Lineární a adaptivní zpracování dat

2. SYSTÉMY a jejich popis v časové doméně a frekvenční doméně

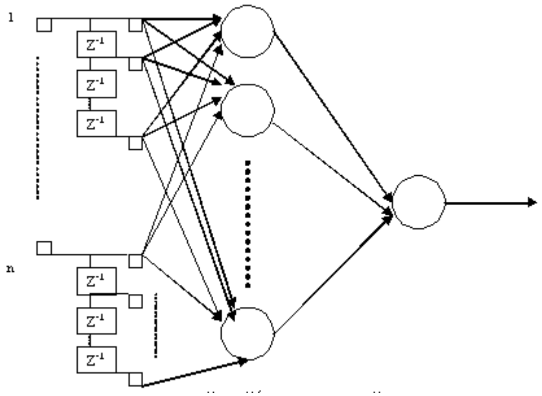
Daniel Schwarz
Jakub Jamárik

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Investice do rozvoje vzdělávání

Osnova

- Opakování: signály a systémy
- Vlastnosti systémů
- Systémy a jejich popis v časové doméně:
  - Konvoluce
  - Impulsní charakteristika
- Systémy a jejich popis ve frekvenční doméně:
  - Fourierovy řady
  - Odezva systému na harmonický signál, frekvenční charakteristika
- Příklady:
  - systém pro hledání bodů zlomu v signálu
  - výpočet frekvenční charakteristiky systému z jeho diferenční rovnice



Opakování: signály

- Definice signálu a jeho matematické vyjádření
- Klasifikace signálů – podle čeho dělíme a na co je dělíme
- A/D převod – z čeho se skládá
- Vzorkovací věta a aliasing
- Kvantování a kvantizační šum
- Systém – definice, struktura systému
- Systém – tři základní vlastnosti

Vlastnosti systémů

lineární x **nelineární systémy**
časově invariantní x **časově proměnné systémy**
kauzální x **nekauzální systémy :**

$$y[n] = x^2[n]$$ ....?

$$y[n] = n.x[2n]$$ ....?

Vlastnosti systémů

lineární x **nelineární systémy**
časově invariantní x **časově proměnné systémy**
kauzální x **nekauzální systémy :**

$$y[n] = x^2[n]$$ Nelinární, časově invariantní, kauzální

$$y[n] = n.x[2n]$$ Lineární, časově proměnný, nekauzální

LTI systémy

Lineární časově invariantní systémy (LTI):

- disponují elegantní matematické vztahy mezi jeho vstupy a výstupy.
  - lze určit výstupní odezvu systému na jakýkoli vstup
  - lze také určit vstup systému při pozorování jeho výstupu

Selský rozum:

„Znám-li odezvu LTI systému na velmi krátký vstupní signál, mohu pomocí těchto velmi krátkých signálů seskládat libovolný vstupní signál a odezvu LTI systému na něj pak seskládat ze známé odezvy na velmi krátký signál.“

LTI systémy

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \xrightarrow{\textit{lineární systém}} y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$$

Hledáme „základní“, tj. bázové signály tak, aby:

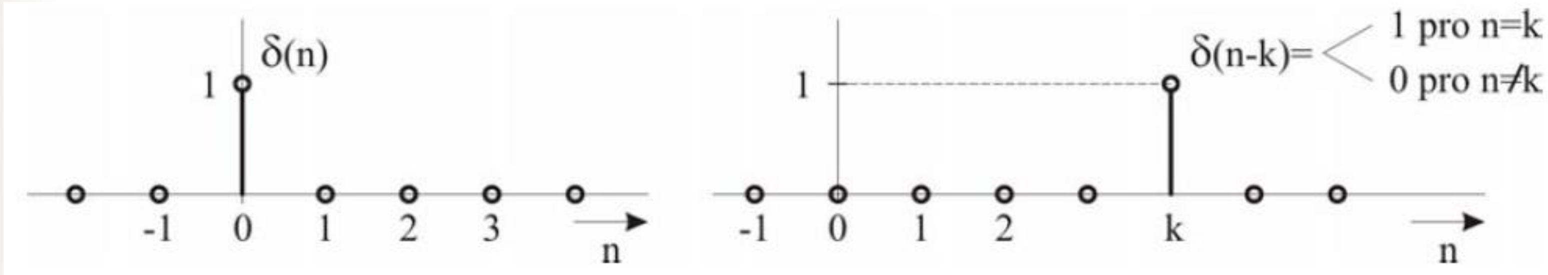
- bylo možné reprezentovat libovolné signály jako lineární kombinaci těchto bázových signálů
- odezva LTI systémů na tyto bázové signály byla jednoduchá a zároveň aby umožňovala dostatečně hluboký vhled

Jednotkový diskrétní impulz

?

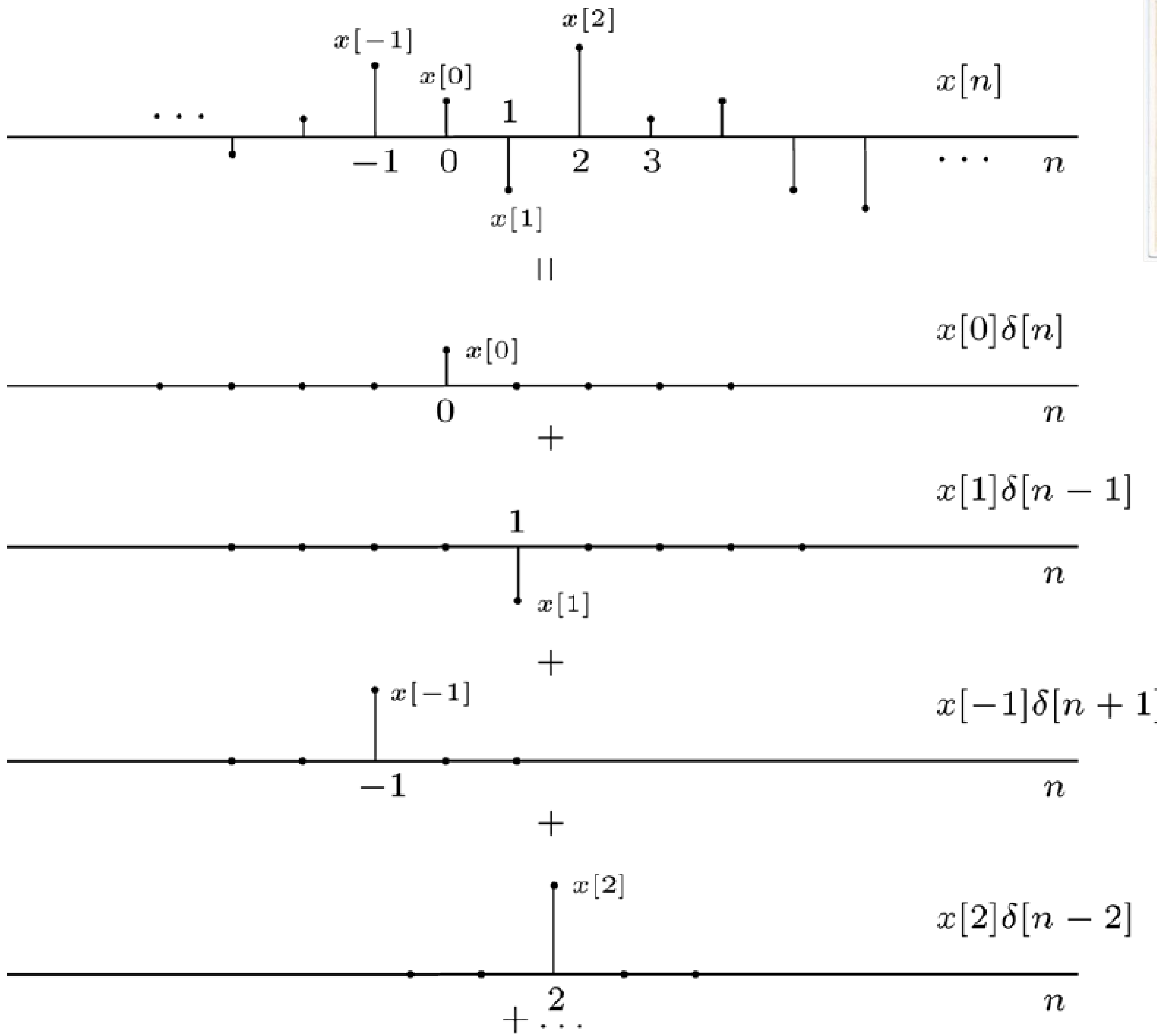
Jednotkový diskrétní impulz

Jednotkový diskrétní impulz je elementární posloupnost ve tvaru osamělého vzorku jednotkové velikosti



Pozn.: Neplést s Diracovým impulsem !

Reprezentace DT signálů jednotkovými impulsy



Reprezentace DT signálů jednotkovými impulsy

$$x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

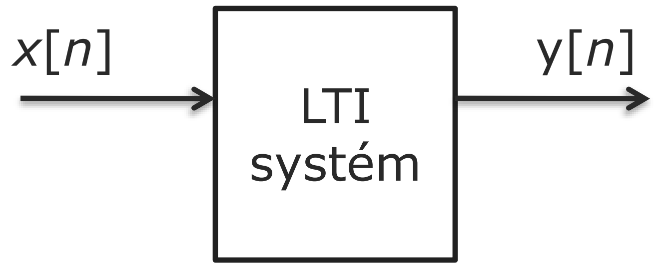
$$\Downarrow$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

Pozn.: Filtrační vlastnost Diracovy distribuce:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\,t = f(\tau)\,.$$

Odezva systému na jednotkový impuls

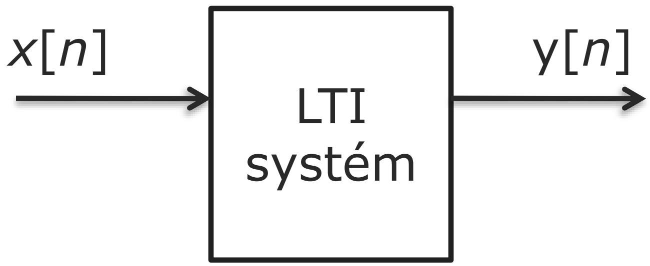


Lineární systém:

$h_k[n]$ … je odezvou systému na: $\delta[n - k]$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

Odezva systému na jednotkový impuls

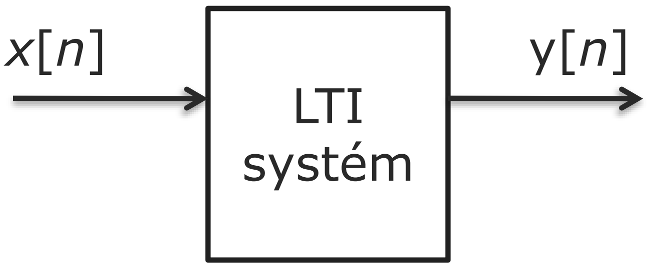


Lineární a časově invariantní systém s odezvou $h[n]$ na jednotkový impuls:

$$\delta[n] \rightarrow h[n] \qquad \delta[n-k] \rightarrow h[n-k]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Odezva systému na jednotkový impuls

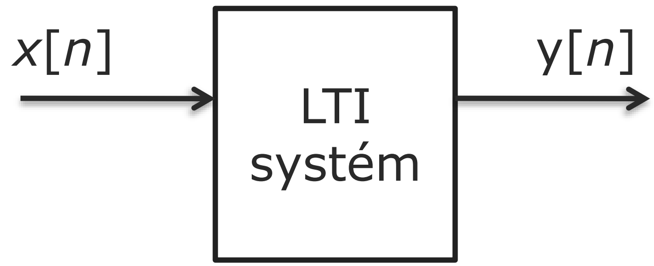


Lineární a časově invariantní systém s odezvou $h[n]$ na jednotkový impuls:

$$\delta[n] \rightarrow h[n] \qquad \delta[n-k] \rightarrow h[n-k]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}_{\text{konvoluční suma}}$$

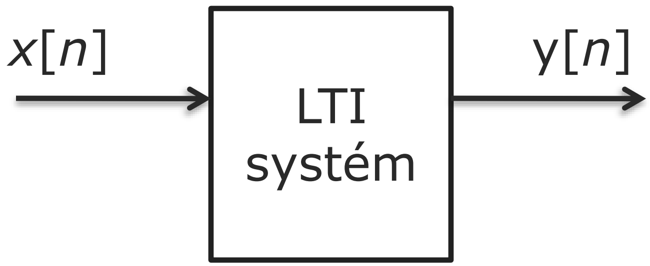
LTI systémy: konvoluce



$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

LTI systémy: konvoluce

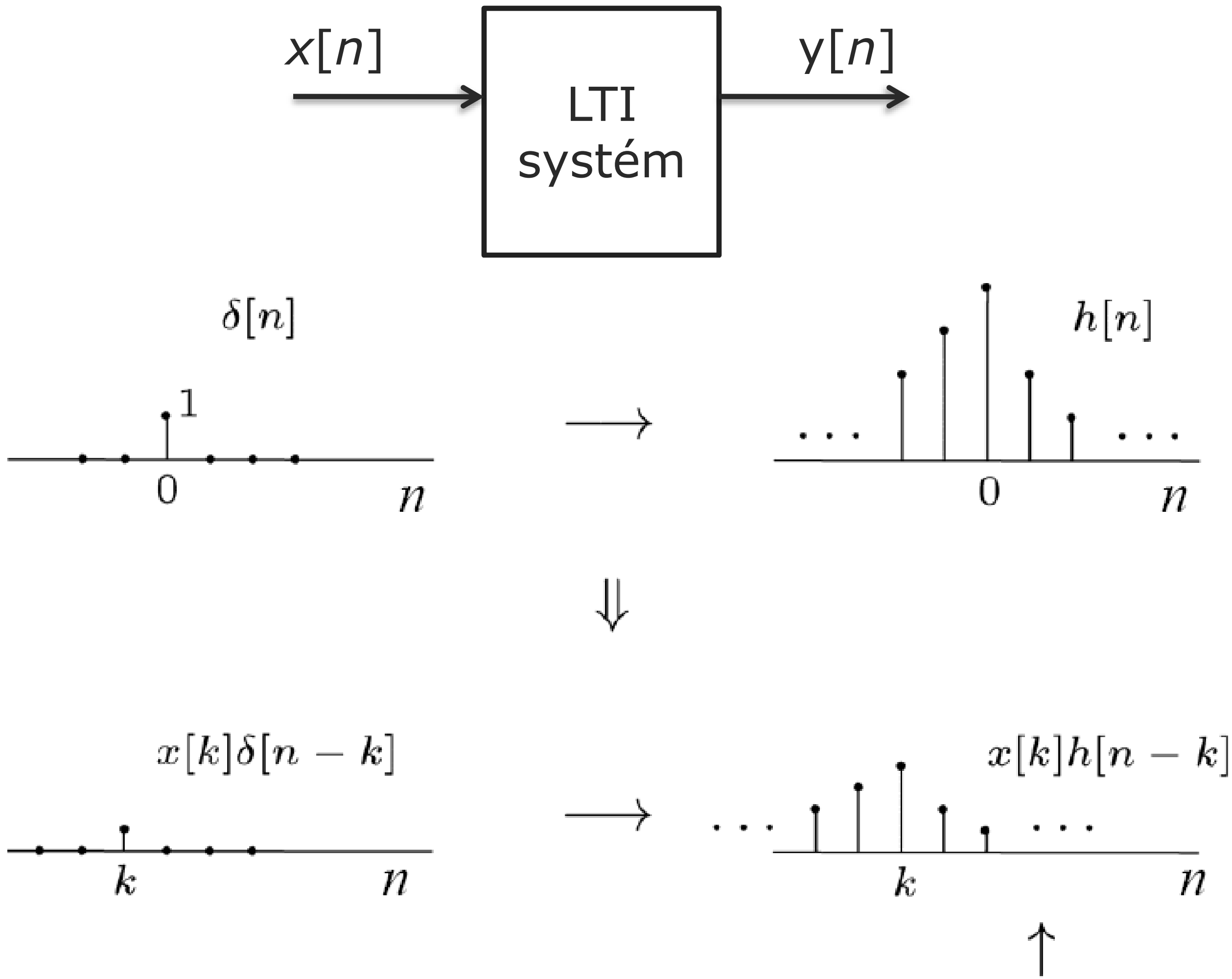


$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA SYSTÉMU

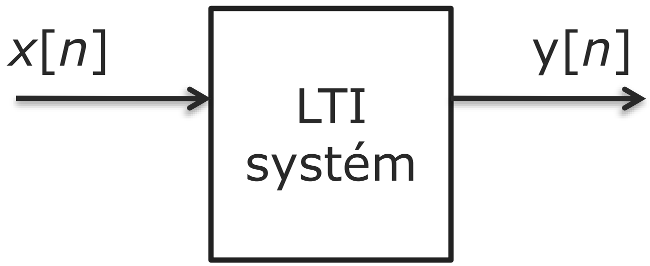
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

LTI systémy: konvoluce



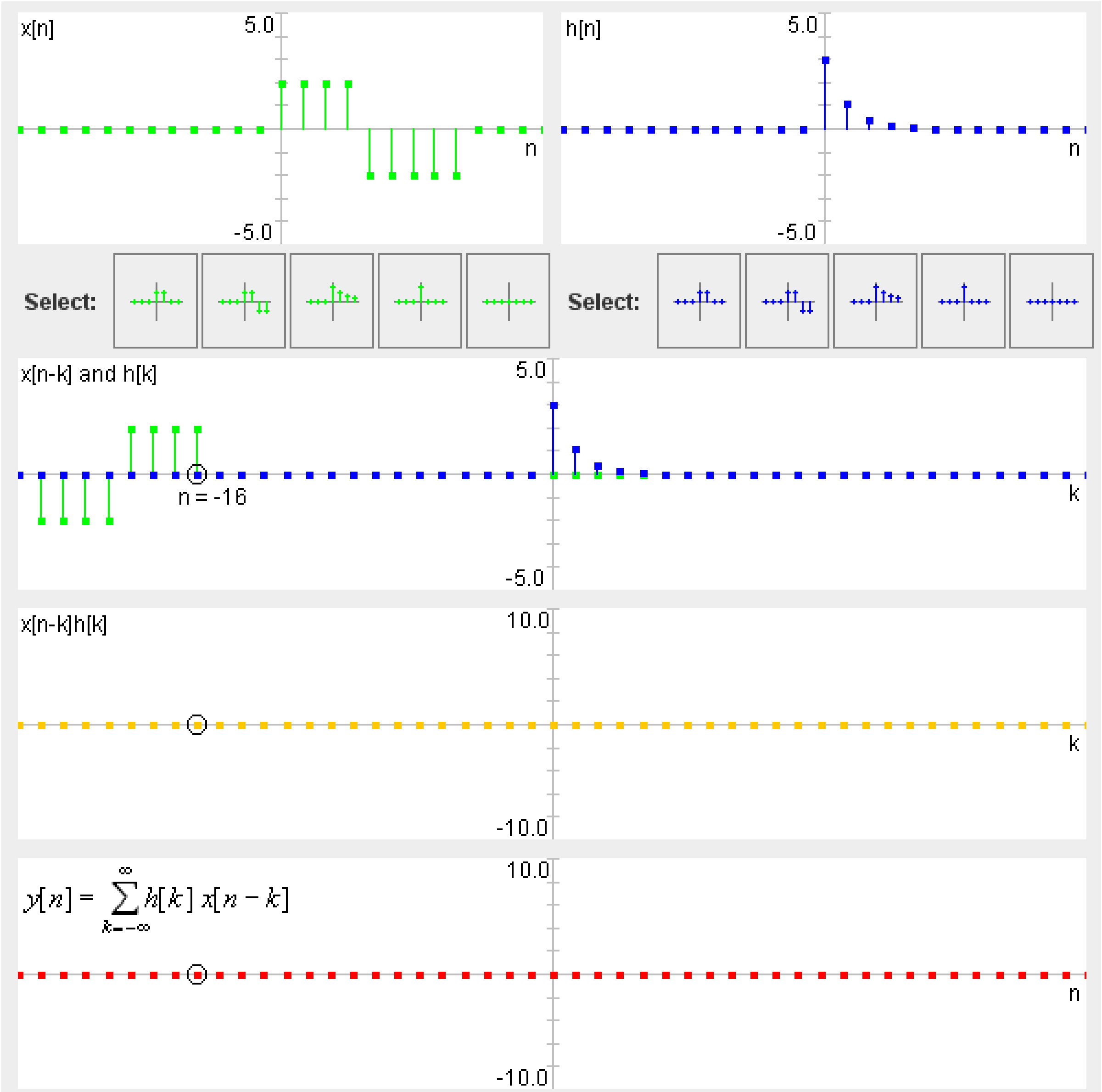
Sečti odezvy přes všechny k

LTI systémy: konvoluce

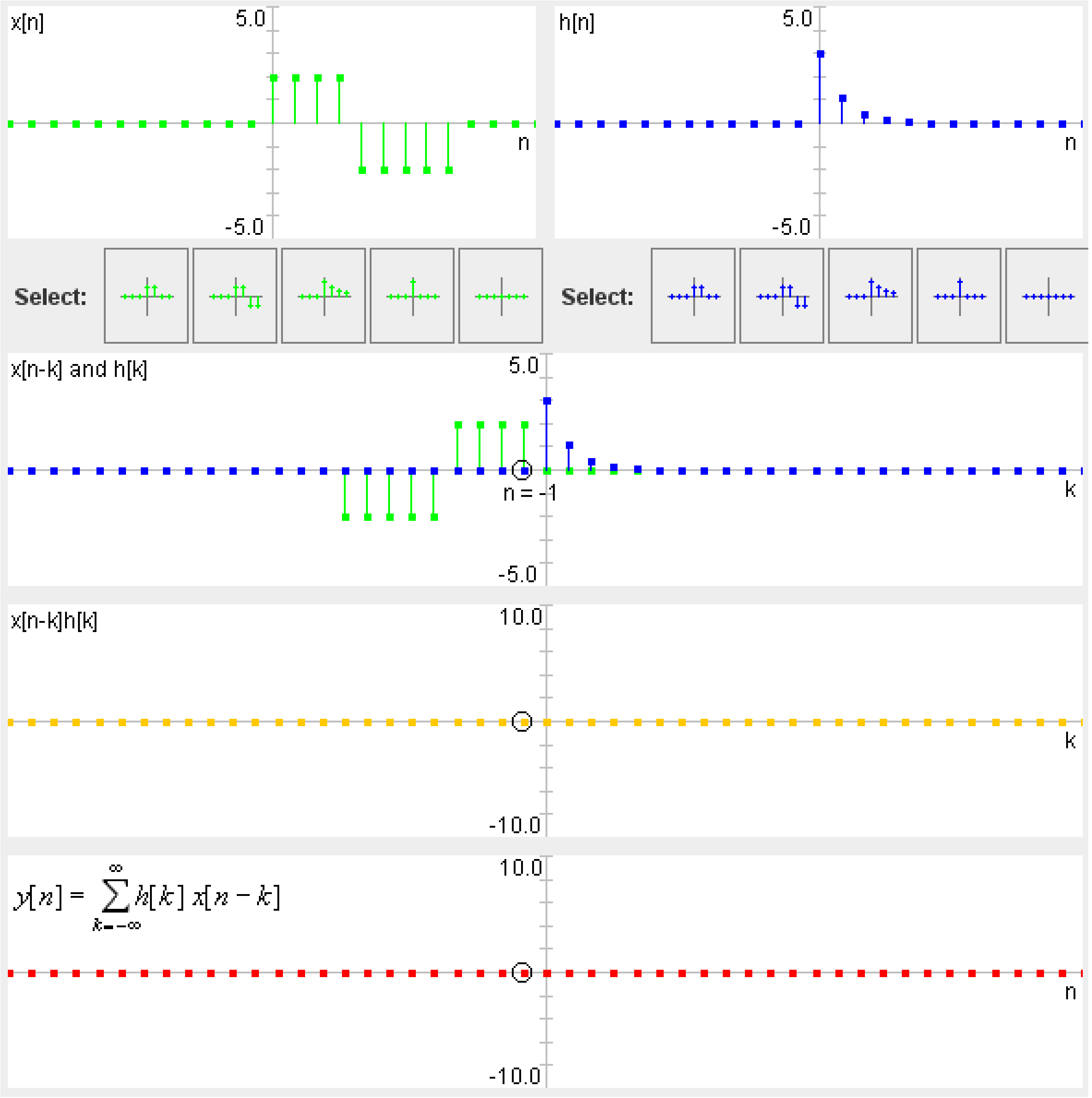


http://www.jhu.edu/~signals/discreteconv2/index.html

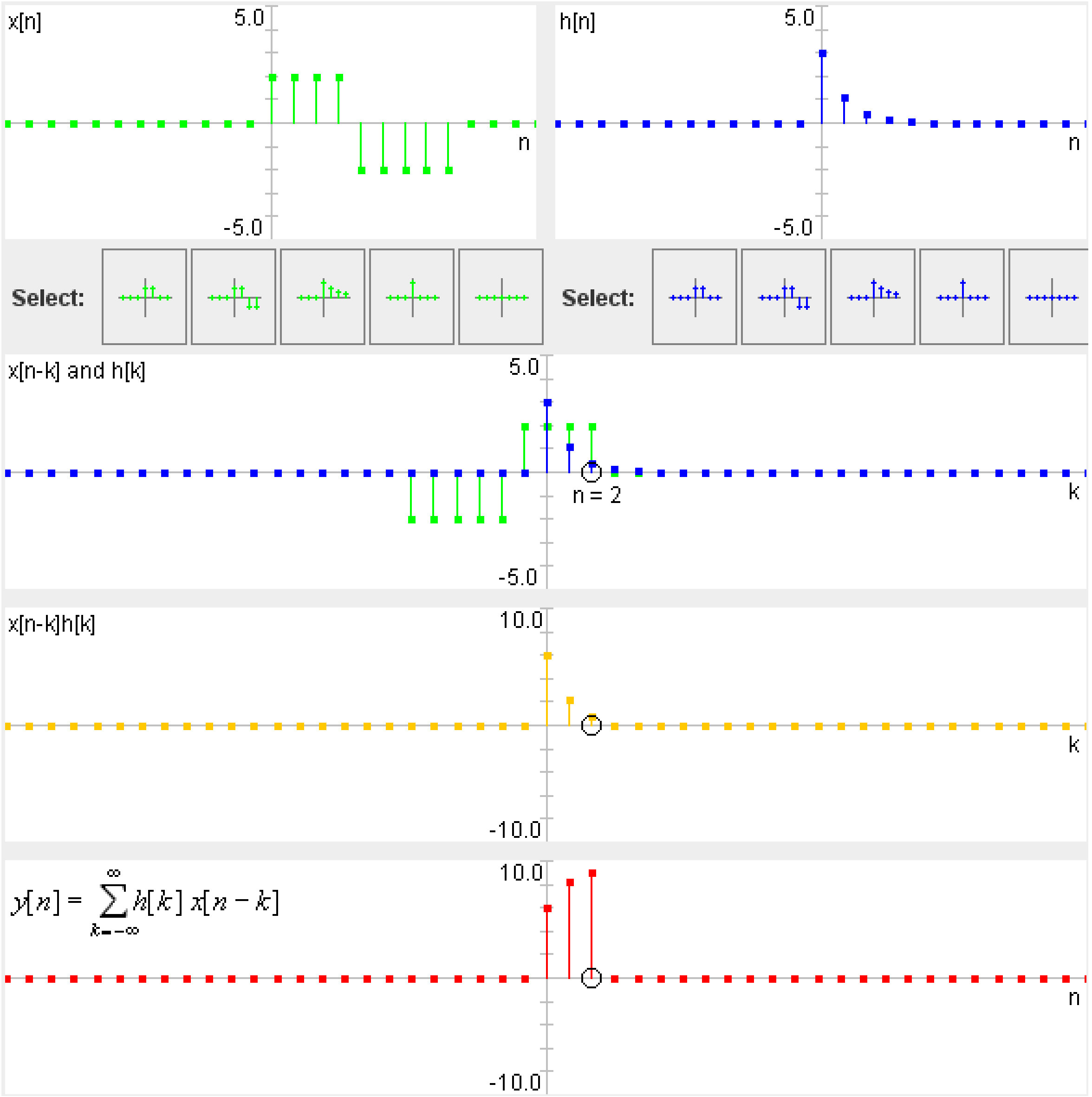
LTI systémy: konvoluce



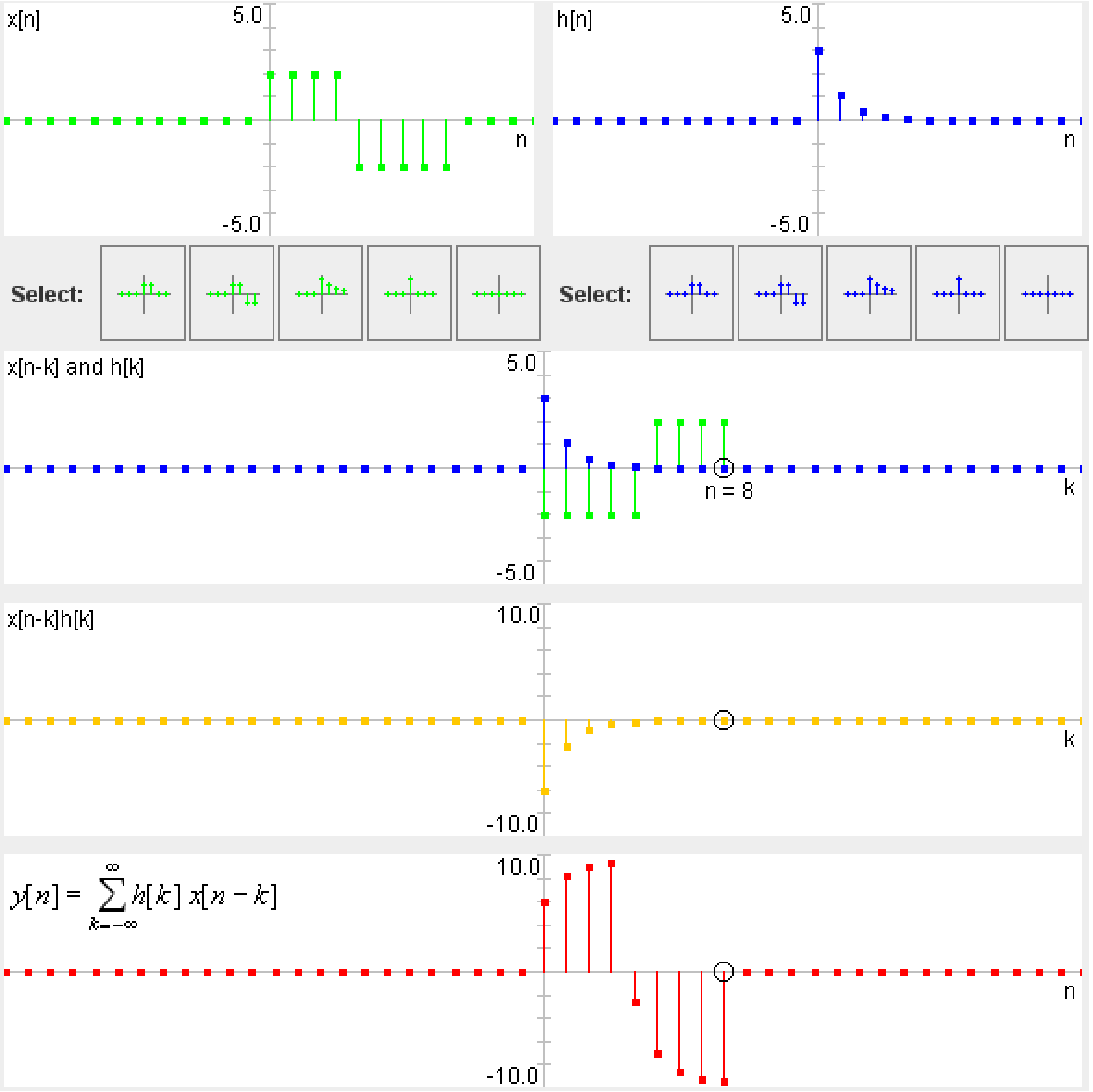
LTI systémy: konvoluce



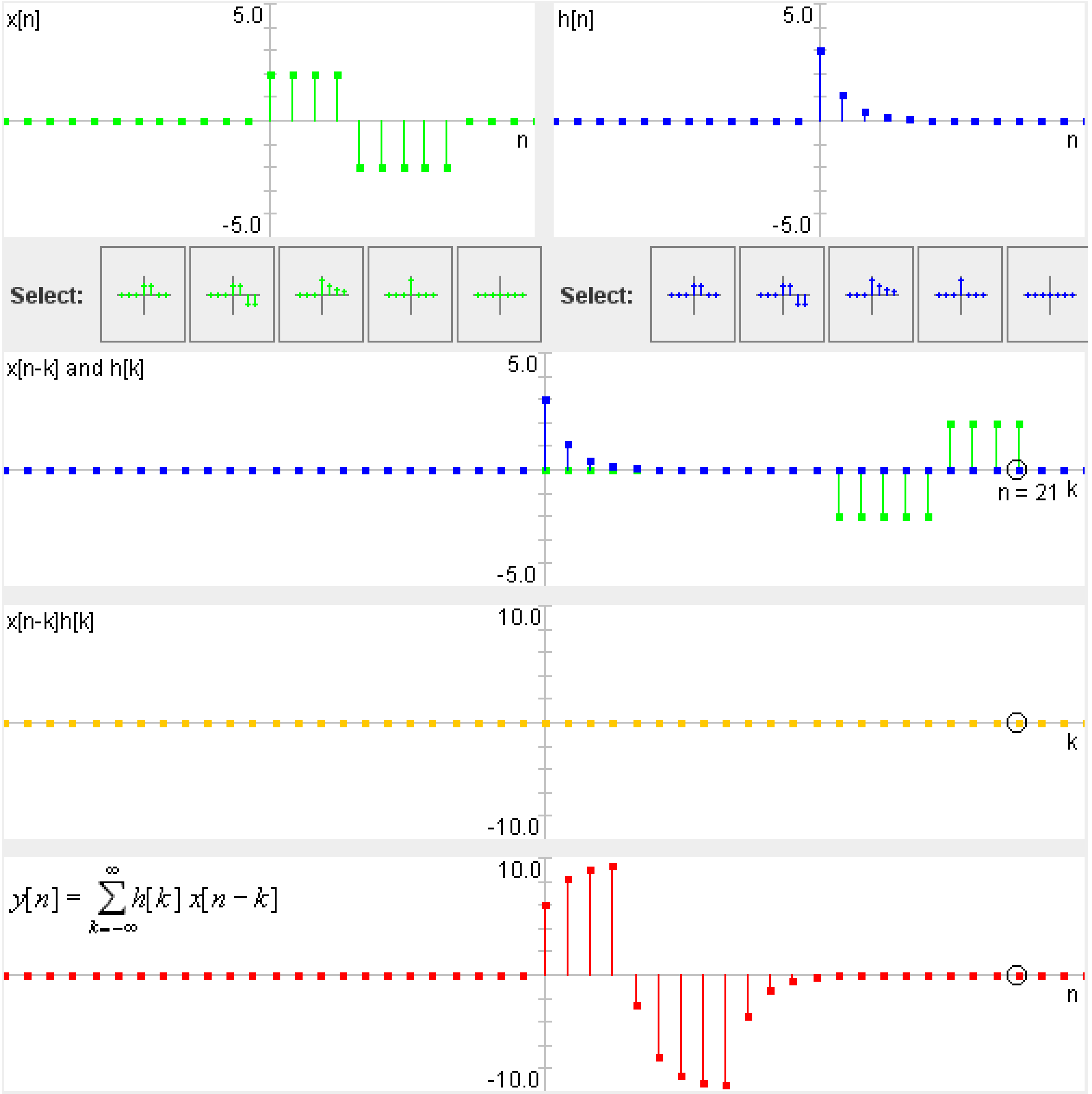
LTI systémy: konvoluce



LTI systémy: konvoluce



LTI systémy: konvoluce



LTI systémy: konvoluce

Stabilní systém – kritérium v časové oblasti

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) \right| < \infty$$

LTI systémy: konvoluce

Komutativní vlastnost konvoluce

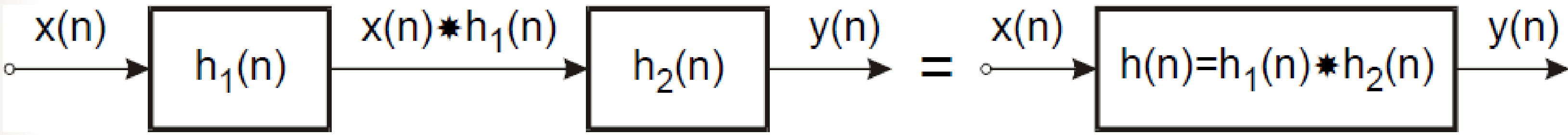
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\ \mathrm{h(n - k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\ \mathrm{x(n - k)} = h(n) * x(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)\ h(n-k) = \sum_{k=0}^{n} h(k)\ \mathrm{x}(n-k)$$

LTI systémy: konvoluce

Asociativní vlastnost konvoluce

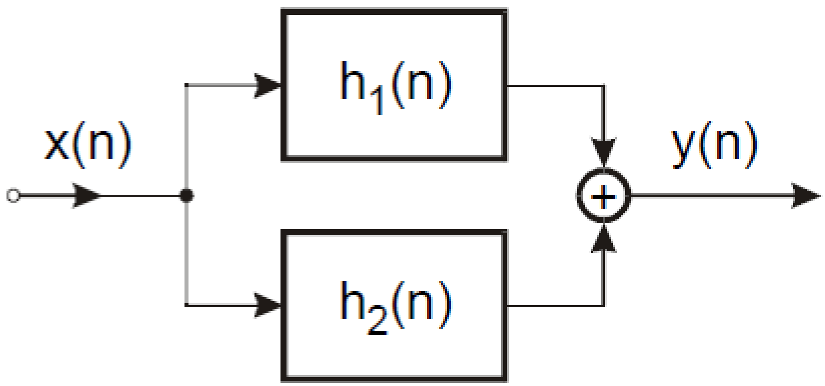
$$y(n) = \left[x(n) * h_1(n)\right] * h_2(n) = x(n) * \left[h_1(n) * h_2(n)\right] = x(n) * h(n)$$

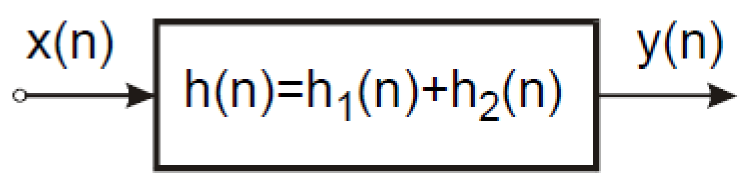


LTI systémy: konvoluce

Distributivní vlastnost konvoluce

$$y(n) = \left[x(n) * h_1 n)\right] + \left[x(n) * h_2 n)\right] = x(n) * \left[h_1(n) + h_2(n)\right]$$

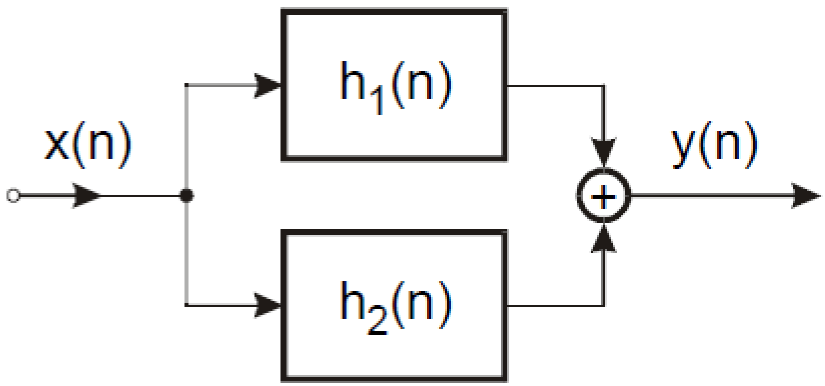




LTI systémy: konvoluce

Distributivní vlastnost konvoluce

$$y(n) = \left[x(n) * h_1 n)\right] + \left[x(n) * h_2 n)\right] = x(n) * \left[h_1(n) + h_2(n)\right]$$



Každý netriviální LTI systém může být rozložen na paralelní spojení jednodušších dílčích LTI systémů.

Průměrovací vlastnost konvoluce

x(n)	x(n-4)	x(n-3)	x(n-2)	x(n-1)	x(n)	x(n+1)	x(n+2)	x(n+3)
h(n)			$^1/_N$	$^1/_N$	$^1/_N$	$^1/_N$	$^1/_N$	
					y(n)			

$$y(n) = x(n) * h(n) = \frac{1}{N}\left[x(n-2) + x(n-1) + x(n) + x(n+1) + x(n+2)\right]$$

2. cvičení

1. Realizujte vlastní funkci pro výpočet konvoluce pomocí cyklu, násobení a sčítání. Porovnejte výsledky z Vaší implementace s výsledky z matlabovské funkce *conv().* Otestujte, zda je operátor konvoluce komutativní.

2. Realizujte systém představující hranový detektor pro detekce bodů zlomu v signálu. Hranový detektor představuje druhou diferenci.

3. Realizujte systém popsaný touto diferenční rovnicí:
   $$y[n] = (-0.2426x[n]+0.73152x[n-1]+6.0635x[n-2]+16.912x[n-3]+ \\ +26.536x[n-4]+26.536x[n-5]+16.912x[n-6]+6.0635x[n-7]+ \\ +0.73152x[n-8]+-0.2426x[n-9])\ /\ 100.$$

   a prozkoumejte jeho odezvu na předložený signál.

SYSTÉMY a jejich popis ve frekvenční oblasti

LTI systémy

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \xrightarrow{\textit{lineární systém}} y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$$

Hledáme „základní“, tj. bázové signály tak, aby:

- bylo možné reprezentovat libovolné signály jako lineární kombinaci těchto bázových signálů
- odezva LTI systémů na tyto bázové signály byla jednoduchá a zároveň aby umožňovala dostatečně hluboký vhled

LTI systémy

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \xrightarrow{\textit{lineární systém}} y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$$

Hledáme „základní“, tj. bázové signály tak, aby:

- bylo možné reprezentovat libovolné signály jako lineární kombinaci těchto bázových signálů
- odezva LTI systémů na tyto bázové signály byla jednoduchá a zároveň aby umožňovala dostatečně hluboký vhled

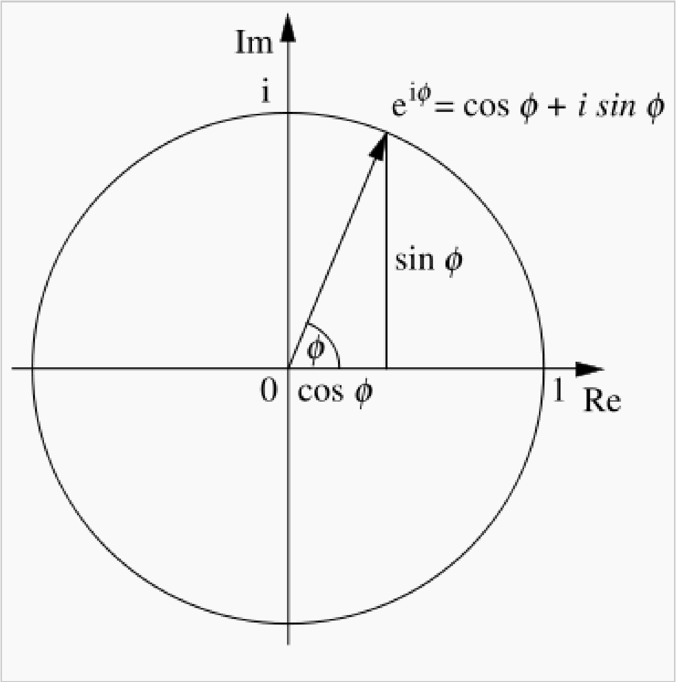
MINULE: jednotkové impulsy

NYNÍ: sinusové signály - komplexní exponenciály (harmonické časové řady)

Eulerovy vztahy

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$



Harmonická časová řada

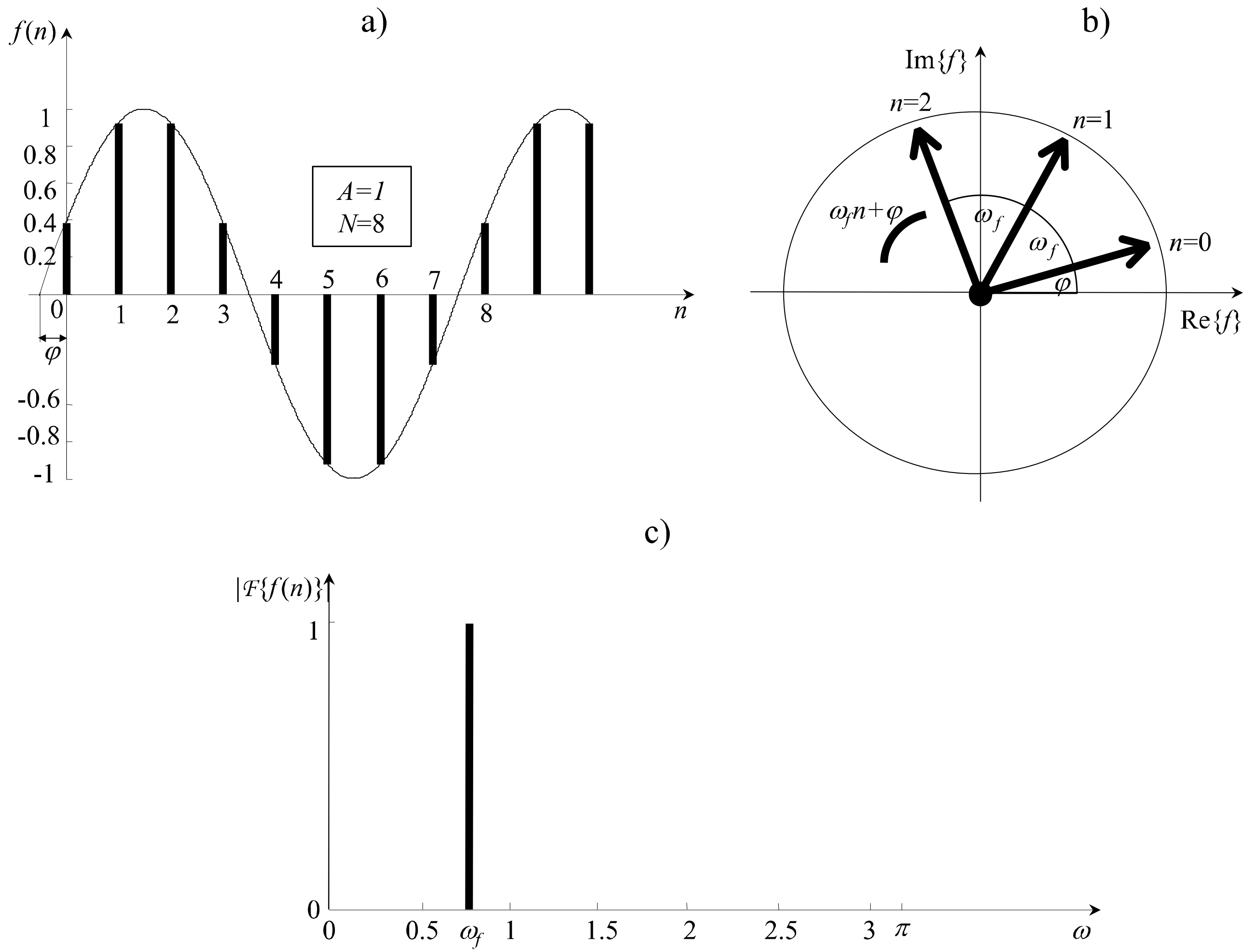
$$f(n) = A \cdot \sin(\omega_f n + \varphi),$$

$$f(n) = A \cdot e^{j(\omega_f n + \varphi)}.$$

Harmonická časová řada

$$f(n) = A \cdot \sin(\omega_f n + \varphi),$$

$$f(n) = A \cdot e^{j(\omega_f n + \varphi)}.$$



Fourierovy řady

?

Fourierovy řady

Fourierova řada slouží k vyjádření rozvoje funkce prostřednictvím harmonických složek vyjádřených goniometrickými funkcemi nebo komplexními exponenciálami.

Fourierovy řady

Fourierova řada slouží k vyjádření rozvoje funkce prostřednictvím harmonických složek vyjádřených goniometrickými funkcemi nebo komplexními exponenciálami.

Fourierovy řady slouží jako teoretický základ pro analýzu signálů a systémů ve frekvenční oblasti.

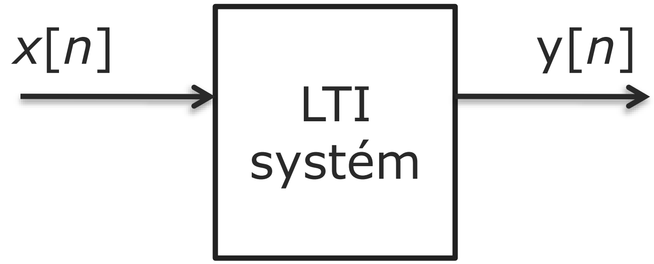
Fourierovy řady

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

FŘ diskrétní
posloupnosti
$x(n)$

ω_0 … základní úhlová frekvence $2\pi/N$
N … počet vzorků v jedné periodě
a_k … koeficienty FŘ

Fourierovy řady



$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad \rightarrow \quad y(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} H\left(e^{jk\omega_0}\right) a_k e^{jk\omega_0 n}$$

FŘ diskrétní
posloupnosti
$x(n)$

ω_0 … základní úhlová frekvence 2π/N
N … počet vzorků v jedné periodě
a_k … koeficienty FŘ

Fourierovy řady

Vlastnosti FŘ:

LINEARITA: $x(t) \leftrightarrow a_k, y(t) \leftrightarrow b_k \;\; \Rightarrow \alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$

KOMPLEXNÍ SDRUŽENÍ: $x(t)$ je reálná $\Rightarrow$ $a_{-k} = a_k^*$

$Re\{a_k\}$ je sudá, pak $Im\{a_k\}$ je ....

$|a_k|$ je sudá, pak $\angle a_k$ je ....

Fourierovy řady

Vlastnosti FŘ:

LINEARITA: $x(t) \leftrightarrow a_k, y(t) \leftrightarrow b_k \Rightarrow \alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$

KOMPLEXNÍ SDRUŽENÍ: $x(t)$ je reálná $\Rightarrow$ $a_{-k} = a_k^*$

$Re\{a_k\}$ je sudá, pak $Im\{a_k\}$ je lichá.

$|a_k|$ je sudá, pak $\angle a_k$ je lichá.

Fourierovy řady

Vlastnosti FŘ:

LINEARITA: $x(t) \leftrightarrow a_k, y(t) \leftrightarrow b_k \;\Rightarrow \alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$

KOMPLEXNÍ SDRUŽENÍ: $x(t)$ je reálná $\Rightarrow$ $a_{-k} = a_k^*$

$Re\{a_k\}$ je sudá, pak $Im\{a_k\}$ je lichá.

$|a_k|$ je sudá, pak $\angle a_k$ je lichá.

POSUNUTÍ V ČASE:

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$

$$x(t - t_0) \leftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk2\pi t_0/T}$$

fázový posun úměrný t_0

Fourierovy řady

Vlastnosti FŘ:

LINEARITA: $x(t) \leftrightarrow a_k, y(t) \leftrightarrow b_k \;\Rightarrow \alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$

KOMPLEXNÍ SDRUŽENÍ: $x(t)$ je reálná $\Rightarrow$ $a_{-k} = a_k^*$

$Re\{a_k\}$ je sudá, pak $Im\{a_k\}$ je lichá.

$|a_k|$ je sudá, pak $\angle a_k$ je lichá.

POSUNUTÍ V ČASE:

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$

$$x(t-t_0) \leftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk2\pi t_0/T}$$

fázový posun úměrný t_0

Příklad: posun o půl periody.

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$

$$y(t) = x(t-T/2) \leftrightarrow \text{.......................................}$$

Fourierovy řady

Vlastnosti FŘ:

LINEARITA: $x(t) \leftrightarrow a_k, y(t) \leftrightarrow b_k \;\Rightarrow \alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$

KOMPLEXNÍ SDRUŽENÍ: $x(t)$ je reálná $\Rightarrow$ $a_{-k} = a_k^*$

$Re\{a_k\}$ je sudá, pak $Im\{a_k\}$ je lichá.

$|a_k|$ je sudá, pak $\angle a_k$ je lichá.

POSUNUTÍ V ČASE:

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$
$$x(t-t_0) \leftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk2\pi t_0/T}$$

fázový posun úměrný t_0

Příklad: posun o půl periody.

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$
$$y(t) = x(t - T/2) \leftrightarrow a_k e^{-jk\pi} = (-1)^k a_k$$

Fourierovy řady

Vlastnosti FŘ:

PARCEVALŮV TEORÉM:

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt}_{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{|a_k|^2}_{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Fourierovy řady

Vlastnosti FŘ:

PARCEVALŮV TEORÉM:

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt}_{\text{Průměrný výkon signálu}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{|a_k|^2}_{\text{Výkon } k\text{-té harmonické složky}}$$

Průměrný výkon signálu

Výkon *k*-té harmonické složky

Fourierovy řady

Vlastnosti FŘ:

PARCEVALŮV TEORÉM:

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt}_{\text{Průměrný výkon signálu}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{|a_k|^2}_{\text{Výkon } k\text{-té harmonické složky}}$$

Průměrný výkon signálu — Výkon *k*-té harmonické složky

Energie, ať měřená v časové nebo frekvenční oblasti, zůstává stejná.

Fourierovy řady

Vlastnosti FŘ:

PARCEVALŮV TEORÉM:

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt}_{\text{Průměrný výkon signálu}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{|a_k|^2}_{\text{Výkon } k\text{-té harmonické složky}}$$

Průměrný výkon signálu   Výkon *k*-té harmonické složky

Energie, ať měřená v časové nebo frekvenční oblasti, zůstává stejná.

NÁSOBENÍ:

$$x(t) \leftrightarrow a_k, y(t) \leftrightarrow b_k$$

$x(t)$ i $y(t)$ jsou periodické signály s periodou T.

$$\Downarrow$$

$$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow c_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} = a_k * b_k$$

důkaz:

$$\underbrace{\sum_l a_l e^{jl\omega_0 t}}_{x(t)} \cdot \underbrace{\sum_m b_m e^{jm\omega_0 t}}_{y(t)} = \sum_{l,m} a_l b_m e^{j(l+m)\omega_0 t} \xrightarrow{l+m=k} \sum_k \underbrace{\left[\sum_l a_l b_{k-l}\right]}_{c_k} e^{jk\omega_0 t}$$

Fourierovy řady

Vlastnosti FŘ:

PERIODICKÁ KONVOLUCE:

$$z(t) = \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau = x(t) \otimes y(t)$$

$x(t)$, $y(t)$ jsou periodické signály s periodou T.
………… i $z(t)$ je periodický signál s periodou T.
Nezáleží na tom, nad kterou periodou se integruje.

Fourierovy řady

Vlastnosti FŘ:

PERIODICKÁ KONVOLUCE:

$$z(t) = \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau = x(t) \otimes y(t)$$

x(*t*), *y*(*t*) jsou periodické signály s periodou *T*.
………… i *z*(*t*) je periodický signál s periodou *T*.
Nezáleží na tom, nad kterou periodou se integruje.

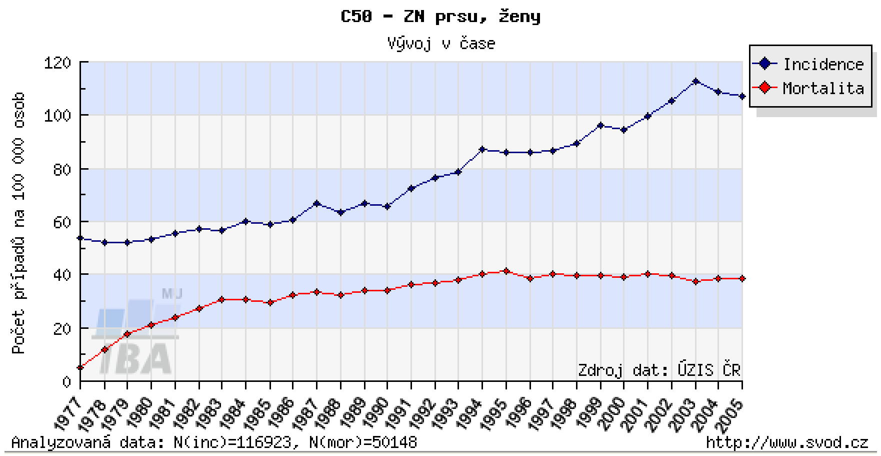
$$x(t) \leftrightarrow a_k, y(t) \leftrightarrow b_k, z(t) \leftrightarrow c_k$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_T z(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T \left(\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right) e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \int_T \underbrace{\left(\frac{1}{T}\int_T y(t-\tau)e^{-jk\omega_0(t-\tau)}dt\right)}_{b_k} x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau \\ &= \int_T b_k x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau = Ta_k b_k \end{aligned}$$

Násobení ve frekvenční oblasti !!!

Fourierovy řady

Poznámka o Fourierově řadě a Fourierově transformaci:



… aneb k čemu mi je analýza periodických signálů , když většina signálů, které znám, jsou neperiodické? (EKG, epidemiologické trendy, apod.)

Fourierovy řady

Poznámka o Fourierově řadě a Fourierově transformaci:

- periodické signály ……………… Fourierova řada
- aperiodické signály……………. Fourierova transformace

diskrétní posloupnost koeficientů pro $\omega_{0,}\ 2\omega_{0,}\ 3\omega_{0,}$ …

periodické s $\omega_0 = 0$ *a* $T = \infty$.

Fourierovy řady

Poznámka o Fourierově řadě a Fourierově transformaci:

- periodické signály ……………… Fourierova řada
- aperiodické signály……………. Fourierova transformace

diskrétní posloupnost koeficientů pro $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \ldots$

periodické s $\omega_0 = 0$ *a* $T = \infty$.

Integrace přes nekonečno a výsledkem bude spojitý obraz spojité funkce x(t):

$$X(\omega) = \mathrm{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Fourierovy řady

Fourierova reprezentace diskrétních signálů

$$x[n+N] = x[n] \qquad \text{a} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$x[n]$ – periodický signál se základní periodou N.

Fourierovy řady

Fourierova reprezentace diskrétních signálů

$$x[n+N] = x[n] \quad \text{a} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$x[n]$ – periodický signál se základní periodou N.

$$e^{j(k+N)\omega_0 n} = e^{jk\omega_0 n} e^{j\overbrace{N\omega_0 n}^{2\pi n}} = e^{jk\omega_0 n} \Rightarrow$$

……………… řada

Fourierovy řady

Fourierova reprezentace diskrétních signálů

$$x[n+N] = x[n] \qquad \text{a} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$x[n]$ – periodický signál se základní periodou N.

$$e^{j(k+N)\omega_0 n} = e^{jk\omega_0 n} e^{j\overbrace{N\omega_0 n}^{2\pi n}} = e^{jk\omega_0 n} \Rightarrow$$

konečná řada

Fourierovy řady

Fourierova reprezentace diskrétních signálů

$$x[n+N] = x[n] \qquad \text{a} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$x[n]$ – periodický signál se základní periodou N.

$$e^{j(k+N)\omega_0 n} = e^{jk\omega_0 n} e^{j\overbrace{N\omega_0 n}^{2\pi n}} = e^{jk\omega_0 n} \Rightarrow$$ konečná řada

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$\sum_{k=<N>}$ …… suma přes N kterýchkoliv po sobě jdoucích hodnot k.

Fourierovy řady

Fourierova reprezentace diskrétních signálů

$$x[n+N] = x[n] \qquad \text{a} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$x[n]$ – periodický signál se základní periodou N.

$$e^{j(k+N)\omega_0 n} = e^{jk\omega_0 n} e^{j\overbrace{N\omega_0 n}^{2\pi n}} = e^{jk\omega_0 n} \Rightarrow$$

konečná řada

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$\boxed{a_k = ?}$$

$\sum_{k=<N>}$ …… suma přes N kterýchkoliv po sobě jdoucích hodnot k.

Fourierovy řady

$$a_k = ?$$

$$\begin{aligned}
x[n] &= \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \\
&\Downarrow \\
x[0] &= \sum_{k=<N>} a_k \\
x[1] &= \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0} \\
x[2] &= \sum_{k=<N>} a_k e^{j2k\omega_0} \\
&\vdots \\
x[N-1] &= \sum_{k=<N>} a_k e^{j(N-1)k\omega_0}
\end{aligned}$$

N rovnic o *N* neznámých…

Fourierovy řady

$$a_k = ?$$

Konečné geometrické řady:
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & , \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & , \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\alpha = e^{jk\omega_0}$$

Fourierovy řady

$$a_k = ?$$

Konečné geometrické řady: $$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & , \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & , \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\alpha = e^{jk\omega_0}$$

....

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$a_{k+N} = a_k$ .... spec. vlastnost u diskrétních signálů

Fourierovy řady

Poznámka o Fourierově řadě diskrétního signálu a DTFT (discrete-time Fourier transform):

……………………………………………………

Fourierovy řady

Poznámka o Fourierově řadě diskrétního signálu a DTFT (discrete-time Fourier transform):

DTFT nějaké posloupnosti se počítá úplně stejně jako se počítají koeficienty Fourierovy řady této posloupnosti

Periodické signály a LTI systémy

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=<N>} H(e^{jk\omega_0}) a_k e^{jk\omega_0 n}$$

Periodické signály a LTI systémy

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=<N>} H(e^{jk\omega_0}) a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$a_k \longrightarrow \underbrace{H(e^{jk\omega_0})}_{\text{„zesílení“}} a_k$$

$$H(e^{jk\omega_0}) = |H(e^{jk\omega_0})| e^{j\angle H(e^{jk\omega_0})}$$

amplituda fáze

Periodické signály a LTI systémy

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=<N>} H(e^{jk\omega_0}) a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$a_k \longrightarrow \underbrace{H(e^{jk\omega_0})}_{\text{„zesílení“}} a_k$$

$$H(e^{jk\omega_0}) = |H(e^{jk\omega_0})| e^{j\angle H(e^{jk\omega_0})}$$

amplituda fáze

LTI systém nevytváří nové frekvenční složky,
ale pouze zesiluje nebo potlačuje frekvenční komponenty
existující ve vstupním signálu.

Periodické signály a LTI systémy

$$e^{j\omega n} \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

$$(z = e^{j\omega})$$

Frekvenční charakteristika: $G(\omega) = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$

Periodické signály a LTI systémy

$$e^{j\omega n} \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

$$(z = e^{j\omega})$$

Frekvenční charakteristika: $G(\omega) = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$

…… je periodická funkce, jejíž výpočet odpovídá výpočtu koeficientů Fourierovy řady impulsní charakteristiky *h*.

Frekvenční charakteristika

PŘÍKLAD: vyhlazovací systém

$$y[n] = \frac{1}{3}\{x[n-1] + x[n] + x[n+1]\}$$

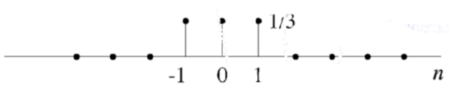
$$h[n] = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Frekvenční charakteristika

PŘÍKLAD: vyhlazovací systém

$$y[n] = \frac{1}{3}\{x[n-1] + x[n] + x[n+1]\}$$

$$h[n] = \frac{1}{3}\{\delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]\}$$



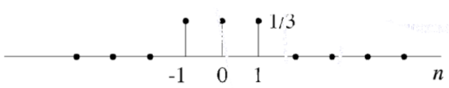
$$H(e^{j\omega}) = \text{..................................}$$

Frekvenční charakteristika

PŘÍKLAD: vyhlazovací systém

$$y[n] = \frac{1}{3}\{x[n-1] + x[n] + x[n+1]\}$$

$$h[n] = \frac{1}{3}\{\delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]\}$$



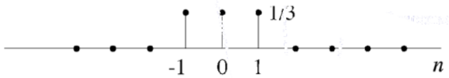
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Frekvenční charakteristika

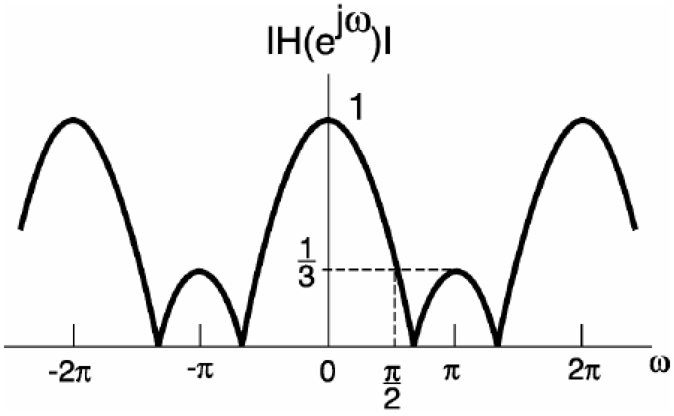
PŘÍKLAD: vyhlazovací systém

$$y[n] = \frac{1}{3}\{x[n-1] + x[n] + x[n+1]\}$$

$$h[n] = \frac{1}{3}\{\delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]\}$$



$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \frac{1}{3}\left[e^{-j\omega} + 1 + e^{j\omega}\right] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\omega$$



3. cvičení

1. Vypočtěte frekvenční charakteristiku jednoduchého systému, který aproximuje derivaci signálu:

$$y[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[n-1]\}$$

2. Vypočtěte frekvenční charakteristiku jednoduchého systému, který provádí dvouvzorkové vyhlazování:

$$y[n] = \tfrac{1}{2}\,(x[n] + x[n-1])$$

3. Aplikujte vyhlazovací a derivovací systém
na učitelem dodané 1-D a 2-D signály a sledujte jak frekvenční charakteristika systémů ovlivňuje povahu výstupních signálů.

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Otázky ?

jakub.jamarik@med.muni.cz