Lineární a adpativní zpracování dat

3. Lineární filtrace I: Z-transformace, stabilita

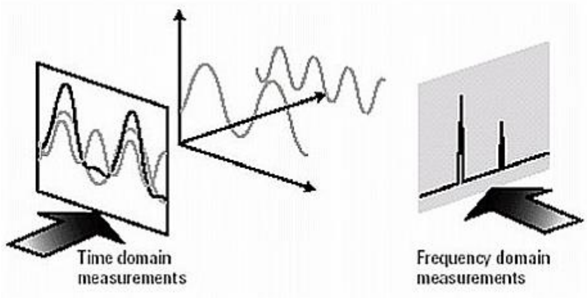
Daniel Schwarz
Jakub Jamárik

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Investice do rozvoje vzdělávání

Osnova

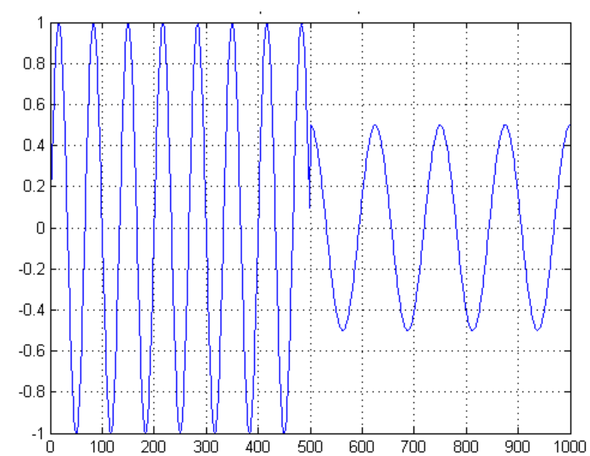
- Opakování: signály, systémy, jejich vlastnosti a popis v časové a frekvenční oblasti
- Přehled FŘ, FT, DTFT, DFT;
- Vzorkování a aliasing - ne jako dogma.
- Filtrace, idealizované filtry
- Z-transformace pro popis LTI systémů pomocí přenosové funkce



- Příklady:
  - demonstrace vzorkování a rekonstrukce signálů

Opakování – signály, časové řady

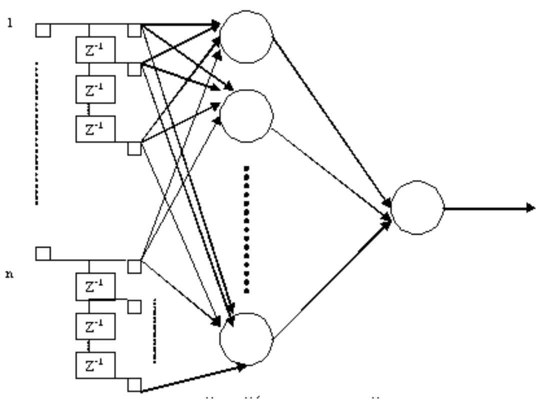
- Definice signálu z pohledu teorie informace a matematiky
- Rozdělení signálů podle matematického popisu
- Rozdělení signálů podle nezávislých veličin
- Přirozeně diskrétní a přirozeně spojité signály
- A/D převod: diskretizace v čase, vzorkovací věta, aliasing
- A/D převod: diskretizace v amplitudě, kvantizační šum



Opakování - systémy

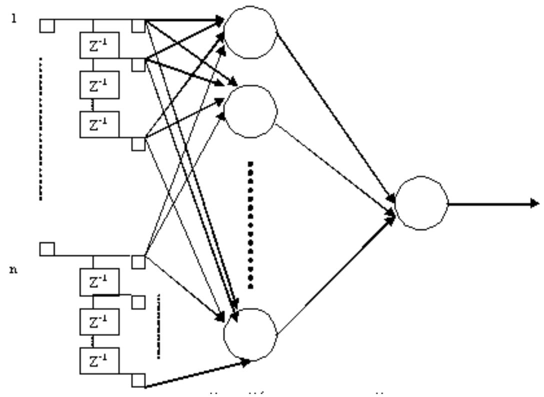
- Definice systému obecná a definice z pohledu zpracování signálů
- Struktura systému
- Popis dif. rovnicemi

  a co je potřeba znát pro popis „vstupně-výstupního“ chování systému
- Vlastnosti systémů:
  - Kauzalita
  - Časová invariantnost
  - Linearita
- Princip superpozice
- LTI systémy
- reprezentace DT signálů jednotkovými impulsy
- impulsní charakteristika systémů
- konvoluce



Opakování – popis LTI systémů ve frekvenční oblasti

- Fourierovy řady pro diskrétní periodické signály
- Vyjádření FŘ pomocí komplexních exponenciál, Eulerovy vztahy
- Vztah mezi FŘ, FT a mezi FŘ, DTFT
- Frekvenční charakteristika LTI systémů



Dotaz studenta ke znaménkům ve FŘ a DTFT

Dotaz: Proč ve skriptech Lineární a adaptivní zpracování dat je v rovnici 1.6 v exponentu jiné znaménko než v rovnici 1.7?

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad \rightarrow \quad y(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} H\left(e^{jk\omega_0}\right) a_k e^{jk\omega_0 n} \qquad (1.6)$$

$$G(\omega) = H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}. \qquad (1.7)$$

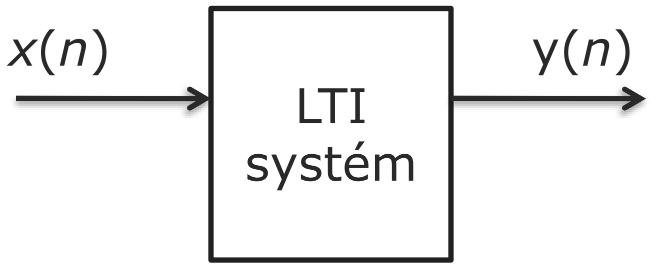
Odpověď: V rovnici 1.6 jsou vyjádřeny časové řady x(*n*) a y(*n*), tj. „funkce“ času, jako kombinace komplexních exponenciál (rozklad časové řady do kombinace goniometrických funkcí). V rovnici 1.7 se jedná o vyjádření spojité funkce úhlové frekvence ω, jejíž výpočet je stejný jako výpočet koeficientů Fourierovy řady z impulsní charakteristiky *h*(*n*). Koeficienty FŘ se počítají jinak než samotný rozklad:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

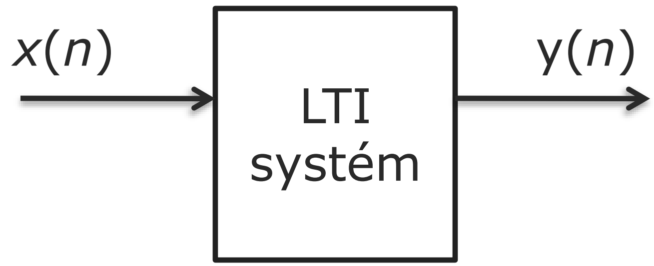
Ve skriptech je to zformulováno nešťastně. Mělo by být uvedeno, že se frekvenční charakteristika počítá jako koeficienty Fourierovy řady. V přednáškových slajdech je to správně.

Opakování – popis LTI systémů ve frekvenční oblasti



$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad \rightarrow \quad y(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} H\left(e^{jk\omega_0}\right) a_k e^{jk\omega_0 n}$$

Opakování – popis LTI systémů ve frekvenční oblasti



$$x(n)=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad \rightarrow \quad y(n)=\sum_{k=\langle N\rangle} H\left(e^{jk\omega_0}\right) a_k e^{jk\omega_0 n}$$

LTI systém nevytváří nové frekvenční složky. Provádí pouze zesilování a zpožďování frekvenčních složek přítomných ve vstupním signálu.

Známe-li frekvenční charakteristiku *H*(*f*) LTI systému, pak **jsme schopni určit odezvu tohoto systému na jakýkoli signál** vyjádřený kombinací komplexních exponenciál.

Doplnění znalostí: normovaná frekvence

Normovaný kmitočet: vztahujeme skutečný úhlový kmitočet ω složek signálu ke vzorkovacímu kmitočtu ω_s

radiány
za sekundu

Bezrozměrný podíl v rozsahu:

$$\langle 0,\ 2\pi \rangle$$

radiány
za vzorek

Normovaná frekvence: vztahujeme skutečné frekvenční složky f signálu ke vzorkovací frekvenci f_s

vzorky za
sekundu

Bezrozměrný podíl v rozsahu:

$$\langle 0,\ 1 \rangle$$

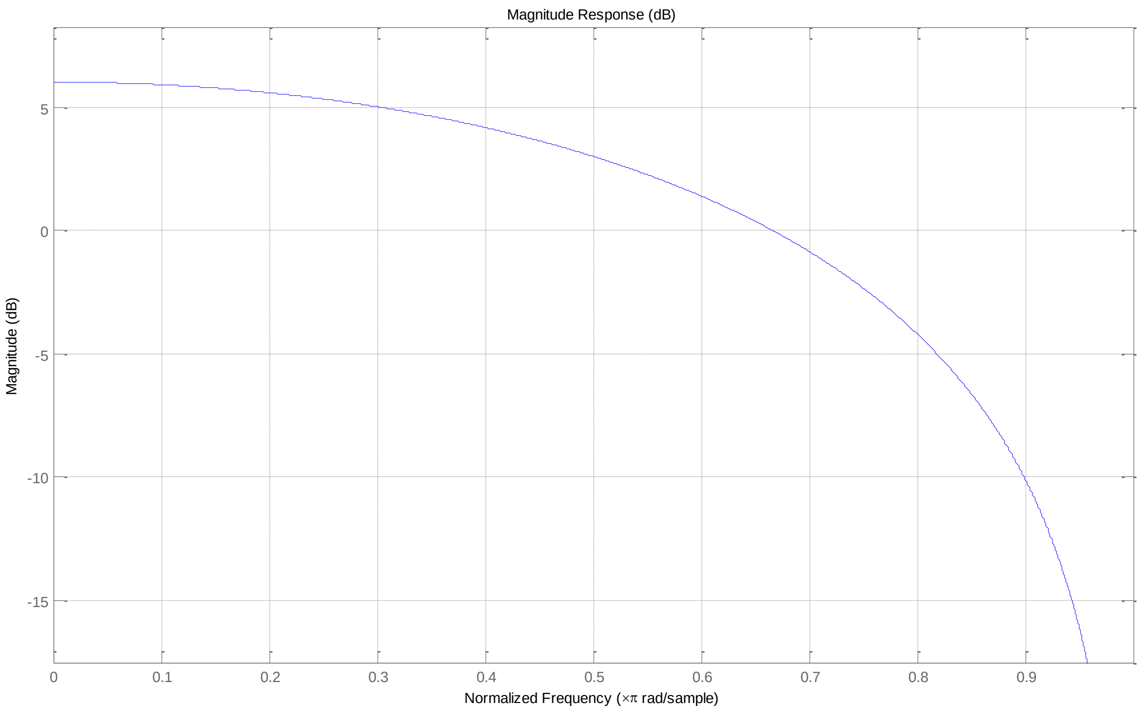
cykly za
vzorek

Doplnění znalostí: normovaná frekvence

Normovaný kmitočet (normovaná frekvence) se uplatňuje u signálů i u systémů, viz příklady v minulé přednášce a cvičení. Někdy **1** odpovídá f_s, někdy **1** odpovídá $f_s/2$ (Matlab).

$$y[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[n-1]\right)$$

$$H(f) = \frac{\left(1 + e^{-j2\pi f}\right)}{2} = e^{-j\pi f}\cos \pi f$$



Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

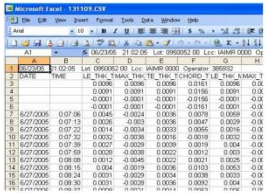
- Fourierovy řady (FŘ) periodických signálů se spojitým časem
- Fourierovy řady (FŘ) periodických signálů s diskrétním časem
- Fourierova transformace signálů s diskrétním časem (DTFT)
- Fourierova transformace (CTFT nebo FT)
- Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

- Fourierovy řady (FŘ) periodických signálů se spojitým časem
- Fourierovy řady (FŘ) periodických signálů s diskrétním časem
- Fourierova transformace signálů s diskrétním časem (DTFT)
- Fourierova transformace (CTFT nebo FT)
- Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

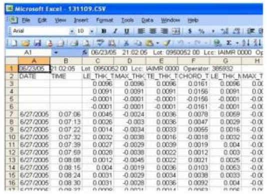
- Fourierovy řady (FŘ) periodických signálů se spojitým časem
- Fourierovy řady (FŘ) periodických signálů s diskrétním časem
- Fourierova transformace signálů s diskrténím časem (DTFT)
- Fourierova transformace (CTFT nebo FT)
- Diskrétní Fourierova transformace (DFT)



Zájem matematického biologa o analýzu diskrétních dat…

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

- Fourierovy řady (FŘ) periodických signálů se spojitým časem
- Fourierovy řady (FŘ) periodických signálů s diskrétním časem
- Fourierova transformace signálů s diskrténím časem (DTFT)
- Fourierova transformace (CTFT nebo FT)
- Diskrétní Fourierova transformace (DFT)



… vysvětlíme vše z pohledu DT.

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j2\pi f n}$$

Frekvenční charakteristika systému je dána DTFT impulsní charakteristiky systému a jedná se o periodickou, spojitou funkci frekvence.

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j2\pi f n}$$

Frekvenční charakteristika systému je dána DTFT impulsní charakteristiky systému a jedná se o periodickou, spojitou funkci frekvence.

Fourierova transformace s diskrétním časem

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j2\pi f n}$$

Frekvenční charakteristika systému je dána DTFT impulsní charakteristiky systému a jedná se o periodickou, spojitou funkci frekvence.

Fourierova transformace s diskrétním časem

Výpočet koeficientů Fourierovy řady diskrétního signálu (posloupnosti)

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j2\pi f n}$$

Frekvenční charakteristika systému je dána DTFT impulsní charakteristiky systému a jedná se o periodickou, spojitou funkci frekvence.

Fourierova transformace diskrétního signálu

Výpočet koeficientů Fourierovy řady diskrétního signálu (posloupnosti)

TOTÉŽ

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j2\pi f n}$$

Frekvenční charakteristika systému je dána DTFT impulsní charakteristiky systému a jedná se o periodickou, spojitou funkci frekvence.

Jaká je perioda této funkce?

$H(f)$: ....

$H(e^{j\omega})$: ....

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

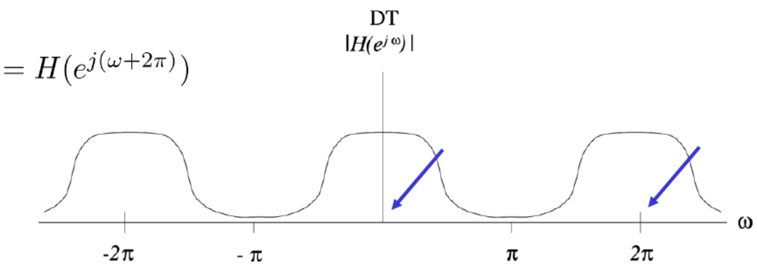
$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-j2\pi f n}$$

Frekvenční charakteristika systému je dána DTFT impulsní charakteristiky systému a jedná se o periodickou, spojitou funkci frekvence.

Jaká je perioda této funkce?

$H(f)$: 1
$H(e^{j\omega})$: 2π

$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi)})$$



Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j2\pi f n}$$ .... DTFT $\{x[n]\}$

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j2\pi f n}$$ .... DTFT $\{x[n]\}$

$$x[n] \longleftrightarrow X(f)$$

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)\, e^{j2\pi f n}\, df$$

DTFT je transformace, která mezi sebou váže
časovou řadu (posloupnost) *x*[*n*]
a spojitou periodickou
komplexní funkci X(f) –...............?.................

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j2\pi f n}$$ .... DTFT $\{x[n]\}$

$$x[n] \longleftrightarrow X(f)$$

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)\, e^{j2\pi f n}\, df$$

DTFT je transformace, která mezi sebou váže
diskrétní signál (posloupnost) $x[n]$
a spojitou periodickou
komplexní funkci X(f) – spektrum časové řady $x[n]$.

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)\, e^{j2\pi f n}\, df$$

… vyjádření signálu *x*[*n*] pomocí „sumy“ komplexních exponenciál.

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)\, e^{j2\pi f n}\, df$$

… vyjádření signálu *x*[*n*] pomocí „sumy“ komplexních exponenciál.

⇩

Výstup LTI systému s frekvenční charakteristikou *H*(*f*):

……………………………………….?

Známe-li frekvenční charakteristiku *H*(*f*) LTI systému, pak **jsme schopni určit odezvu tohoto systému na jakýkoli signál** vyjádřený kombinací komplexních exponenciál.

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)\, e^{j2\pi f n}\, df$$

… vyjádření signálu *x*[*n*] pomocí „sumy“ komplexních exponenciál.

Výstup LTI systému s frekvenční charakteristikou *H*(*f*):

$$y[n] \;=\; \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H(f)\, X(f)\, e^{j2\pi f n}\, df$$

$$Y(f) \;=\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)\, e^{j2\pi f n}\, df$$

… vyjádření signálu $x[n]$ pomocí „sumy“ komplexních exponenciál.

Výstup LTI systému s frekvenční charakteristikou $H(f)$:

$$y[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H(f)\, X(f)\, e^{j2\pi f n}\, df$$

$$Y(f) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)\, e^{j2\pi fn}\, df$$

… vyjádření signálu *x*[*n*] pomocí „sumy“ komplexních exponenciál.

Výstup LTI systému s frekvenční charakteristikou *H*(*f*):

$$y[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H(f)\, X(f)\, e^{j2\pi fn}\, df$$

$$Y(f) = H(f)\, X(f)$$

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$x[n] \ast h[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(f)\,H(f)$$

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$\underbrace{x[n] \ast h[n]}_{} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \underbrace{X(f)\,H(f)}_{}$$

konvoluce v časové oblasti $\xleftrightarrow{\text{DTFT}}$ násobení ve frekvenční oblasti

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$\underbrace{x[n] * h[n]}_{\text{konvoluce v časové oblasti}} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \underbrace{X(f)\,H(f)}_{\text{násobení ve frekvenční oblasti}}$$

$$\underbrace{\text{konvoluce v časové oblasti} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \text{násobení ve frekvenční oblasti}}_{\text{KONVOLUČNÍ TEORÉM}}$$

KONVOLUČNÍ TEORÉM

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$\underbrace{x[n] \; * \; h[n]} \; \stackrel{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} \; \underbrace{X(f)\; H(f)}$$

konvoluce v časové oblasti $\stackrel{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow}$ násobení ve frekvenční oblasti

KONVOLUČNÍ TEORÉM

$$\underbrace{x[n-n_0] \; = \; x[n] \; * \; \delta[n-n_0] \; \longleftrightarrow \; X(f)\; e^{-j2\pi f n_0}}$$

TEORÉM O POSUNUTÍ V ČASE
(time-delay theorem)

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$\underbrace{x[n] * h[n]}_{\text{konvoluce v časové oblasti}} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \underbrace{X(f)\, H(f)}_{\text{násobení ve frekvenční oblasti}}$$

konvoluce v časové oblasti $\xleftrightarrow{\text{DTFT}}$ násobení ve frekvenční oblasti

KONVOLUČNÍ TEORÉM

$$\underbrace{\tilde{R}_x[n] = x[n] * x[-n] \longleftrightarrow |X(f)|^2 = X(f)\, X(-f)}$$

KORELAČNÍ TEORÉM

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$\underbrace{x[n] * h[n]}_{\text{konvoluce v časové oblasti}} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \underbrace{X(f)\,H(f)}_{\text{násobení ve frekvenční oblasti}}$$

konvoluce v časové oblasti $\xleftrightarrow{\text{DTFT}}$ násobení ve frekvenční oblasti

KONVOLUČNÍ TEORÉM

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2 \, df$$

PARSEVALŮV TEORÉM

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$\underbrace{x[n] \ast h[n]}_{\text{konvoluce v časové oblasti}} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \underbrace{X(f)\,H(f)}_{\text{násobení ve frekvenční oblasti}}$$

konvoluce
v časové oblasti $\xleftrightarrow{\text{DTFT}}$ násobení
ve frekvenční oblasti

PLATÍ TO I NAOPAK?

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$\underbrace{x[n] \; * \; h[n]}_{\text{konvoluce v časové oblasti}} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \underbrace{X(f)\, H(f)}_{\text{násobení ve frekvenční oblasti}}$$

konvoluce
v časové oblasti $\xleftrightarrow{\text{DTFT}}$ násobení
ve frekvenční oblasti

PLATÍ TO I NAOPAK?

Skoro ano….:

Doplnění znalostí: Fourierova reprezentace signálů a systémů

$$\underbrace{x[n] * h[n]}_{} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \underbrace{X(f)\, H(f)}_{}$$

konvoluce v časové oblasti $\xleftrightarrow{\text{DTFT}}$ násobení ve frekvenční oblasti

PLATÍ TO I NAOPAK?

Skoro ano….:

$$x[n]\, w[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(f) \circledast W(f)$$

Periodická konvoluce
(def. a odvoz. viz 2. přednáška)

DFT – diskrétní Fourierova transformace

DTFT produkuje z diskrétních posloupností spojité periodické funkce frekvence *f*…

DFT – diskrétní Fourierova transformace

DTFT produkuje z diskrétních posloupností <u>spojité</u> periodické funkce frekvence *f*…

$$X[k] \triangleq X(f)|_{f=\frac{k}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn}\Bigg|_{f=\frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

DFT – diskrétní Fourierova transformace

$$X[k] \triangleq X(f)\big|_{f=\frac{k}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn}\Bigg|_{f=\frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

pro $0 \leq k \leq N-1.$

N-bodová DFT signálu *x*[*n*] o délce *N* vzorků:
• *k* vzorků DTFT *X*(*f*) s intervalem 1/*N.*
• *X*(*f*) periodická s periodou 1, *X*(*k*) periodická s periodou *N*.

DFT – diskrétní Fourierova transformace

$$X[k] \triangleq X(f)|_{f=\frac{k}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn}\bigg|_{f=\frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

pro $0 \leq k \leq N-1.$

N-bodová DFT signálu *x*[*n*] o délce *N* vzorků:
- *k* vzorků DTFT *X*(*f*) s intervalem 1/*N*.
- *X*(*f*) periodická s periodou 1, *X*(*k*) periodická s periodou *N*.

DFT je transformace, která mezi sebou váže
diskrétní signál (posloupnost) *x*[*n*]
a diskrétní periodickou komplexní funkci X[*k*] –.......?.........

DFT – diskrétní Fourierova transformace

$$X[k] \triangleq X(f)\Big|_{f=\frac{k}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn}\Bigg|_{f=\frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

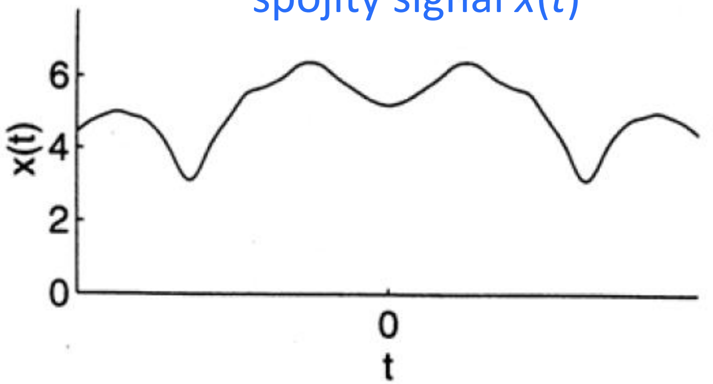
pro $0 \leq k \leq N-1.$

N-bodová DFT signálu *x*[*n*] o délce *N* vzorků:
- *k* vzorků DTFT *X*(*f*) s intervalem 1/*N.*
- *X*(*f*) periodická s periodou 1, *X*(*k*) periodická s periodou *N*.

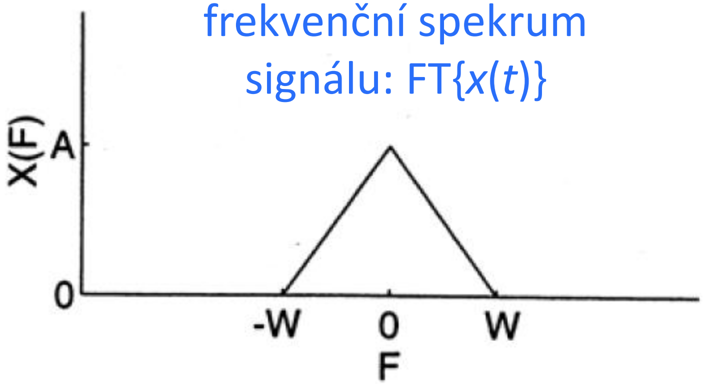
DFT je transformace, která mezi sebou váže
diskrétní signál (posloupnost) *x*[*n*]
a diskrétní periodickou komplexní funkci X[*k*] – diskrétní spektrum.

Doplnění znalostí: „sampling revisited“

spojitý signál $x(t)$



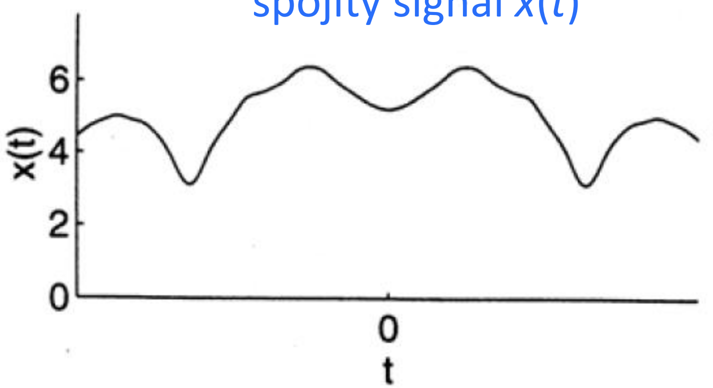
frekvenční spekrum signálu: FT{$x(t)$}



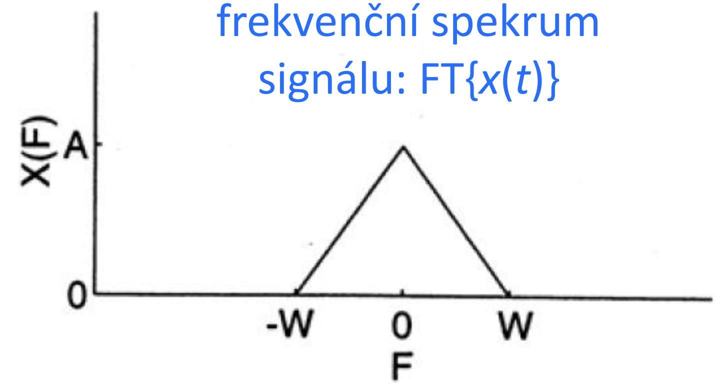
omezená šířka frekvenčního pásma

Doplnění znalostí: „sampling revisited“

spojitý signál $x(t)$

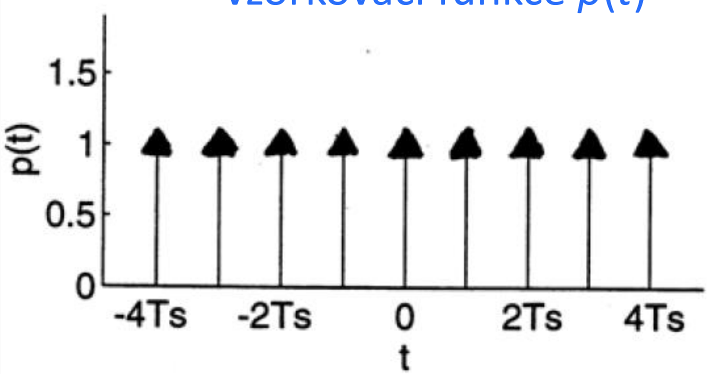


frekvenční spekrum signálu: FT{$x(t)$}

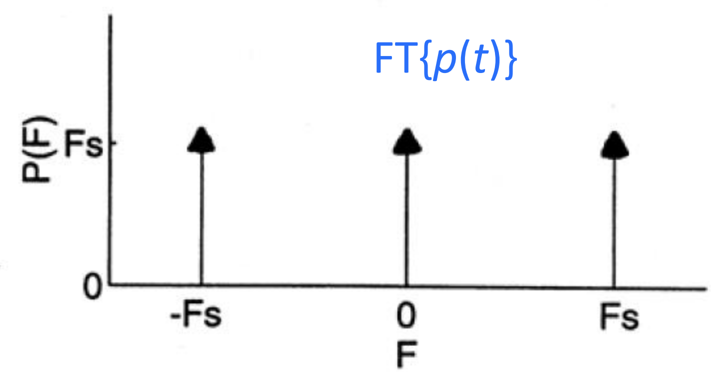


omezená šířka frekvenčního pásma

vzorkovací funkce $p(t)$

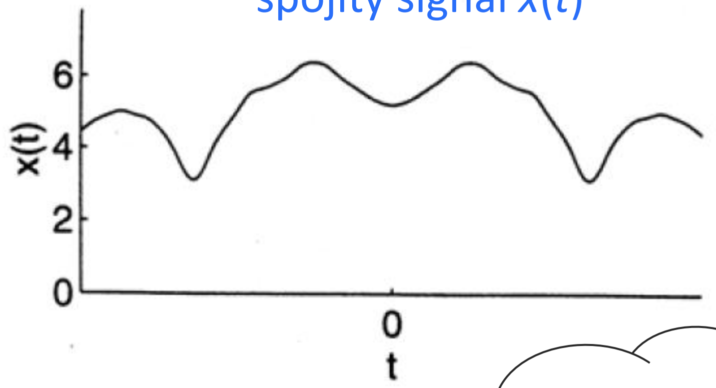


FT{$p(t)$}

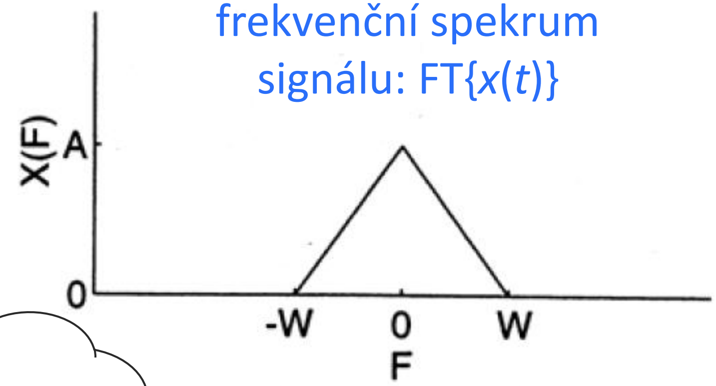


Doplnění znalostí: „sampling revisited“

spojitý signál $x(t)$



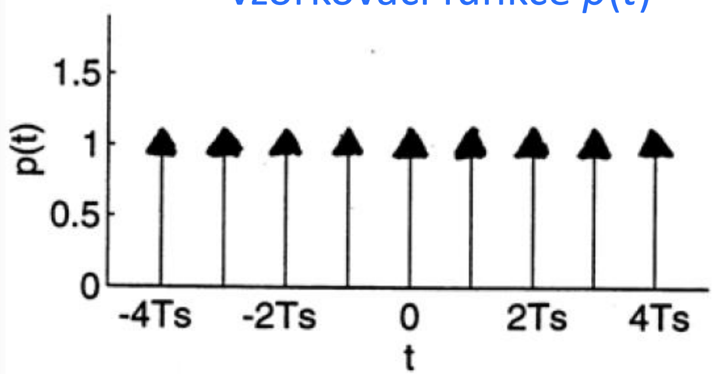
frekvenční spekrum signálu: FT{$x(t)$}



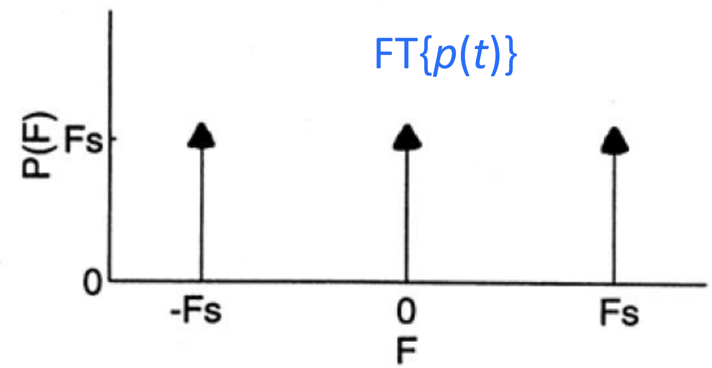
omezená šířka frekvenčního pásma

Spektrum vzorkovací funkce je nekonečnou posloupností impulsů s váhou $1/T_s$

vzorkovací funkce $p(t)$



FT{$p(t)$}



Doplnění znalostí: „sampling revisited“

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$P(F) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(F - kF_s)$$

$$x_s(t) = x(t)p(t)$$

vzorkovaný signál

původní spojitý signál

násobení v časové doméně

…………………… ve frekvenční doméně

Doplnění znalostí: „sampling revisited“

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$P(F) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(F - kF_s)$$

$$x_s(t) = x(t)p(t)$$

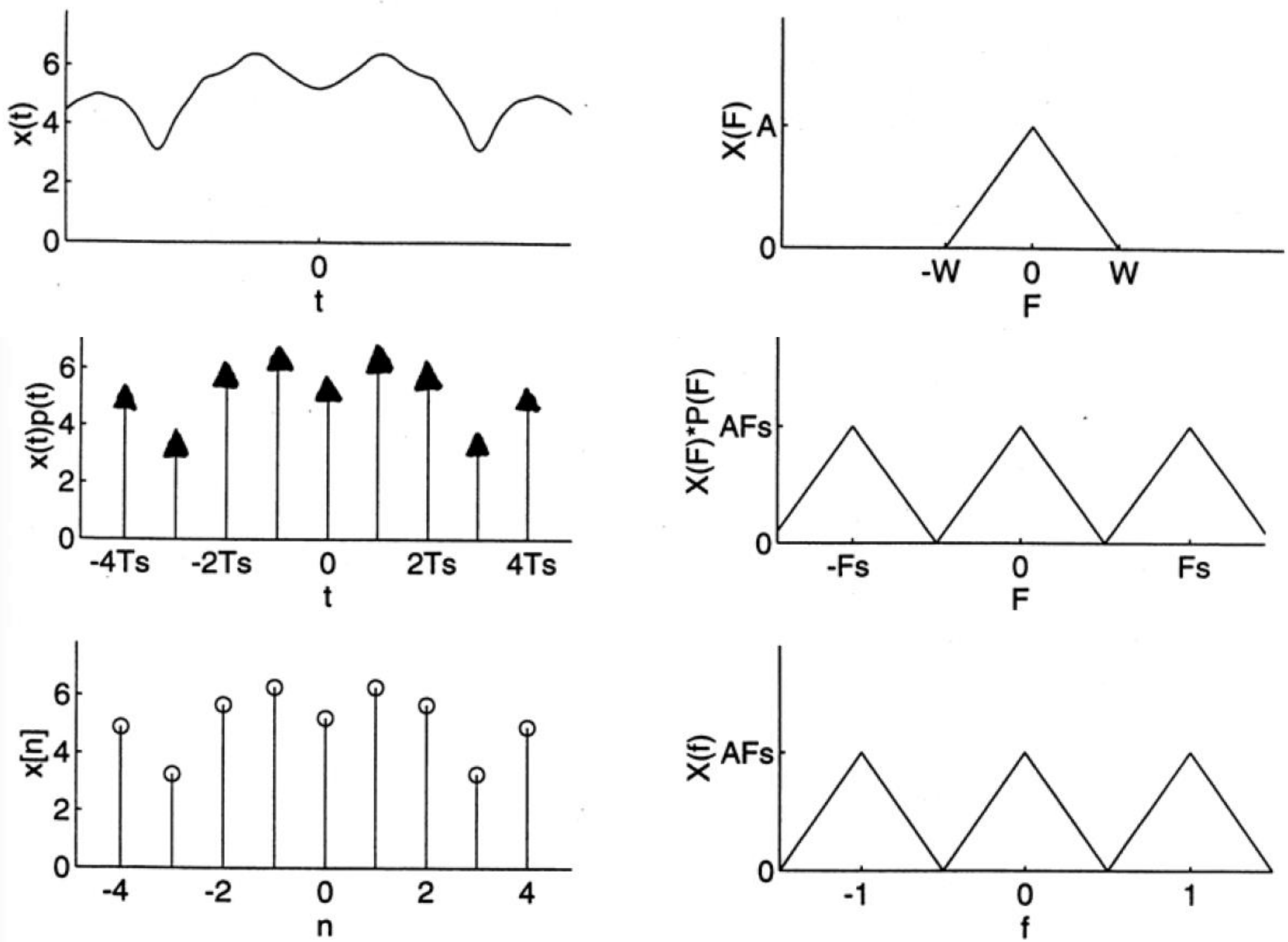
vzorkovaný signál

původní spojitý signál

násobení v časové doméně

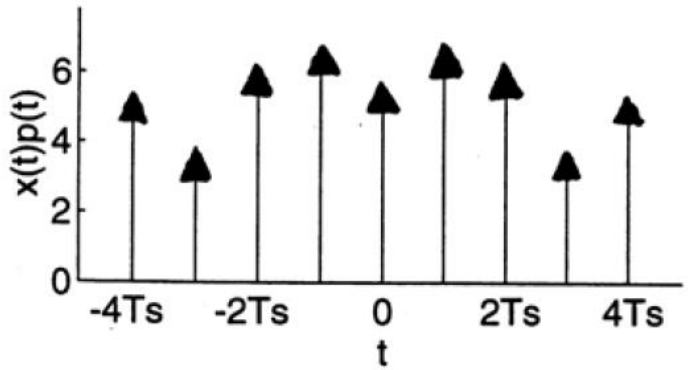
konvoluce ve frekvenční doméně

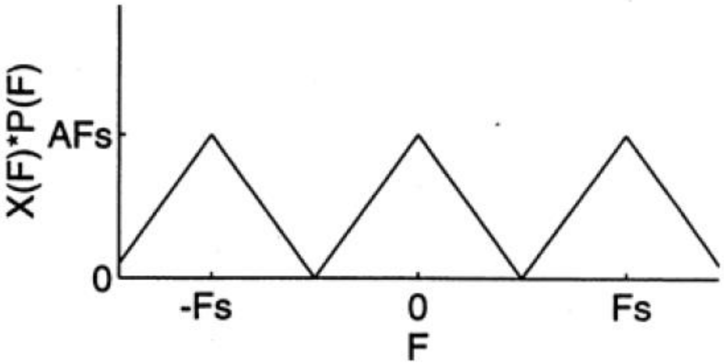
Doplnění znalostí: „sampling revisited“



Doplnění znalostí: „sampling revisited“

$$
\begin{aligned}
X_s(F) &= X(F) * P(F) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) P(F-\phi)\, d\phi = F_s \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(F - \phi - kF_s)\, d\phi \\
&= F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(F - kF_s).
\end{aligned}
$$

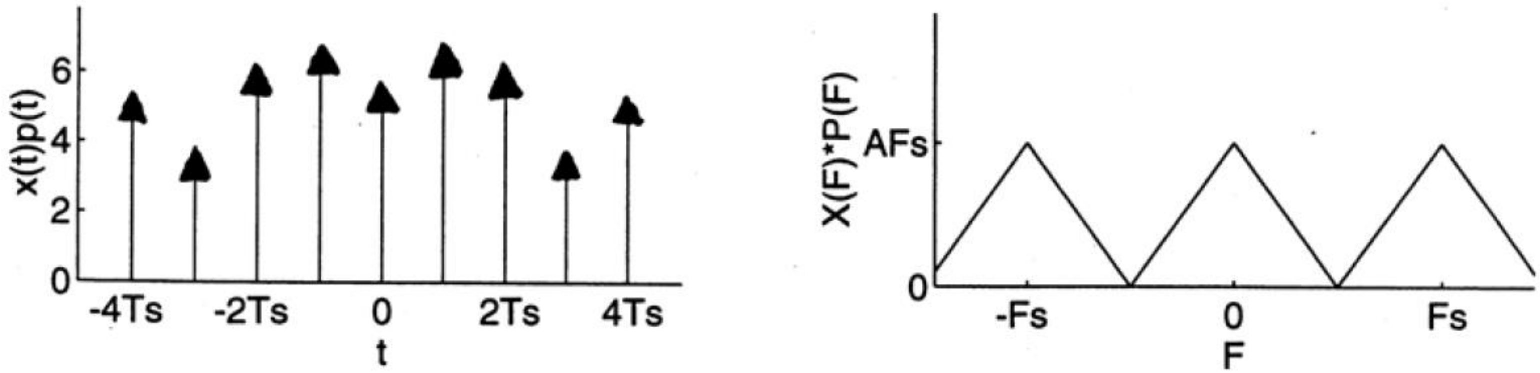




Doplnění znalostí: „sampling revisited“

$$\begin{aligned}
X_s(F) &= X(F) * P(F) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) P(F-\phi)\, d\phi = F_s \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(F - \phi - kF_s)\, d\phi \\
&= F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(F - kF_s).
\end{aligned}$$

Spektrum navzorkovaného signálu je tvořeno součtem nekonečného počtu replik spektra původního spojitého signálu, které jsou vzájemně posunuty o celistvé násobky vzorkovací frekvence.



Doplnění znalostí: „sampling revisited“

Spektrum navzorkovaného signálu je tvořeno součtem nekonečného počtu replik spektra původního spojitého signálu, které jsou vzájemně posunuty o celistvé násobky vzorkovací frekvence.

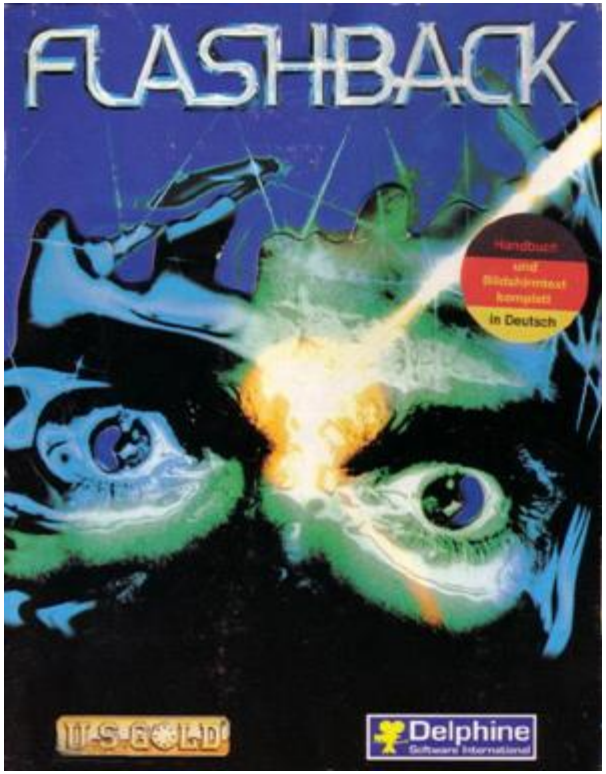
Nemá-li dojít ke ztrátě informace, musí zřejmě každá jednotlivá replika nést úplnou informaci o původním signálu, což je ovšem možné jen tehdy, nedojde-li k překrývání a tím k narušení dílčích spekter.

Podmínky rekonstruovatelnosti spojitého signálu ze vzorků:

- spojitý signál musí mít omezené spektrum
- vzorkovací frekvence musí splňovat vztah

$F_s > 2 f_{max}$.

Doplnění znalostí: „sampling revisited“



1. přednáška

A/D převod: vzorkování

Vzorkování: diskretizace spojitého signálu v čase

T_s	vzorkovací perioda
$F_s = 1/T_s$	vzorkovací frekvence

Pokud spojitý signál $x(t)$ neobsahuje složky s frekvencí nad f_{max}, pak je veškerá informace o signálu $x(t)$ obsažena v posloupnosti jeho vzorků $x(nT)$, je-li při vzorkování splněna podmínka:

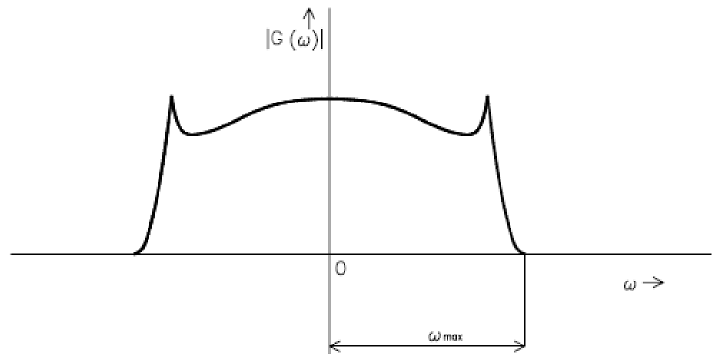
$$\boxed{F_s > 2\, f_{max}}$$

Nyquist–Shannon

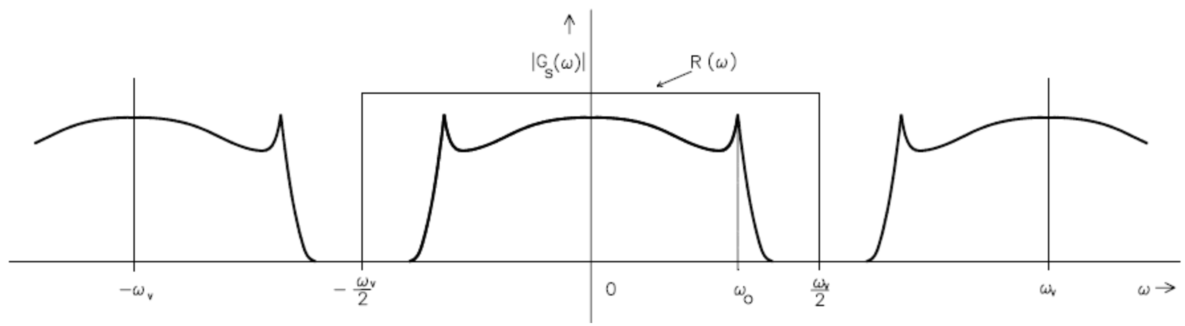
Je-li tedy splněna tato podmínka, lze z posloupnosti vzorků signálu $x(nT)$ dokonale rekonstruovat původní spojitý signál $x(t)$.

Doplnění znalostí: „sampling revisited“

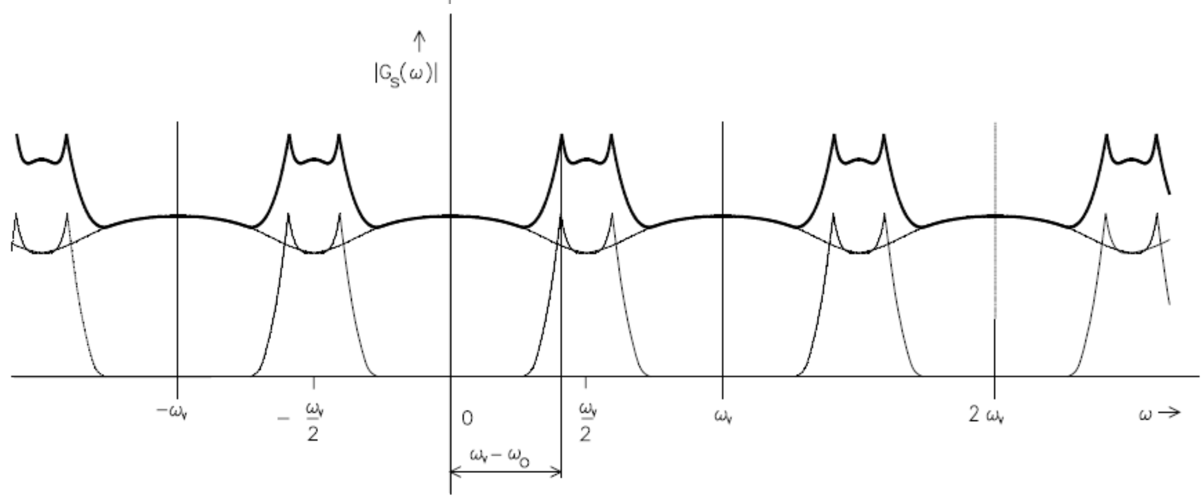
Signál s omezeným spektrem



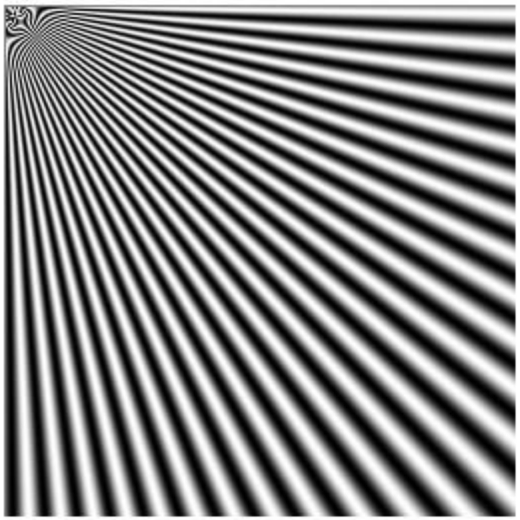
Splnění vzorkovací věty



Nesplnění vzorkovací věty



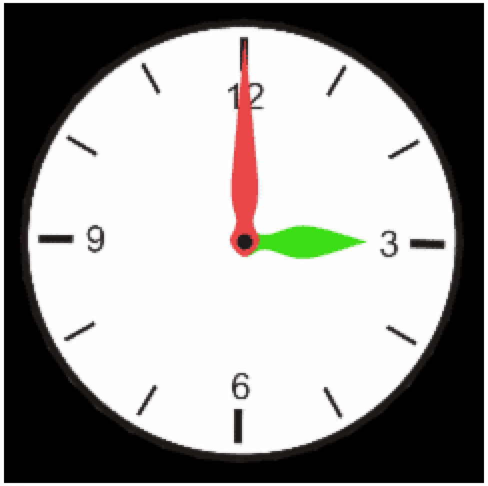
Doplnění znalostí: „sampling revisited“



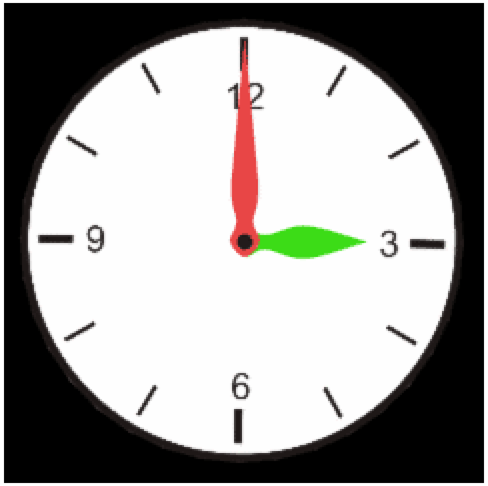
Podvzorkování způsobuje artefakty (tzv. aliasy), **aliasing**: překrývání dílčích spekter.

Doplnění znalostí: „sampling revisited“

aliasing:



Vzorkování po 10 minutách



Vzorkování po 50 minutách

Periodické signály a LTI systémy

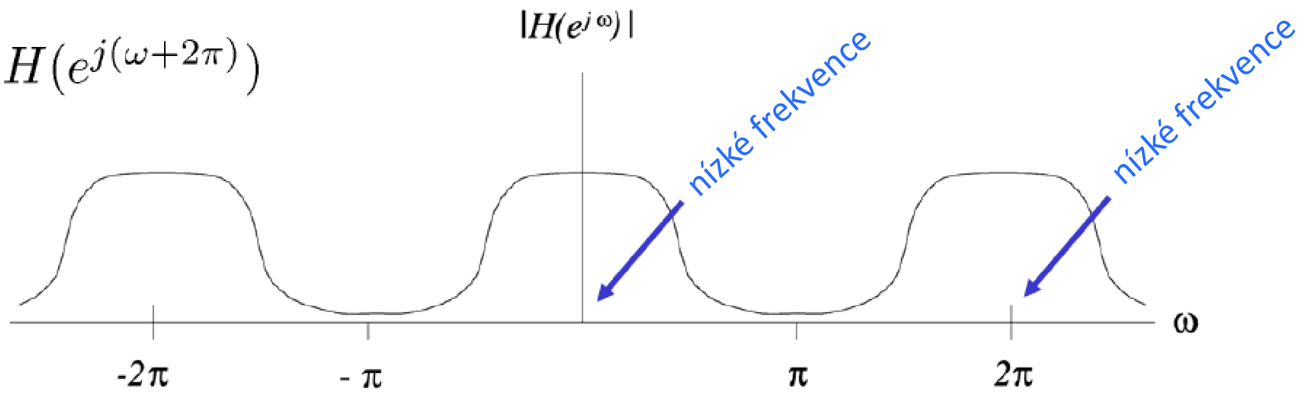
FILTROVÁNÍ

Volbou tvaru $G(\omega)=H(e^{j\omega})$ můžeme ovlivnit frekvenční kompozici na výstupu systému.

- preferenční zesílení,
- selektivní výběr určitých frekvenčních složek

U diskrétního času platí, že:

$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi)})$$



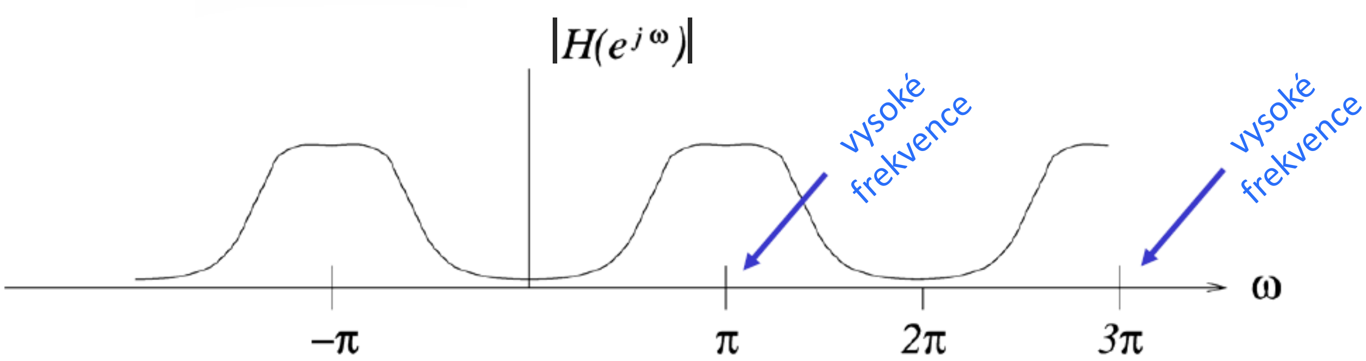
FILTROVÁNÍ

Volbou tvaru $G(\omega)=H(e^{j\omega})$ můžeme ovlivnit frekvenční kompozici na výstupu systému.

- preferenční zesílení,
- selektivní výběr určitých frekvenčních složek

2π odpovídá ....

π odpovídá ....



Periodické signály a LTI systémy

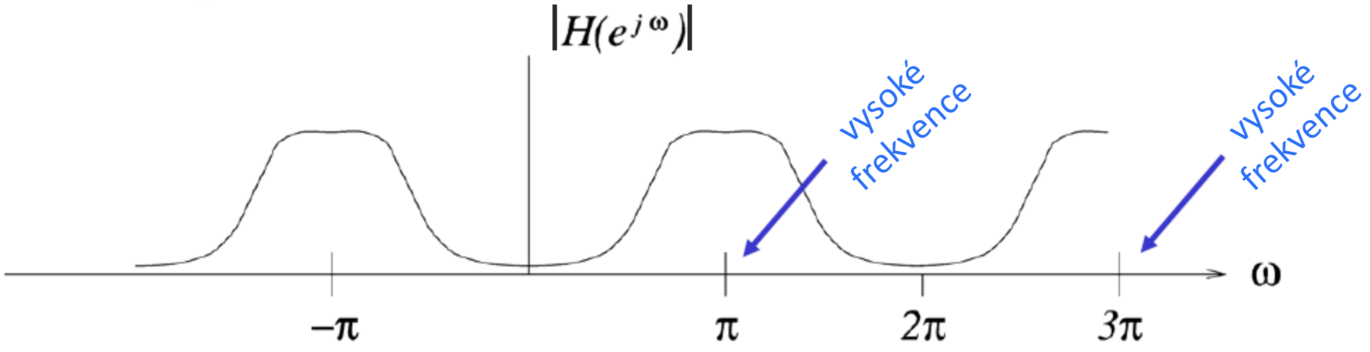
FILTROVÁNÍ

Volbou tvaru $G(\omega)=H(e^{j\omega})$ můžeme ovlivnit frekvenční kompozici na výstupu systému.

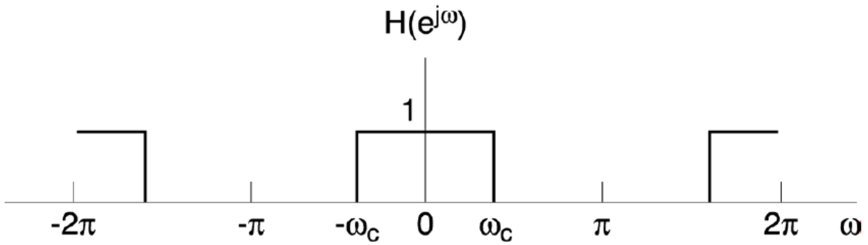
- preferenční zesílení,
- selektivní výběr určitých frekvenčních složek

2π odpovídá vzorkovací frekvenci diskrétního signálu.

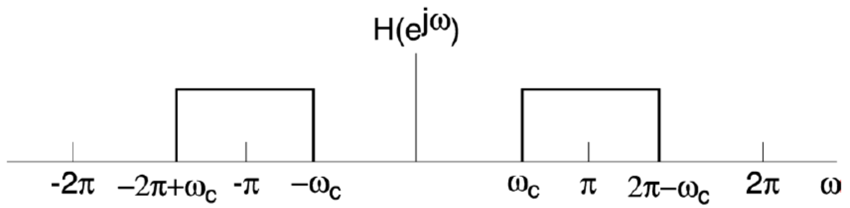
π odpovídá nejvyšší frekvenci původního signálu.



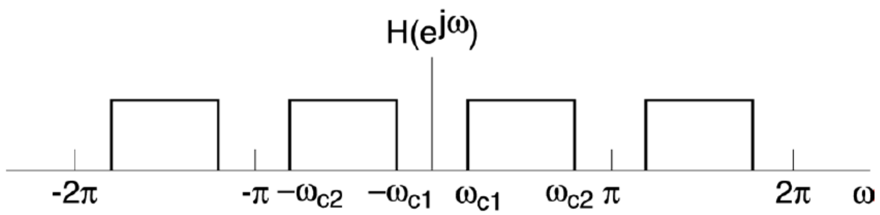
Idealizované filtry



....



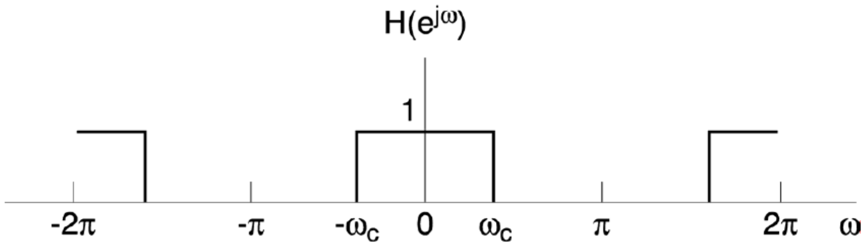
....



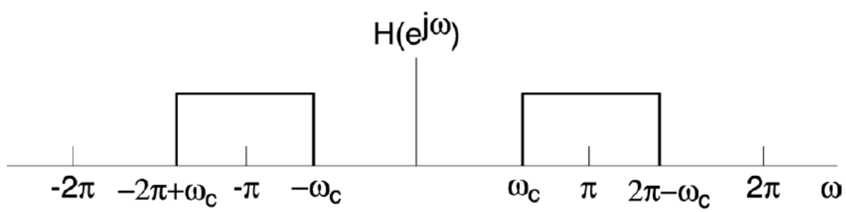
....

ω_c …… hraniční (cutoff) frekvence

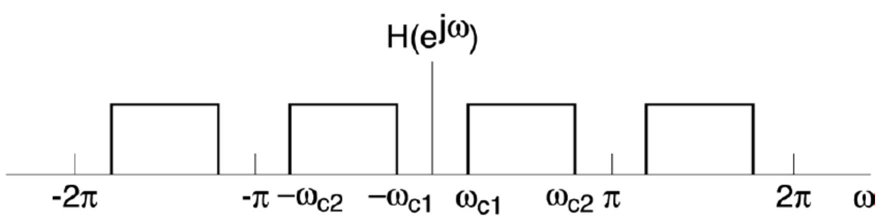
Idealizované filtry



Dolní propust



Horní propust



Pásmová propust

ω_c …… hraniční (cutoff) frekvence

Lineární filtrace obecně

Filtrace= ....?.............

Lineární filtrace obecně

Filtrace = zpracování sloužící k výběru jistých složek ze směsi více signálů a k potlačení složek jiných.

Složky signálu = ...?............

Lineární filtrace obecně

Filtrace = zpracování sloužící k výběru jistých složek ze směsi více signálů a k potlačení složek jiných.

Složky signálu = harmonické komponenty ve frekvenční oblasti, jejichž amplitudy a fáze se s filtrací pozmění.

↓

Jak vystihujeme tuto změnu?

......................?......................

Lineární filtrace obecně

Filtrace = zpracování sloužící k výběru jistých složek ze směsi více signálů a k potlačení složek jiných.

Složky signálu = harmonické komponenty ve frekvenční oblasti, jejichž amplitudy a fáze se s filtrací pozmění.

↓

Jak vystihujeme tuto změnu?

dvěma frekvenčními charakteristikami:

- amplitudovou
- a fázovou.

↓

Čeho? ....?.........

Lineární filtrace obecně

Filtrace = zpracování sloužící k výběru jistých složek ze směsi více signálů a k potlačení složek jiných.

Složky signálu = harmonické komponenty ve frekvenční oblasti, jejichž amplitudy a fáze se s filtrací pozmění.

↓

Jak vystihujeme tuto změnu?

dvěma frekvenčními charakteristikami:

- amplitudovou
- a fázovou.

↓

Čeho? Filtru.

Lineární filtrace obecně

Filtr= ....?.............

Lineární filtrace obecně

Filtr = systém nebo algoritmus (program), který mění požadovaným způsobem spektrum vstupního signálu**.**

Příklady aplikace: potlačení rušivých vlivů, frekvenční analýza

Popis filtru: frekvenční charakteristika H(*f*), impulsní charakteristika *h*(*n*), diferenční rovnice (definice), přenosová funkce *H*(*z*).

je ....?......................... vzhledem k diskrétnímu charakteru signálů.

Lineární filtrace obecně

Filtr = systém nebo algoritmus (program), který mění požadovaným způsobem spektrum vstupního signálu**.**

Příklady aplikace: potlačení rušivých vlivů, frekvenční analýza

Popis filtru: frekvenční charakteristika H(*f*), impulsní charakteristika *h*(*n*), diferenční rovnice (definice), přenosová funkce *H*(*z*).

je periodická vzhledem k diskrétnímu charakteru signálů.

s periodou ..?.. v případě frekvence, …?. v případě normované frekvence,
..?.. v případě kmitočtu a …?. v případě normovaného kmitočtu.

Lineární filtrace obecně

Filtr = systém nebo algoritmus (program), který mění požadovaným způsobem spektrum vstupního signálu**.**

Příklady aplikace: potlačení rušivých vlivů, frekvenční analýza

Popis filtru: frekvenční charakteristika H(*f*), impulsní charakteristika *h*(*n*), diferenční rovnice (definice), přenosová funkce *H*(*z*).

je periodická vzhledem k diskrétnímu charakteru signálů.

s periodou: $1/T_s$ v případě frekvence, 1 v případě normované frekvence,
$2\pi/T_s$ v případě úhlového kmitočtu
a 2π v případě normovaného úhlového kmitočtu.

Z transformace

Z transformace

Transformace Z je důležitý nástroj pro reprezentaci a manipulaci s diskrétními posloupnostmi. Můžeme ji považovat za zevšeobecnění Fourierovy transformace pro diskrétní soustavy a signály.

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . z^{-n}$$

- *z* je komplexní proměnná.
- nejčastěji uvažujeme jednostrannou transformaci: sumace od *n*=0.

Z transformace

Transformace Z je důležitý nástroj pro reprezentaci a manipulaci s diskrétními posloupnostmi. Můžeme ji považovat za zevšeobecnění Fourierovy transformace pro diskrétní soustavy a signály.

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . z^{-n}$$

- z je komplexní proměnná.
- nejčastěji uvažujeme jednostrannou transformaci: sumace od n=0.

z v polárních souřadnicích: $z = r \,.\, e^{j\omega T}$:

$$X\left(r.e^{j\omega T}\right) = \quad \text{...........?...........}$$

Z transformace

Transformace Z je důležitý nástroj pro reprezentaci a manipulaci s diskrétními posloupnostmi. Můžeme ji považovat za zevšeobecnění Fourierovy transformace pro diskrétní soustavy a signály.

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . z^{-n}$$

- z je komplexní proměnná.
- nejčastěji uvažujeme jednostrannou transformaci: sumace od n=0.

z v polárních souřadnicích: $z = r \,.\, e^{j\omega T}$:

$$X\left(r.e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n .\left[r.e^{j\omega T}\right]^{-n} =$$ ....?...........

Z transformace

Transformace Z je důležitý nástroj pro reprezentaci a manipulaci s diskrétními posloupnostmi. Můžeme ji považovat za zevšeobecnění Fourierovy transformace pro diskrétní soustavy a signály.

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . z^{-n}$$

- z je komplexní proměnná.
- nejčastěji uvažujeme jednostrannou transformaci: sumace od n=0.

z v polárních souřadnicích: $z = r \,.\, e^{j\omega T}$:

$$X(r.e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . \left[r.e^{j\omega T}\right]^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n r^{-n} . e^{-jn\omega T}$$

Z transformace

Transformace Z je důležitý nástroj pro reprezentaci a manipulaci s diskrétními posloupnostmi. Můžeme ji považovat za zevšeobecnění Fourierovy transformace pro diskrétní soustavy a signály.

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . z^{-n}$$

$$X\left(r.e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . \left[r.e^{j\omega T}\right]^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n r^{-n} . e^{-jn\omega T}$$

Pro *r*=1 platí, že ....?...

Z transformace

Transformace Z je důležitý nástroj pro reprezentaci a manipulaci s diskrétními posloupnostmi. Můžeme ji považovat za zevšeobecnění Fourierovy transformace pro diskrétní soustavy a signály.

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . z^{-n}$$

$$X(r.e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . [r.e^{j\omega T}]^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n r^{-n} . e^{-jn\omega T}$$

Pro *r*=1 platí, že Z transformace na jednotkové kružnici $|z|=1$ je shodná s Fourierovou transformací DTFT.

Z transformace - příklady

Jednotkový impuls: {1,0,0,…}

$$x_n = \delta_n \qquad X(z) = 1$$

Jednotkový skok: {1,1,1,…}

$$x_n = u_n \qquad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Exponenciální signál:

$$x_n = c^n \qquad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n z^{-n} = \frac{1}{1 - cz^{-1}}$$

$$\text{pro } n \geq 0 \text{ a } x_n = 0 \text{ pro } n < 0$$

Z transformace - konvoluce

$$\mathcal{Z}\{y(n)\} = \mathcal{Z}\{x(n) * h(n)\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h(n-k)\right\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h(n-k)\right]\cdot z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k)\right]\cdot z^{-n},$$

$$subst: m = n-k,$$

$$\mathcal{Z}\{y(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\right]\cdot z^{-m} = X(z)\cdot H(z).$$

Z transformace - konvoluce

$$Z\{y(n)\} = Z\{x(n) * h(n)\} = Z\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h(n-k)\right\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h(n-k)\right]\cdot z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k)\right]\cdot z^{-n},$$

$$subst: m = n-k,$$

$$\boxed{Z\{y(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\right]\cdot z^{-m} = X(z)\cdot H(z).}$$

Konvoluční teorém

Přenosová funkce

Z transformace – přenosová funkce

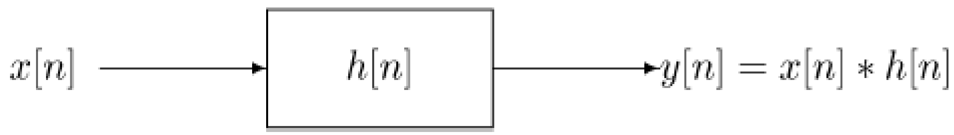
$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Z\{h_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n . z^{-n}$$

PŘENOSOVÁ (SYSTÉMOVÁ) FUNKCE

pro $z = e^{j\omega}$ platí, že $H(z)$ = ...?....................

Z transformace – přenosová funkce



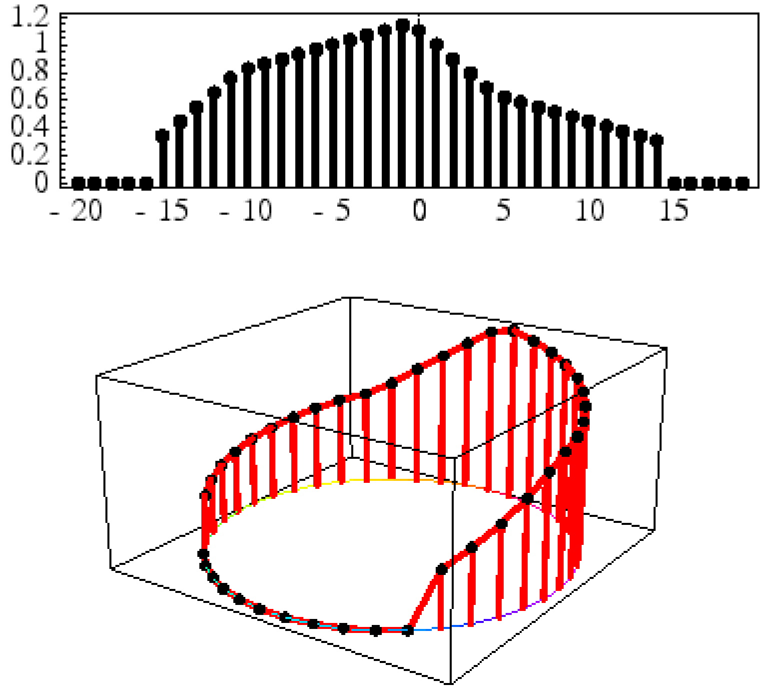
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Z\{h_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n . z^{-n}$$

pro $z = e^{j\omega}$ platí, že $H(z) = H(j\omega)$

Přenosová (systémová) funkce vyjadřuje na jednotkové kružnici $|z|=1$ frekvenční charakteristiku diskrétní soustavy.
Viz popis vztahu Z transformace a Fourierovy transformace.

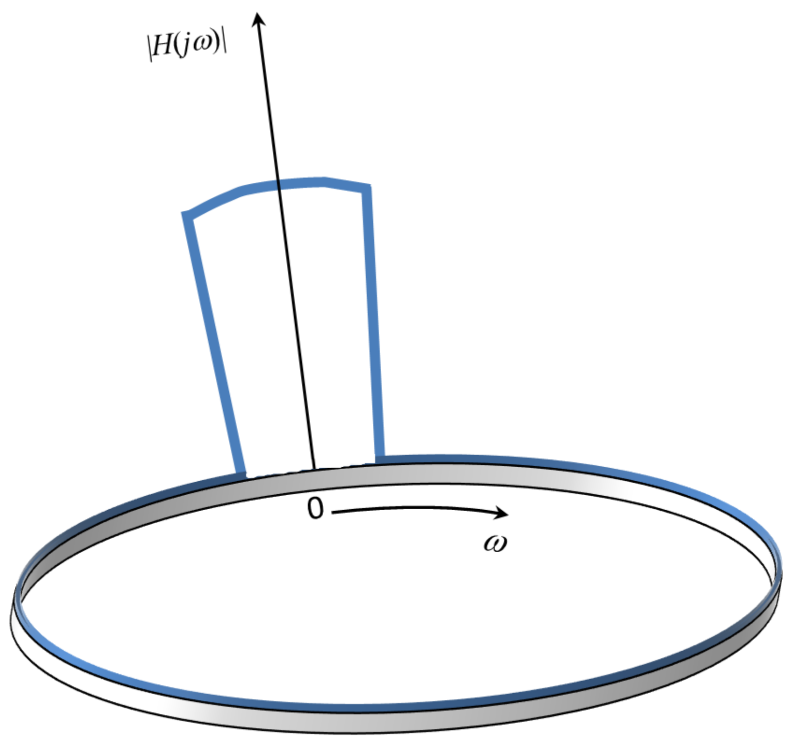
Z transformace – přenosová funkce

Přenosová (systémová) funkce vyjadřuje na jednotkové kružnici $|z|=1$ frekvenční charakteristiku diskrétní soustavy.
Viz popis vztahu Z transformace a Fourierovy transformace.



Z transformace – přenosová funkce

Přenosová (systémová) funkce vyjadřuje na jednotkové kružnici $|z|=1$ frekvenční charakteristiku diskrétní soustavy.
Viz popis vztahu Z transformace a Fourierovy transformace.



Z transformace – přenosová funkce

H(*z*) vyjádřená pomocí racionálně lomené funkce:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i \cdot z^{-i}}{\sum_{i=0}^{L} a_i \cdot z^{-i}}=A\cdot z^{L-M}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{M}(z-n_i)}{\prod_{i=1}^{L}(z-p_i)}.$$

n_i jsou ………?……….

p_i jsou ………?……….

Z transformace – přenosová funkce

$H(z)$ vyjádřená pomocí racionálně lomené funkce:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i \cdot z^{-i}}{\sum_{i=0}^{L} a_i \cdot z^{-i}}=A\cdot z^{L-M}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{M}(z-n_i)}{\prod_{i=1}^{L}(z-p_i)}.$$

n_i jsou NULY racionálně lomené funkce

p_i jsou PÓLY racionálně lomené funkce

Z transformace – přenosová funkce

$$H(j\omega) = H\left(e^{j\omega}\right) = A \cdot e^{j\omega(L-M)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{M}\left(e^{j\omega} - n_i\right)}{\prod_{i=1}^{L}\left(e^{j\omega} - p_i\right)},$$

$$\left|H(j\omega)\right| = |A| \cdot \left|e^{j\omega(L-M)}\right| \cdot \frac{\prod_{i=1}^{M}\left|e^{j\omega} - n_i\right|}{\prod_{i=1}^{L}\left|e^{j\omega} - p_i\right|} = |A| \cdot 1 \cdot \frac{d_1(\omega) \cdot d_2(\omega) \ldots d_M(\omega)}{q_1(\omega) \cdot q_2(\omega) \ldots q_L(\omega)},$$

$$\arg(H(j\omega)) = \sum_{i=1}^{M} \arg\left(e^{j\omega} - n_i\right) - \sum_{i=1}^{L} \arg\left(e^{j\omega} - p_i\right) + \arg(A) + (L-M) \cdot \omega$$

d – vzdálenosti mezi bodem ω na jednotkové kružnici a NULAMI přenosové funkce.
q – vzdálenosti mezi bodem ω na kružnici a PÓLY přenosové funkce.
|A| – zesílení systému

Z transformace – přenosová funkce

$$H(j\omega) = H \quad \prod^{M}(e^{j\omega} - n)$$

$$|H(j\omega)| = | \quad \omega) \quad \omega)},$$

$$\arg(H(j\omega) \quad M)\cdot\omega$$

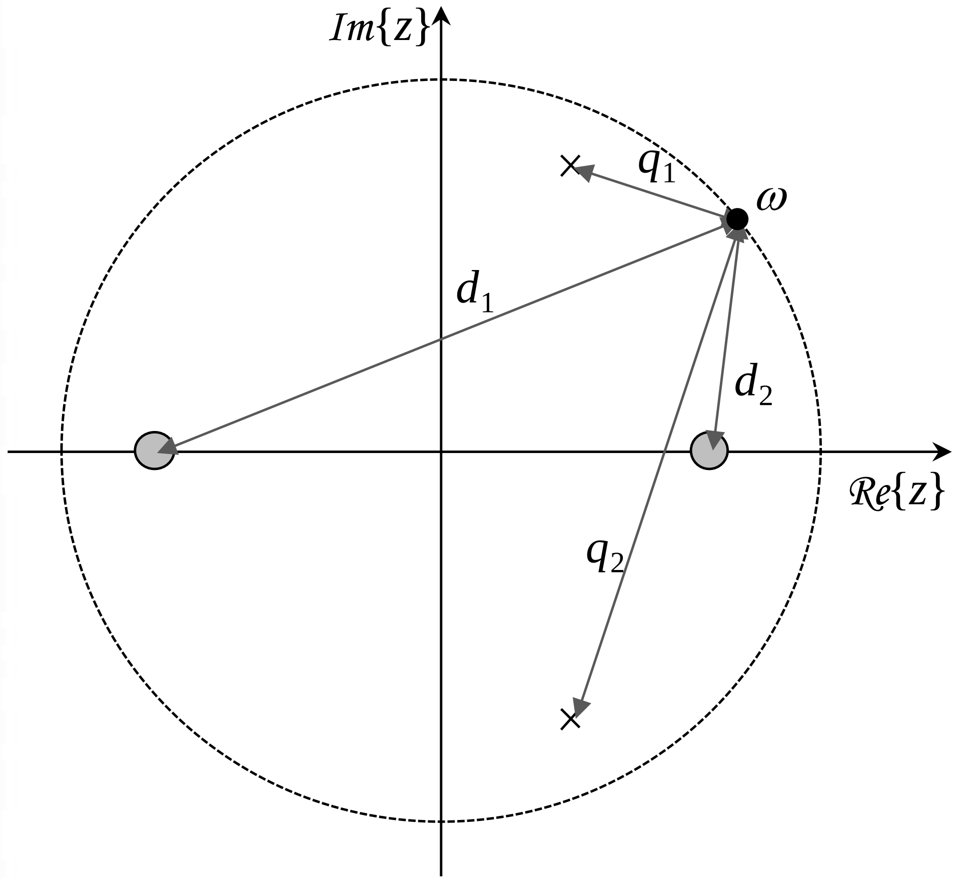
K čemu je odhad tvaru amplitudové frekvenční charakteristiky z přenosové funkce?

Odhadnutím tvaru frekvenční charakteristiky systému můžeme odhadnout funkci systému z hlediska filtrování (DP HP, PP, apod.)

Jednou z metod návrhu filtrů je intuitivní rozkládání nulových bodů a pólů.

d – vz … nkce.
q – vz
|A| – zesílení systému

Z transformace – přenosová funkce



d – vzdálenosti mezi bodem ω na jednotkové kružnici a NULAMI přenosové funkce.
q – vzdálenosti mezi bodem ω na kružnici a PÓLY přenosové funkce.
|A| – zesílení systému

Stabilita diskrétního systému

Stabilita = ………………?………………

Stabilita diskrétního systému

Stabilita = tendence systému reagovat přiměřeně na trvající podnět a po jeho zániku se vracet do výchozího stavu.

BIBO: bounded input -> bounded output

Kritérium v časové oblasti:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Kritérium v obrazové oblasti:

Lineární diskrétní systém (jehož obrazový přenos je racionální lomená funkce) je stabilní tehdy a jen tehdy, když všechny póly p_i jeho obrazového přenosu leží uvnitř jednotkové kružnice, p_i <1, $\forall i$.

Zpětná Z transformace

$$x_n = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_c X(z).z^{n-1} dz$$

- jen pro doplnění, bez odvození.

3. cvičení

1. Impulsní charakteristika diskrétního systému má tvar: $h[n]=0.5^n u[n]$.
   Určete přenosovou funkci systému a ověřte, zda je systém stabilní.

3. Impulsní charakteristika diskrétního systému má tvar: $h[n]=1.5^n u[n]$.
   Určete přenosovou funkci systému a ověřte, zda je systém stabilní.

4. Je dán systém s přenosovou funkcí

   $$H(z)=K\frac{z+1}{z}=K\left(1+z^{-1}\right)$$

   Nakreslete rozložení nulových bodů a pólů.
   Odhadněte amplitudovou frekvenční c
   Zjistěte diferenční rovnici systému.
   Zjistěte impulsní charakteristiku systém
   Na závěr vše ověřte v MATLABu (fvtool, freqz).
   O jaký filtr jde (HP, DP, PP) ?

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Otázky ?

jakub.jamarik@med.muni.cz