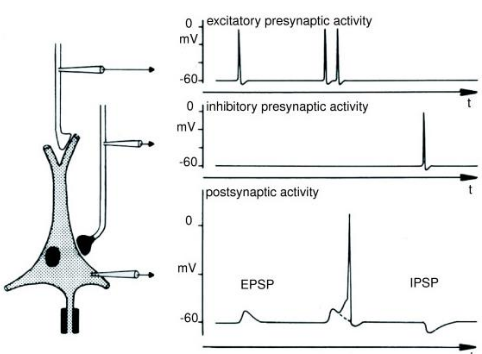
```
307 CAGCAGATCTCAGACAAGTGGCTCCTCCACTCTGTCCT
103  Q   Q   I   S   D   K   W   L   L   H   S   V   L

409 AACGCCCCCGACACTCTACTCAAAAAGACCAAATGGGT
137  N   A   P   D   T   L   L   K   K   T   K   W   V

511 GATATGCTGACCACCTCCTACTACAAGCAGGGTGTGGC
171  D   M   L   T   T   S   Y   Y   K   Q   G   V   A

613 TTCAAGAAGGACGCCCACAAGATGGAGACCTTCCTCAA
205  F   K   K   D   A   H   K   M   E   T   F   L   K

715 ACCCCATTCAAACCCTACTATTATATGGAATAAACAAG
817 TTGCCTTAAACACATAGTGAGGTCGACTGATATGACCA
919 AACATTTTCGTAAGTGTAATGGTTTGCCACTTTTTTAG
1021 CAAAGGATGATTTGCATCTTGCTATGTCAAAAAAAGAG
1123 CCTCCCTGGTTCTGCATTGTTTTTATTATTTCTGTTGC
1225 ATGAAACACACTCAGTAGGAGACGGGAGTCAAAGGAAG
```

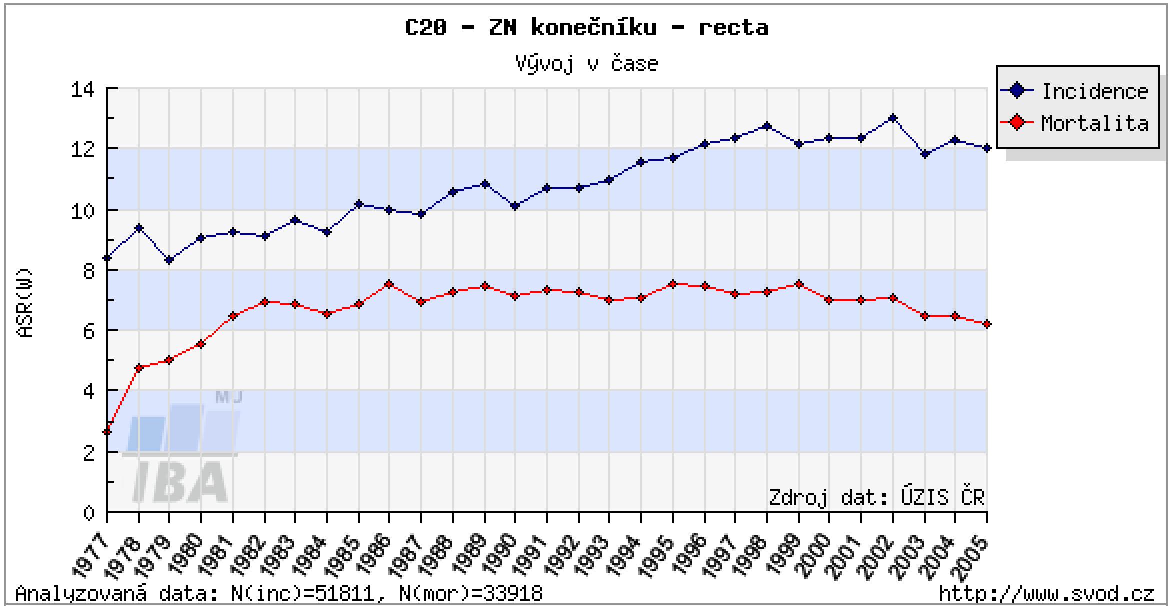


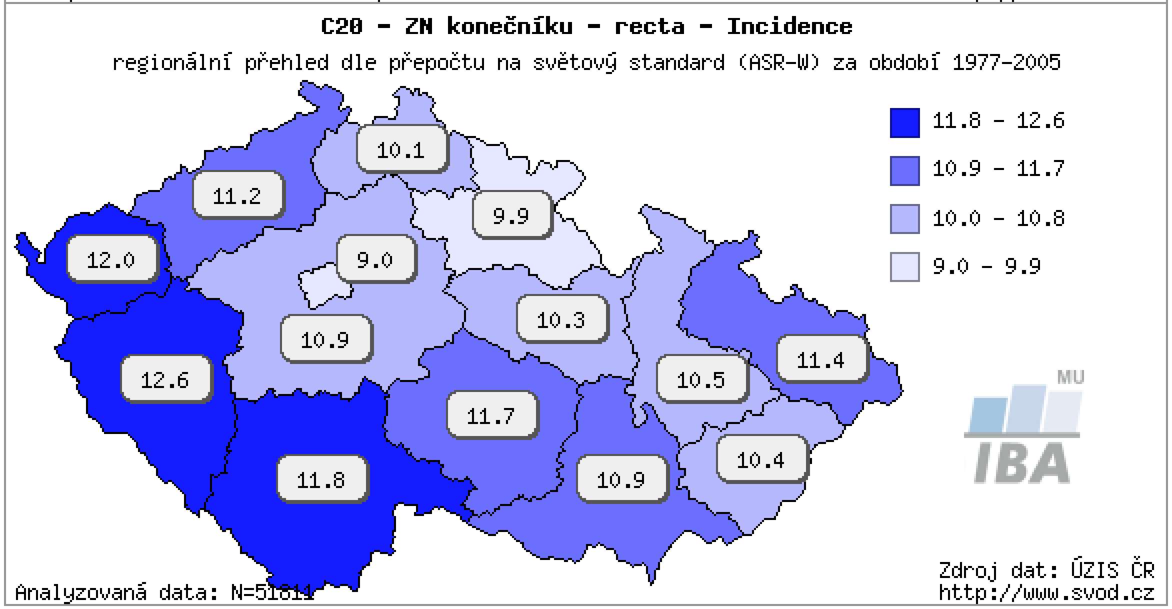
Signály – příklady, veličiny

- Elektrické signály (napětí, proud v obvodu)
- Akustické signály (intenzita mechanického vlnění)
- Video signály (intenzita/jas obrazu)
- Biologické signály (sekvence bází v genu, membránová napětí a proudy buněk)

Signály – příklady, veličiny

… a co je toto?





Signály – klasifikace

Rozdělení signálů podle matematického popisu:

- Deterministické: periodické, harmonické, multifrekvenční, přechodné
- Stochastické: stacionární, nestacionární

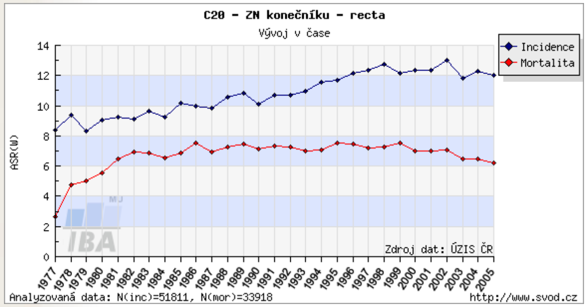
Rozdělení signálů podle nezávislých veličin:

- Spojité
- Diskrétní

- 1-D, 2-D, 3-D, 4-D, N-D

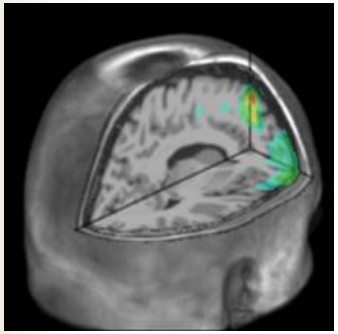
Signály – klasifikace, příklady

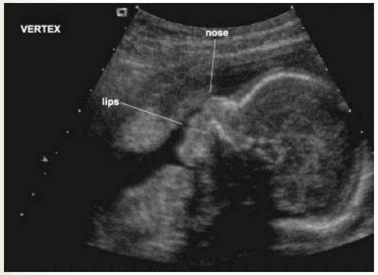
1-D



2-D

3-D





4-D

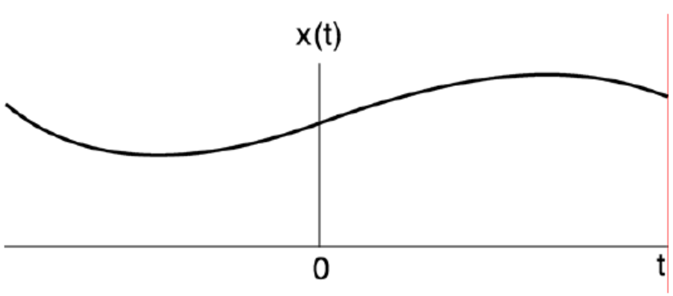
Signály – klasifikace, příklady

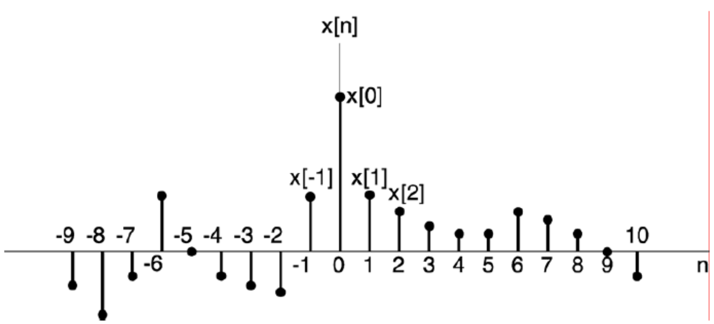
Příklady přirozeně spojitých a přirozeně diskrétních veličin:

- Spojité (CT):
- Diskrétní (DT):

CT: $x(t)$

DT: $x[n]$, $n \in N$





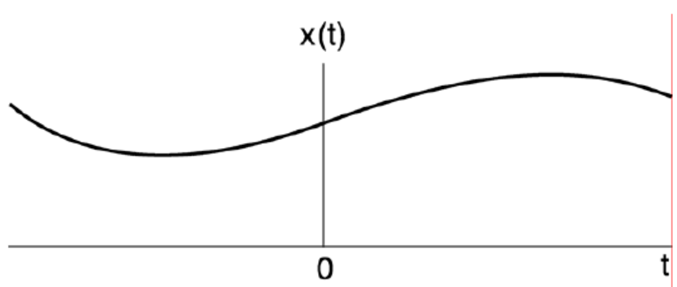
Signály – klasifikace, příklady

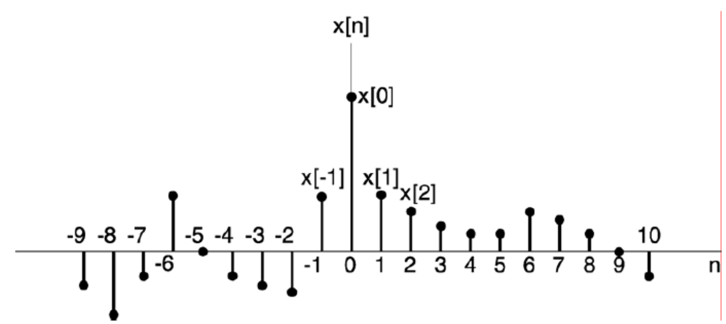
Příklady přirozeně spojitých a přirozeně diskrétních veličin:

- Spojité (CT): proud, napětí, tlak, teplota, rychlost, …
- Diskrétní (DT): sekvence DNA bází, populace *n*-té generace živ. druhu, …

CT: $x(t)$

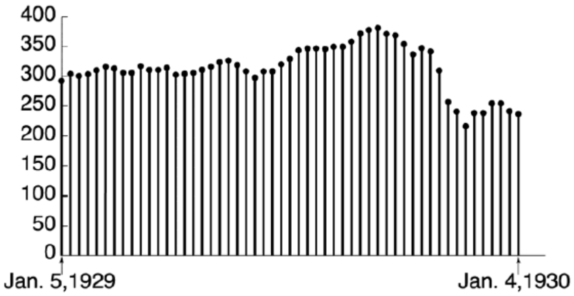
DT: $x[n]$, $n \in N$





Signály – klasifikace, příklady

Příklady nepřirozeně diskrétních signálů:



Týdenní Dow-Jones index

Digitální obraz

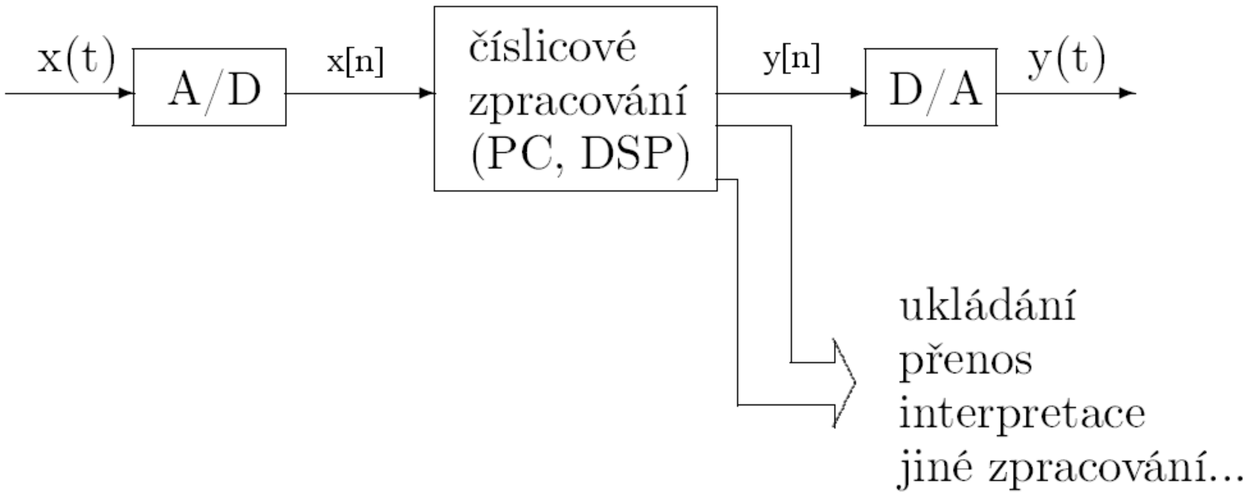
Signály vs. časové řady

??? SIGNÁLY ≈ ČASOVÉ ŘADY

Signály vs. časové řady

1-D DISKRÉTNÍ SIGNÁLY ≈ ČASOVÉ ŘADY

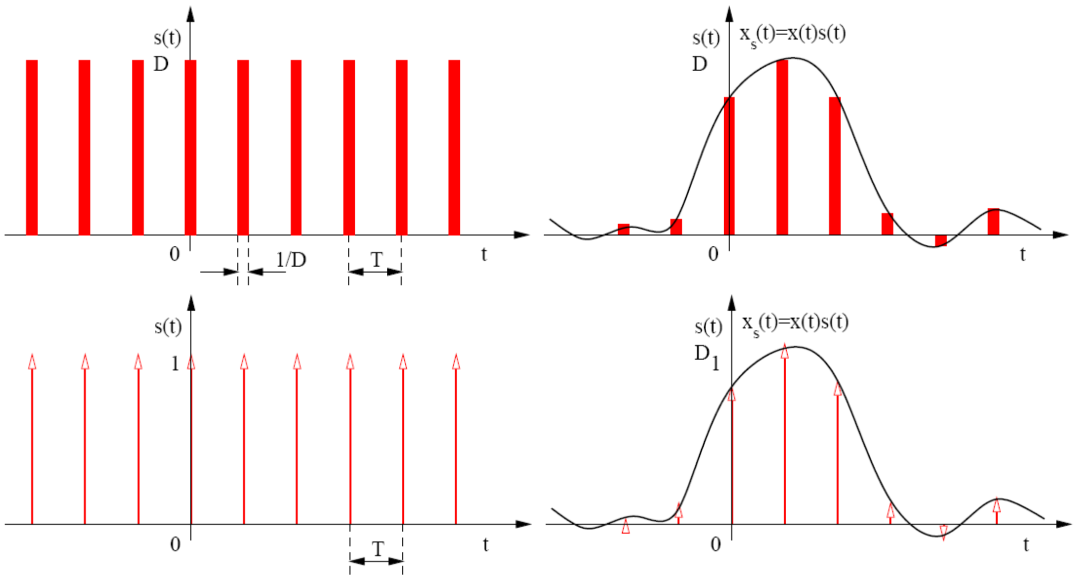
A/D převod



A/D převod:
diskretizace signálu v čase
diskretizace signálu v amplitudě

A/D převod: vzorkování

Vzorkování: diskretizace spojitého signálu v čase



Násobení signálu periodickým sledem Diracových impulsů

T_s	vzorkovací perioda
$F_s = 1/T_s$	vzorkovací frekvence

A/D převod: vzorkování

Vzorkování: diskretizace spojitého signálu v čase

T_s	vzorkovací perioda
$F_s = 1/T_s$	vzorkovací frekvence

Pokud spojitý signál $x(t)$ neobsahuje složky s frekvencí nad f_{max}, pak je veškerá informace o signálu $x(t)$ obsažena v posloupnosti jeho vzorků $x(nT)$, je-li při vzorkování splněna podmínka:

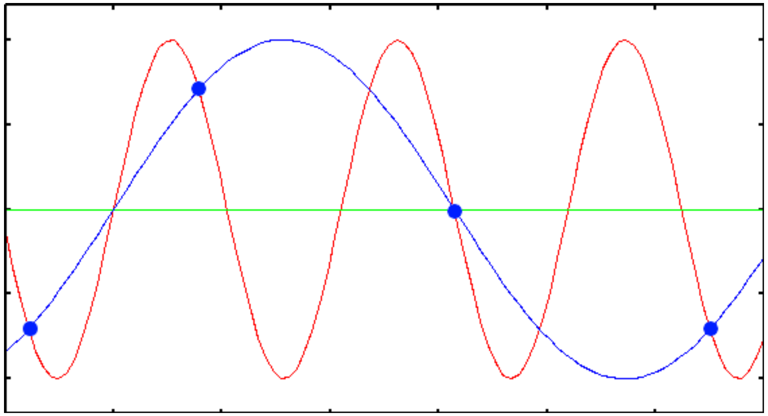
$$\boldsymbol{F_s > 2\, f_{max}}$$

Nyquist–Shannon

Je-li tedy splněna tato podmínka, lze z posloupnosti vzorků signálu x(*nT)* dokonale rekonstruovat původní analogový signál $x(t)$.

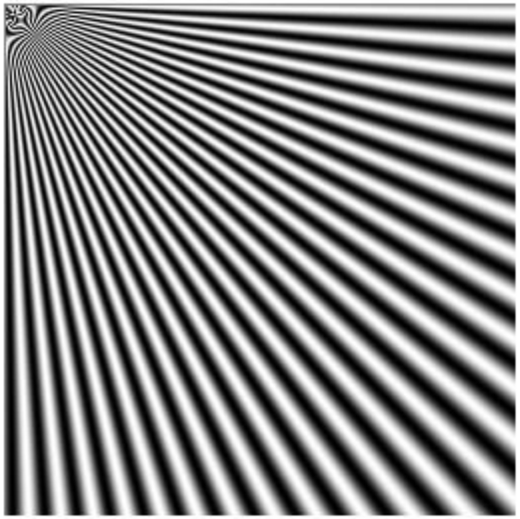
A/D převod: vzorkování

Podvzorkování způsobuje artefakty (tzv. aliasy), **aliasing**:



A/D převod: vzorkování

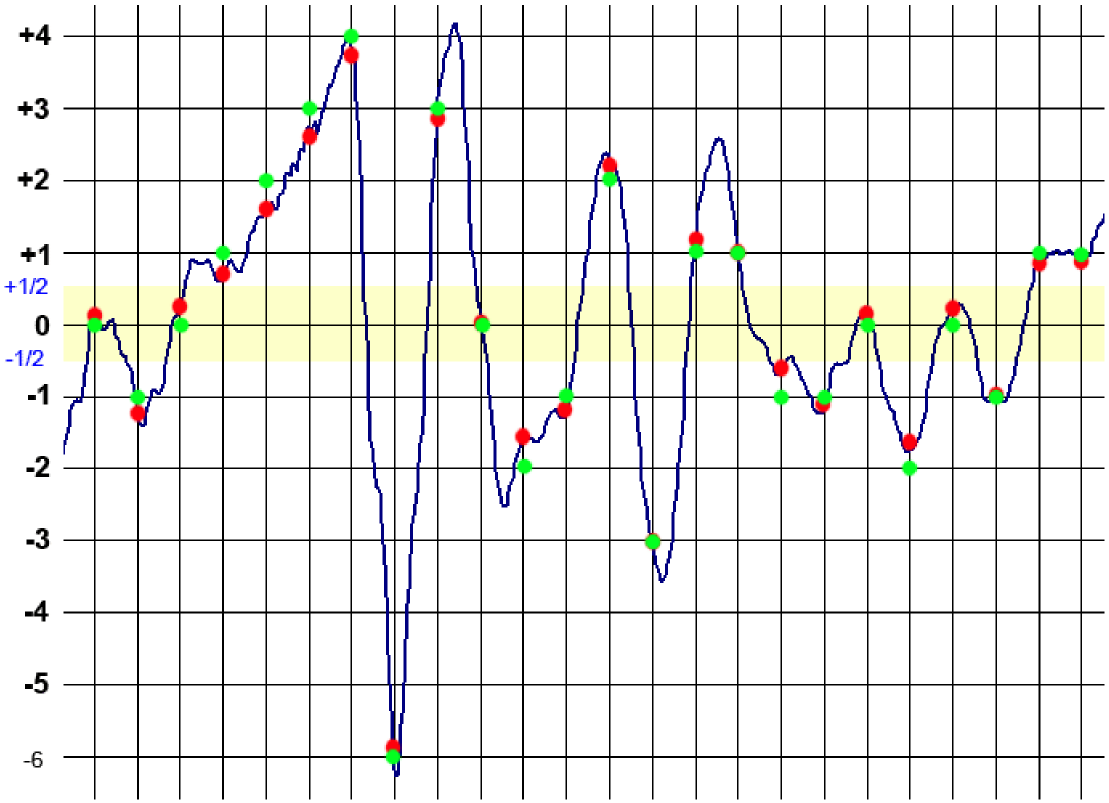
Podvzorkování způsobuje artefakty (tzv. aliasy), **aliasing**:



A/D převod: vzorkování

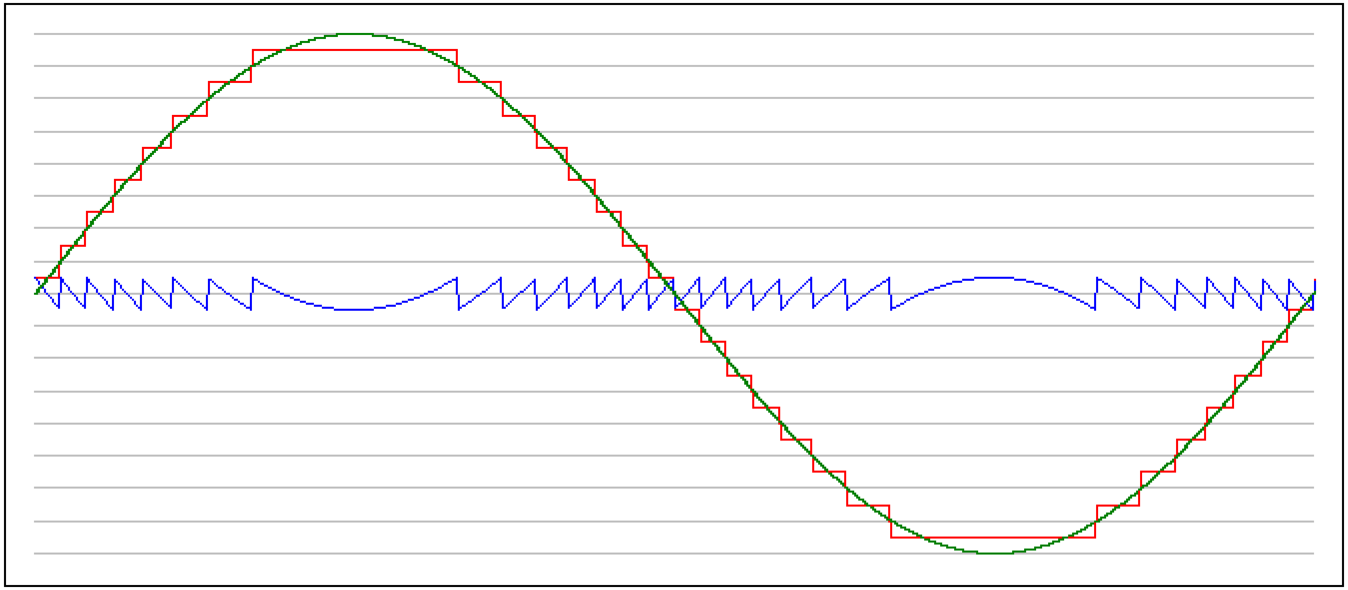
Podvzorkování způsobuje artefakty (tzv. aliasy), **aliasing**:

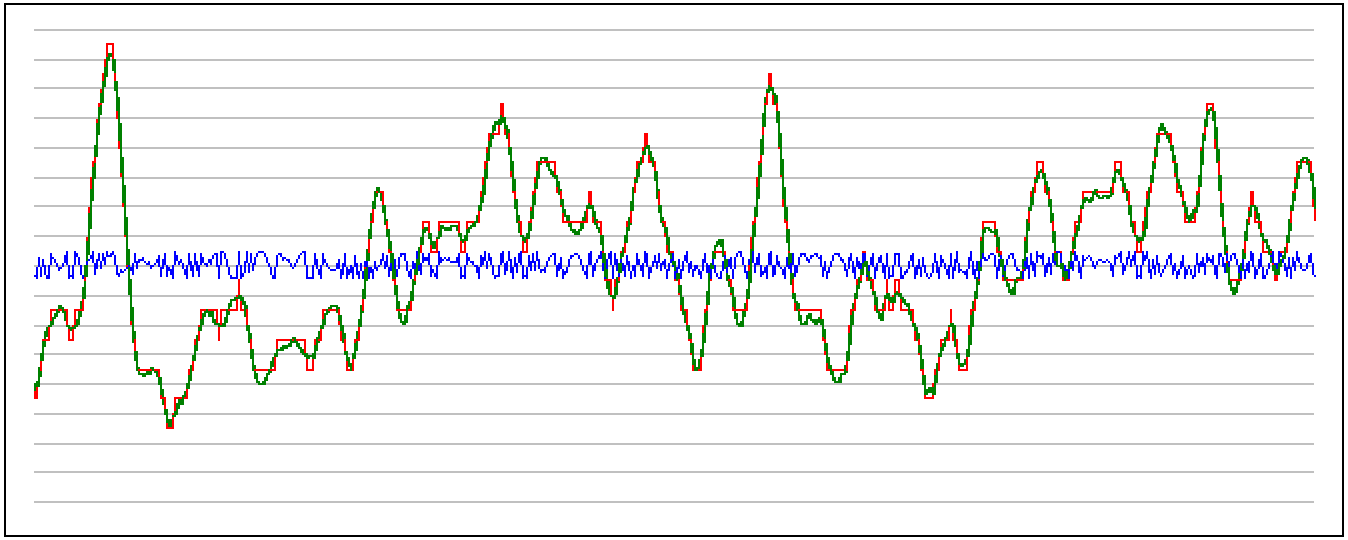
A/D převod: kvantování



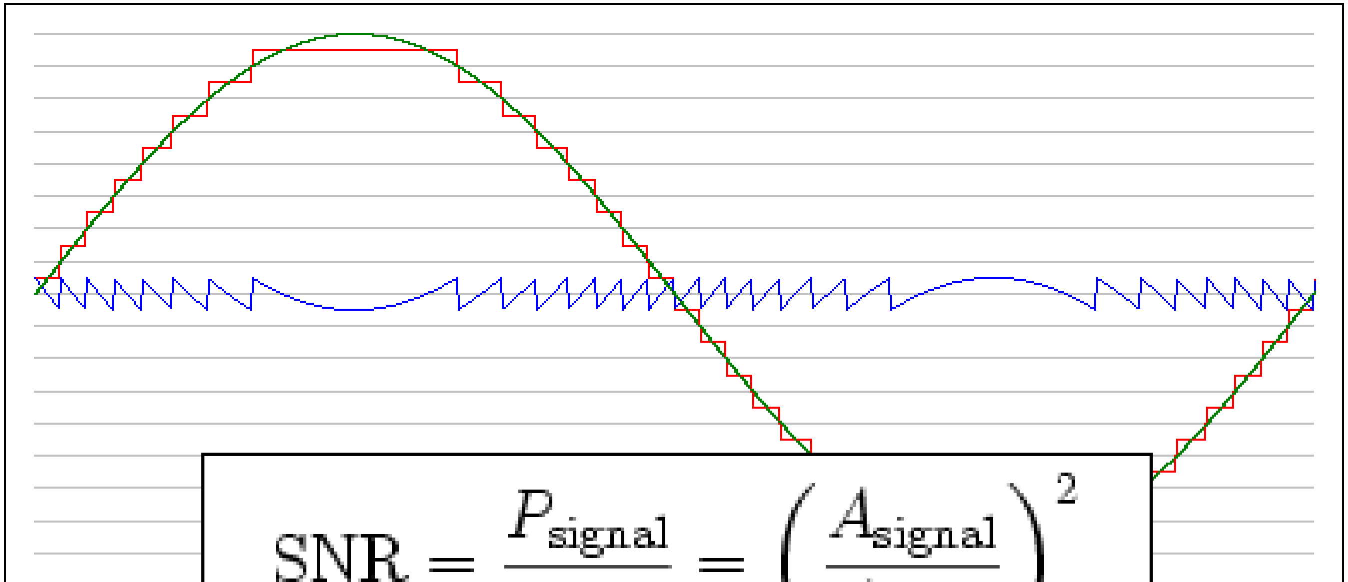
3-bitový A/D převodník:	8 hladin
8-bitový A/D převodník:	256 hladin
16-bitový A/D převodník:	2^{16} hladin

A/D převod: kvantizační šum

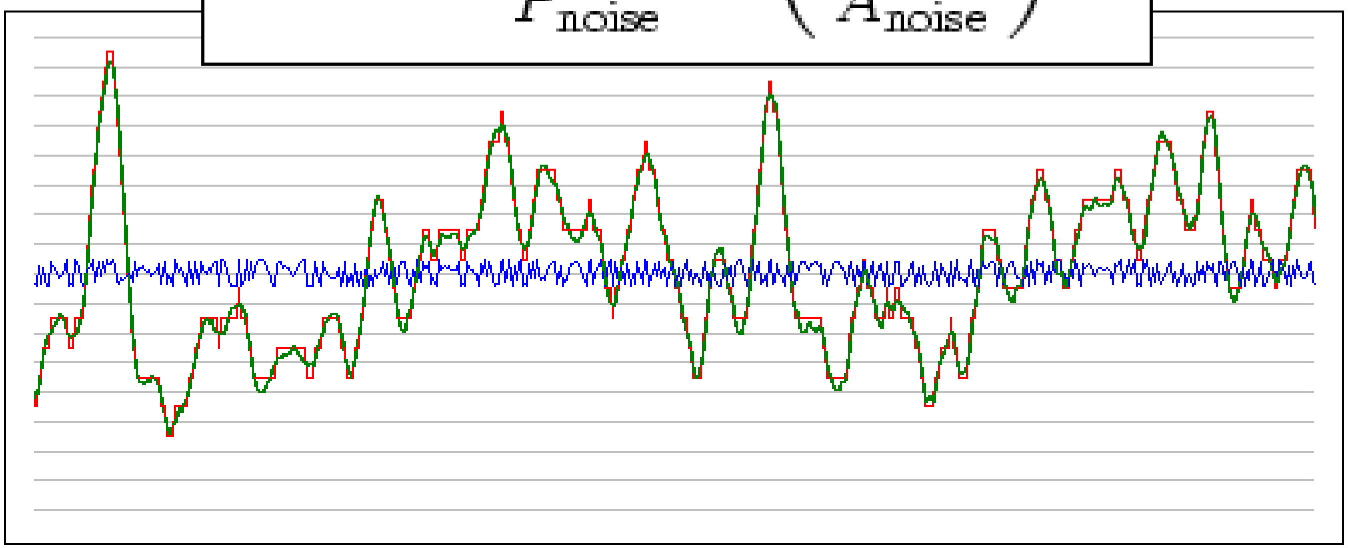




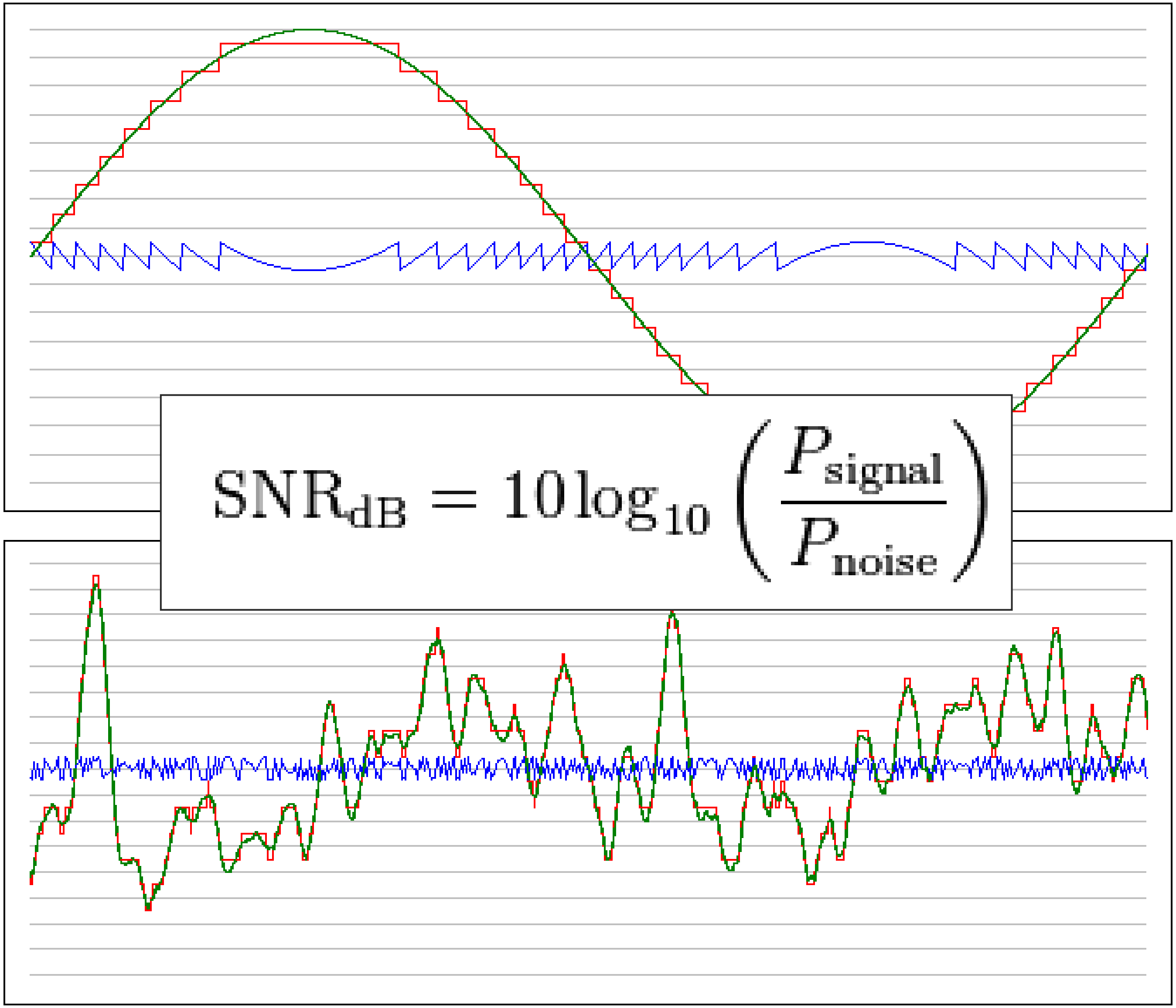
A/D převod: kvantizační šum



$$\mathrm{SNR} = \frac{P_{\mathrm{signal}}}{P_{\mathrm{noise}}} = \left(\frac{A_{\mathrm{signal}}}{A_{\mathrm{noise}}}\right)^2$$



A/D převod: kvantizační šum



$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{P_{\mathrm{signal}}}{P_{\mathrm{noise}}}\right)$$

1. cvičení

1. Vyjádřete poměr signálu ke kvantizačnímu šumu v decibelech jako funkci počtu bitů A/D převodníku.
2. Seznamka s Matlabem.
3. Vyzkoušejte vliv kvantizačního šumu na zvukový signál.

Systémy

Opakování: signály

- Definice signálu a jeho matematické vyjádření
- Klasifikace signálů – podle čeho dělíme a na co je dělíme
- A/D převod – z čeho se skládá
- Vzorkovací věta a aliasing
- Kvantování a kvantizační šum

Systémy: definice

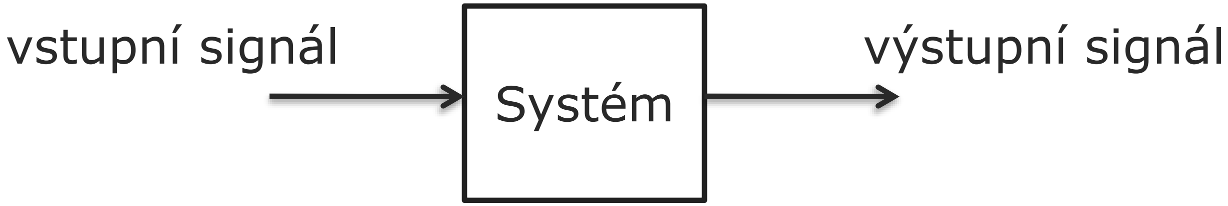
?

Systémy: definice

Systém je množinou prvků,
které jsou spolu ve vzájemných vztazích
a které tvoří určitý celek.

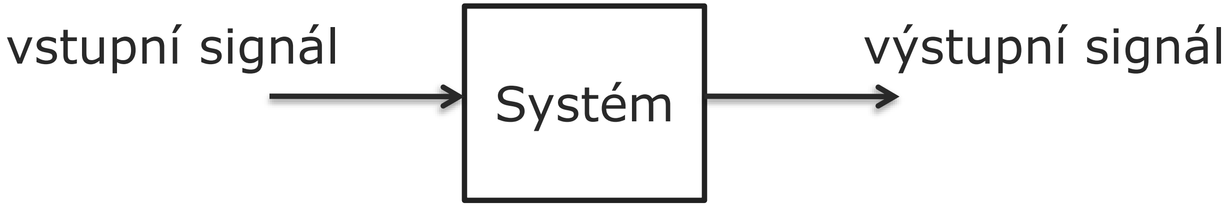
Systémy: definice

Systém je množinou prvků,
které jsou spolu ve vzájemných vztazích
a které tvoří určitý celek.



Systémy: definice

**Systém je množinou prvků,
které jsou spolu ve vzájemných vztazích
a které tvoří určitý celek.**

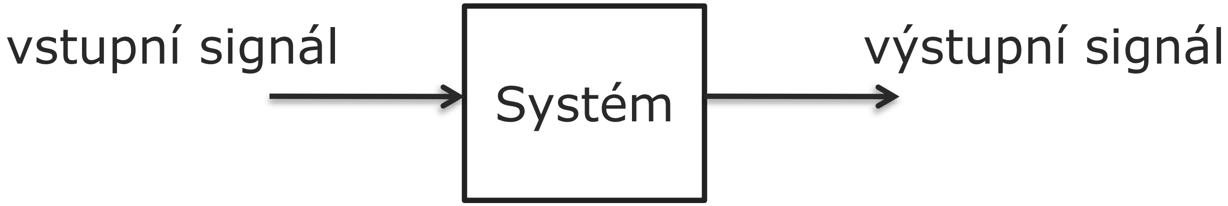


**Za systém považujeme jakoukoli sadu procesů,
které ovlivňují povahu signálu.**

Systémy: definice

VAZBY

Systém je množinou prvků,
které jsou spolu ve vzájemných vztazích
a které tvoří určitý celek.

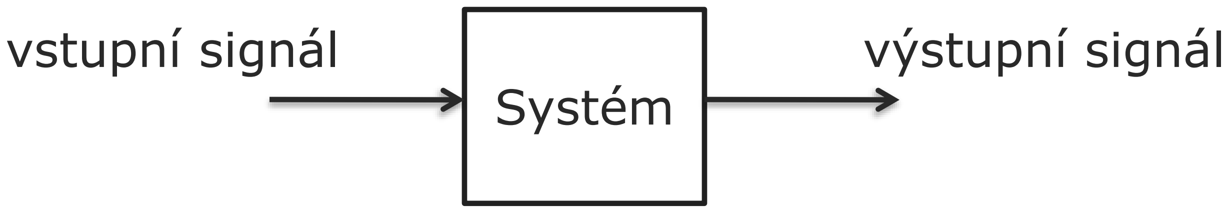


Za systém považujeme jakoukoli sadu procesů,
které ovlivňují povahu signálu.

Systémy: definice

VAZBY

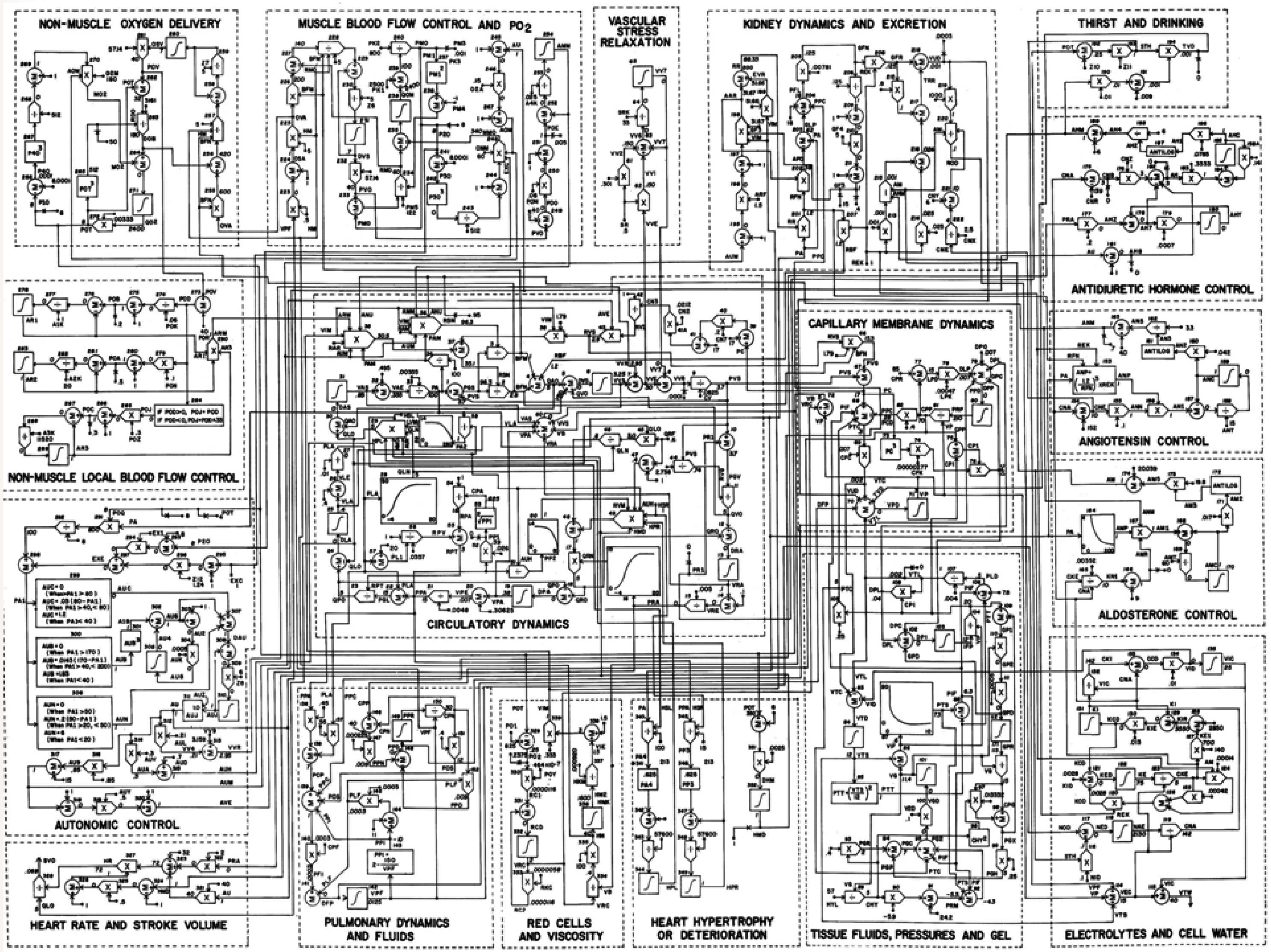
**Systém je množinou prvků,
které jsou spolu ve vzájemných vztazích
a které tvoří určitý celek.**



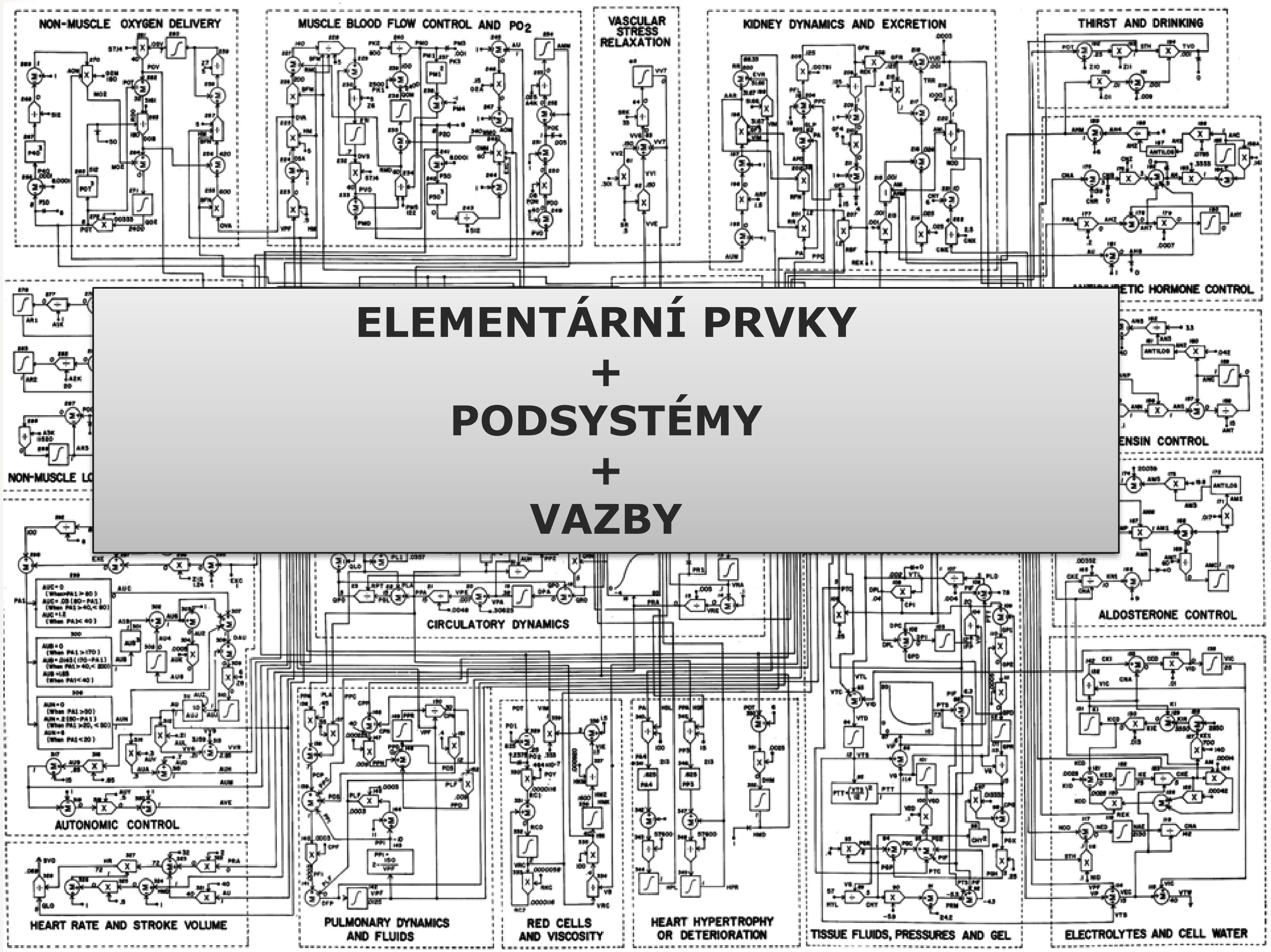
**Za systém považujeme jakoukoli sadu procesů,
které ovlivňují povahu signálu.**

PRVKY+VAZBY = STRUKTURA SYSTÉMU

Struktura systému



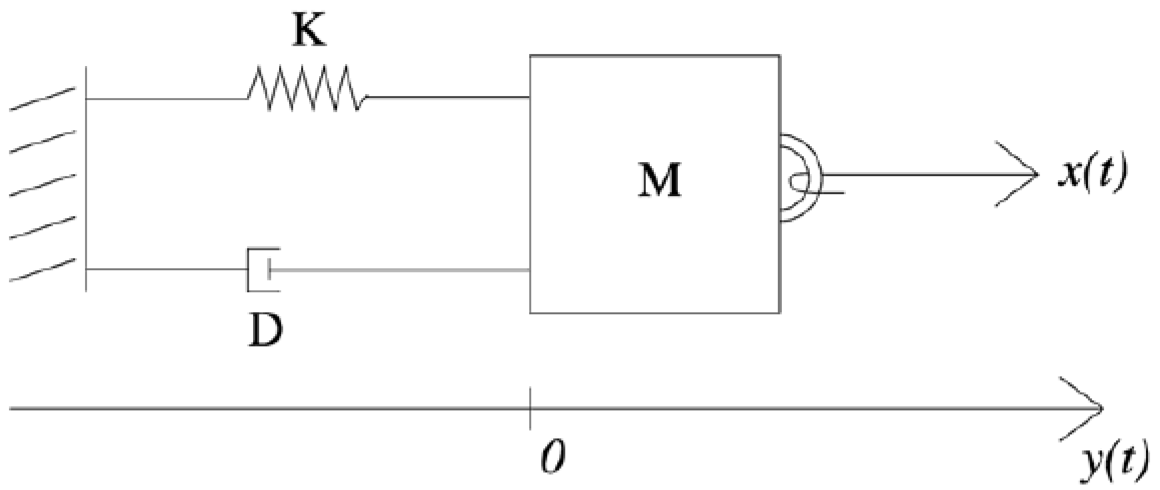
Struktura systému



ELEMENTÁRNÍ PRVKY
+
PODSYSTÉMY
+
VAZBY

Příklady systémů

Mechanický systém



$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t) - Ky(t) - D\frac{dy(t)}{dt}$$

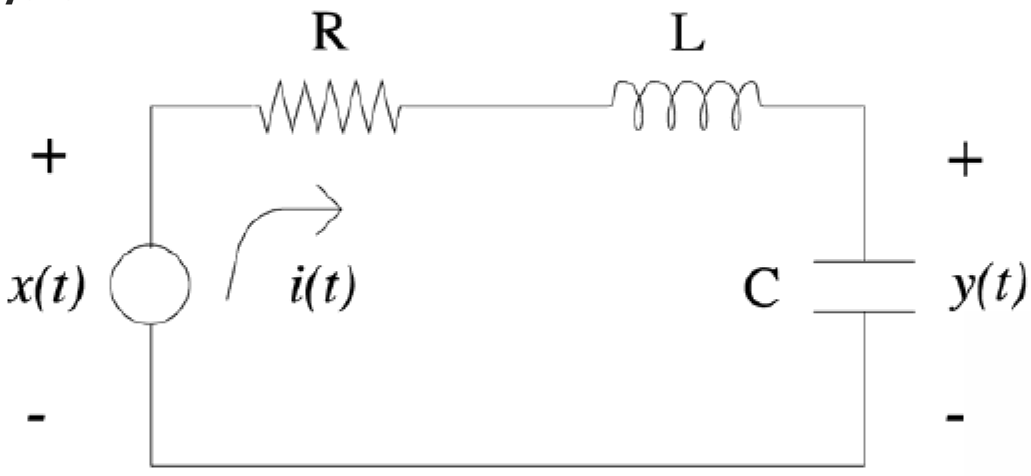
$$\Downarrow$$

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + D\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

$x(t)$	aplikována síla
$y(t)$	vychýlení
K	pružnost (konst.)
D	tlumivost (konst.)
M	hmotnost (konst.)

Příklady systémů

Elektrický systém



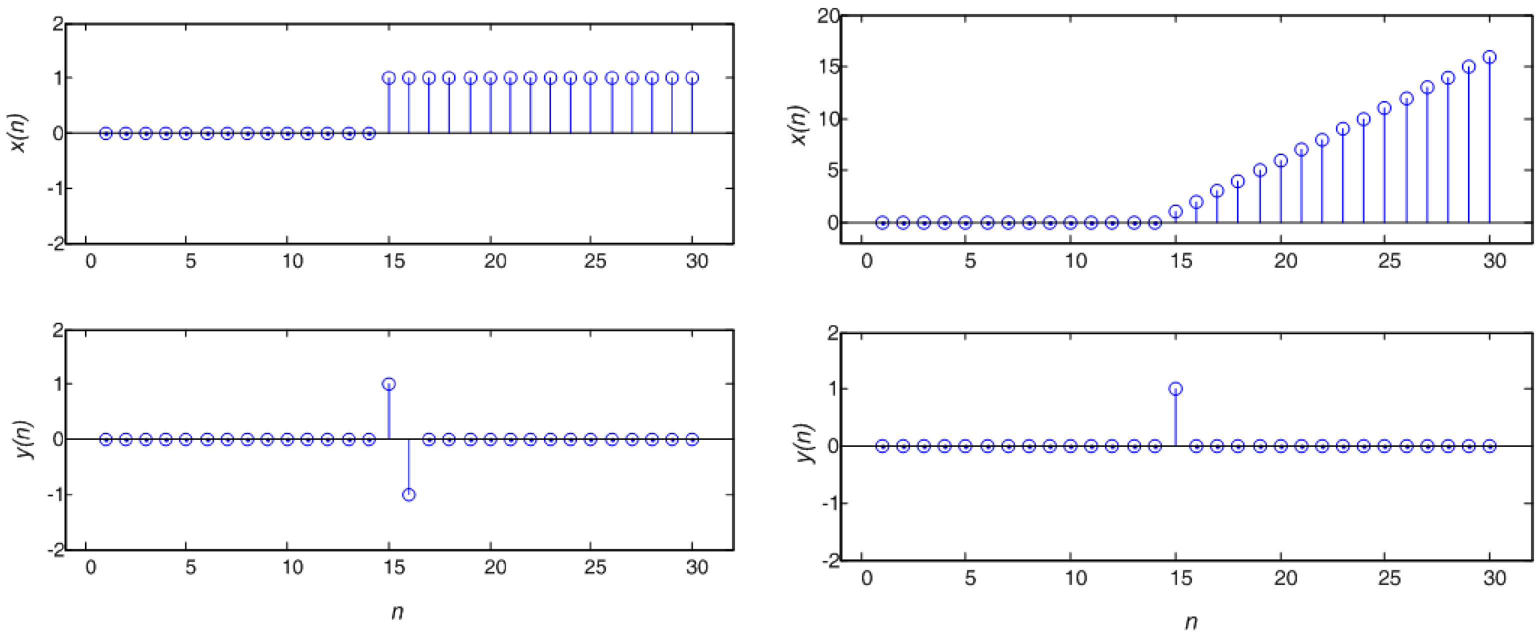
$$R\ i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$
$$i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$
$$\Downarrow$$
$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$x(t)$	napětí zdroje
$y(t)$	napětí na kapacitoru
R	odpor (konst.)
L	indukce (konst.)
C	kapacita (konst.)

Příklady systémů

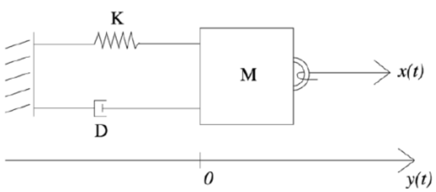
Hranový detektor

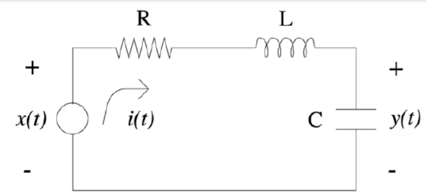
$$\begin{aligned} y[n] &= x[n+1] - 2x[n] + x[n-1] \\ &= \{x[n+1] - x[n]\} - \{x[n] - x[n-1]\} \\ &= \text{„}\textit{\textbf{druhá diference}}\text{“} \end{aligned}$$



Poučení z příkladů

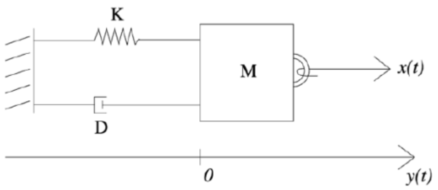
Fyzikálně velmi rozdílné systémy mohou být modelovány matematicky velmi podobně.

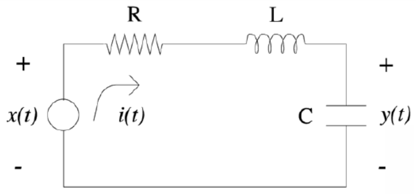




Poučení z příkladů

Fyzikálně velmi rozdílné systémy mohou být modelovány matematicky velmi podobně.

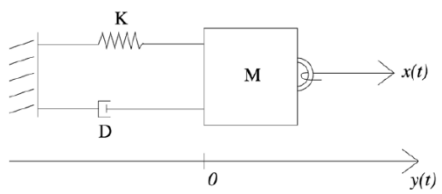


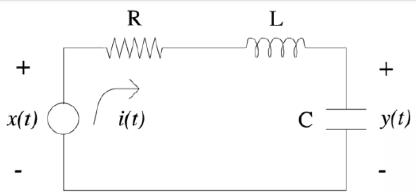


Mnoho (ne všechny) systémy popisujeme diferenciálními nebo diferenčními rovnicemi.

Poučení z příkladů

Fyzikálně velmi rozdílné systémy mohou být modelovány matematicky velmi podobně.



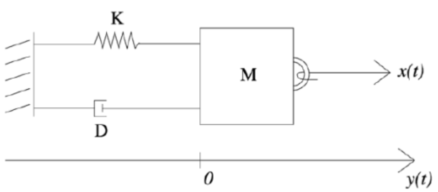


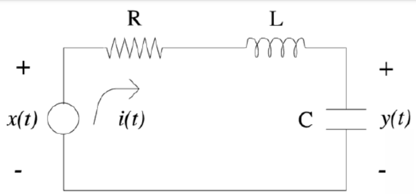
Mnoho (ne všechny) systémy popisujeme diferenciálními nebo diferenčními rovnicemi.

Abychom popsali kompletně „vstupně-výstupní“ chování systému, musíme znát kromě rovnic také ……………..

Poučení z příkladů

Fyzikálně velmi rozdílné systémy mohou být modelovány matematicky velmi podobně.



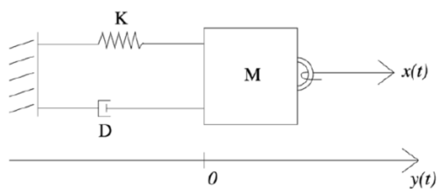


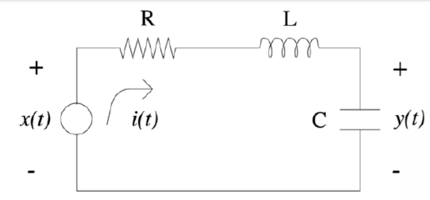
Mnoho (ne všechny) systémy popisujeme diferenciálními nebo diferenčními rovnicemi.

Abychom popsali kompletně „vstupně-výstupní" chování systému, musíme znát kromě rovnic také okrajové (počáteční) podmínky.

Poučení z příkladů

Fyzikálně velmi rozdílné systémy mohou být modelovány matematicky velmi podobně.



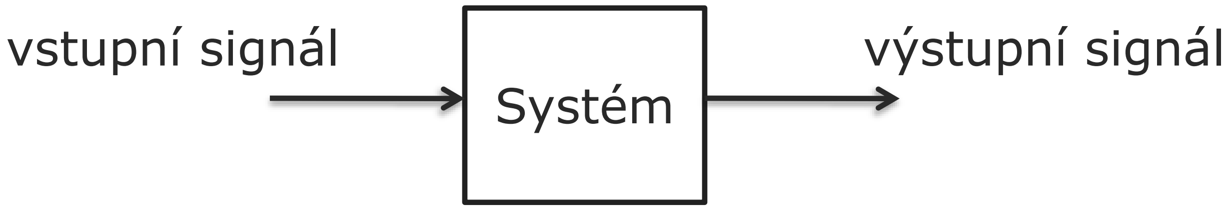


Mnoho (ne všechny) systémy popisujeme diferenciálními nebo diferenčními rovnicemi.

Abychom popsali kompletně „vstupně-výstupní“ chování systému, musíme znát kromě rovnic také okrajové (počáteční) podmínky.

Čas bývá nezávislou proměnnou sledovaných systémů, ovšem zdaleka ne ve všech případech.

Vlastnosti systémů



- *kauzální - nekauzální*
- *časově invariantní - časově proměnné*
- *lineární - nelineární*

Vlastnosti systémů: kauzalita

Systém je kauzální, pokud jeho výstup závisí pouze
na minulých a současných vstupních hodnotách.

- Všechny fyzikální systémy v reálném čase jsou kauzální, protože …………………… .

Vlastnosti systémů: kauzalita

Systém je kauzální, pokud jeho výstup závisí pouze
na minulých a současných vstupních hodnotách.

- Všechny fyzikální systémy v reálném čase jsou kauzální, protože „čas běží pouze dopředu“.

Vlastnosti systémů: kauzalita

Systém je kauzální, pokud jeho výstup závisí pouze
na minulých a současných vstupních hodnotách.

- Všechny fyzikální systémy v reálném čase jsou kauzální, protože „čas běží pouze dopředu“.

- Kauzalita se netýká systémů s prostorově závislými proměnnými.

Vlastnosti systémů: kauzalita

Systém je kauzální, pokud jeho výstup závisí pouze na minulých a současných vstupních hodnotách.

- Všechny fyzikální systémy v reálném čase jsou kauzální, protože „čas běží pouze dopředu“.
- Kauzalita se netýká systémů s prostorově závislými proměnnými.
- Kauzalita se netýká systémů zpracovávající nahrané signály.

Vlastnosti systémů: kauzalita

Systém je kauzální, pokud jeho výstup závisí pouze na minulých a současných vstupních hodnotách.

- Všechny fyzikální systémy v reálném čase jsou kauzální, protože „čas běží pouze dopředu“.
- Kauzalita se netýká systémů s prostorově závislými proměnnými.
- Kauzalita se netýká systémů zpracovávající nahrané signály.
- Pozn.: derivace signálu v čase *t* je přirozeně nekauzálním výpočtem.

Vlastnosti systémů: kauzalita

kauzální x nekauzální

$$y(t) = x^2(t-1)$$ ....?

$$y(t) = x(t+1)$$ ....?

$$y[n] = x[-n]$$ ....?

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-1]$$ ....?

Vlastnosti systémů: kauzalita

kauzální x nekauzální

$$y(t) = x^2(t-1)$$

kauzální

$$y(t) = x(t+1)$$

nekauzální

$$y[n] = x[-n]$$

nekauzální

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-1]$$

kauzální

Vlastnosti systémů: časová invariantnost

Neformálně:
Systém je časově invariantní (time invariant - TI),
pokud jeho chování nezávisí na tom, „kolik je zrovna hodin“.

Matematicky:
Systém $x[n]$ -> $y[n]$ je časově invariantní,
když pro jakýkoli vstupní signál $x[n]$ a jakékoli časové posunutí n_0 platí:

$$x[n] \rightarrow y[n]$$

$$x[n - n_0] \rightarrow y[n - n_0] \, .$$

Vlastnosti systémů: časová invariantnost

Neformálně:
Systém je časově invariantní (time invariant - TI),
pokud jeho chování nezávisí na tom, „kolik je zrovna hodin“.

Matematicky:
Systém $x[n]$ -> $y[n]$ je časově invariantní,
když pro jakýkoli vstupní signál $x[n]$ a jakékoli časové posunutí n_0 platí:

$$x[n] \rightarrow y[n]$$
$$x[n - n_0] \rightarrow y[n - n_0] \,.$$

Pozn. 1: …o fyziologických/biologických systémech, adaptibilitě a proměnlivých vlastnostech těchto systémů v čase.

Pozn. 2: …o stacionaritě a nestacionaritě signálů.

Vlastnosti systémů: časová invariantnost

časově invariantní x **časově proměnné systémy :**

$$y(t) = x^2(t+1)$$ ....?

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-1]$$ ....?

Vlastnosti systémů: časová invariantnost

časově invariantní x časově proměnné systémy :

$$y(t) = x^2(t+1)$$

časově invariantní

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-1]$$

časově proměnný

Vlastnosti systémů: časová invariantnost

Je-li na vstupu časově invariantního systému <u>periodický signál</u>,
pak na jeho výstupu je ………………………………………………..…………………..

$$x[n] \rightarrow y[n]$$

$$x[n - n_0] \rightarrow y[n - n_0]\ .$$

Vlastnosti systémů: časová invariantnost

Je-li na vstupu časově invariantního systému periodický signál, pak na jeho výstupu je periodický signál se stejnou periodou.

(Za předpokladu, že systém neprovádí expanzi ani kompresi signálu v časové ose)

$$x[n] \rightarrow y[n]$$

$$x[n - n_0] \rightarrow y[n - n_0] \; .$$

Vlastnosti systémů: linearita

Lineární systém je takový systém,
v němž lze uplatnit princip superpozice.

?

Vlastnosti systémů: linearita

Lineární systém je takový systém,
v němž lze uplatnit princip superpozice.

$$x_k[n] \quad \rightarrow \quad y_k[n]$$

$$\sum_k a_k x_k[n] \quad \rightarrow \quad \sum_k a_k y_k[n]$$

vsuvka: princip superpozice

Vlastnosti systémů

lineární x **nelineární systémy**
časově invariantní x **časově proměnné systémy**
kauzální x **nekauzální systémy :**

$$y[n] = x^2[n]$$ ....?

$$y[n] = n.x[2n]$$ ....?

Vlastnosti systémů

lineární x **nelineární systémy**
časově invariantní x **časově proměnné systémy**
kauzální x **nekauzální systémy :**

$$y[n] = x^2[n]$$

Nelinární, časově invariantní, kauzální

$$y[n] = n.x[2n]$$

Lineární, časově proměnný, nekauzální

Otázky ?

jakub.jamarik@med.muni.cz