Lineární a adaptivní zpracovní dat

4. Lineární filtrace II: FIR, IIR

Daniel Schwarz
Jakub Jamárik

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Opakování

Co je to filtrace?
Co je to filtr? A jak ho popisujeme?
Jaký je vztah Z transformace a Fourierovy transformace?
Jak je definována přenosová funkce diskrétního systému?
Jaký je vztah mezi přenosovou funkcí systému a jeho frekvenční charakteristikou?
Co jsou to nulové body a póly přenosové funkce a jak je vypočítáme?
Popište, co je to stabilita systému.
Jaká pravidla platí pro impulsní charakteristiku a přenosovou funkci stabilního diskrétního systému?

Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

Mějme LTI systém s přenosovou funkcí ve tvaru racionálně lomené funkce:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i \cdot z^{-i}}{\sum_{i=0}^{L} a_i \cdot z^{-i}}=A\cdot z^{L-M}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{M}(z-n_i)}{\prod_{i=1}^{L}(z-p_i)}.$$

kde $A = b_0/a_0$, n_i jsou ......?....... a p_i jsou ....?......... .

Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

Mějme LTI systém s přenosovou funkcí ve tvaru racionálně lomené funkce:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i \cdot z^{-i}}{\sum_{i=0}^{L} a_i \cdot z^{-i}} = A \cdot z^{L-M} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{M} (z - n_i)}{\prod_{i=1}^{L} (z - p_i)}.$$

kde $A = b_0/a_0$, n_i jsou nuly a p_i jsou póly racionálně lomené funkce.

$$Y(z).\sum_{i=0}^{L} a_i .z^{-i} = X(z).\sum_{i=0}^{M} b_i .z^{-i}$$

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i .x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i .y_{n-i}$$

zpětná Z-transformace, věta o linearitě a posunu, a_0=1.

Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

Interpretace rovnice: diskrétní soustava / systém uchovává v paměti starší vzorky vstupního i výstupního signálu.

Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

Interpretace rovnice: diskrétní soustava / systém uchovává v paměti starší vzorky vstupního i výstupního signálu.

?

?

Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

Interpretace rovnice: diskrétní soustava / systém uchovává v paměti starší vzorky vstupního i výstupního signálu.

Klouzavý průměr MA

Autoregresní člen AR

Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

<u>Interpretace rovnice</u>: diskrétní soustava / systém uchovává v paměti starší vzorky vstupního i výstupního signálu.

Klouzavý průměr MA

Autoregresní člen AR

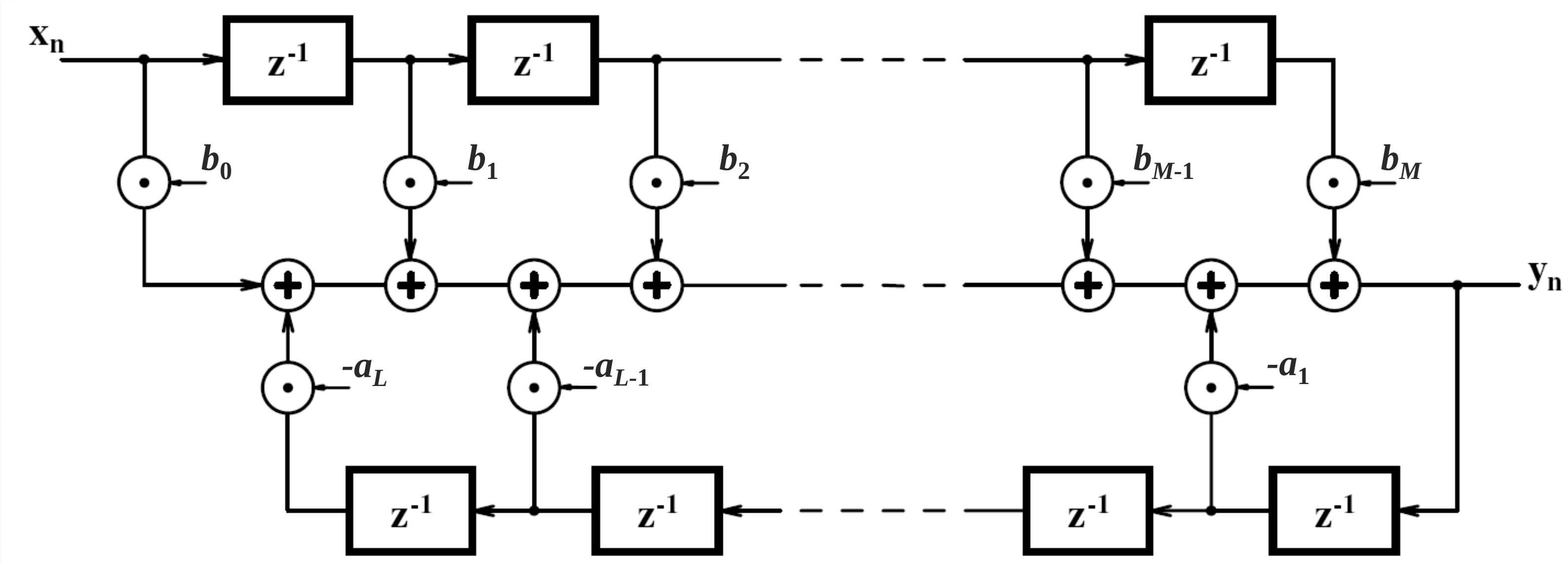
↓

Ovlivňuje rychlost odezvy, charakter jejího zanikání, stabilitu soustavy.

Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

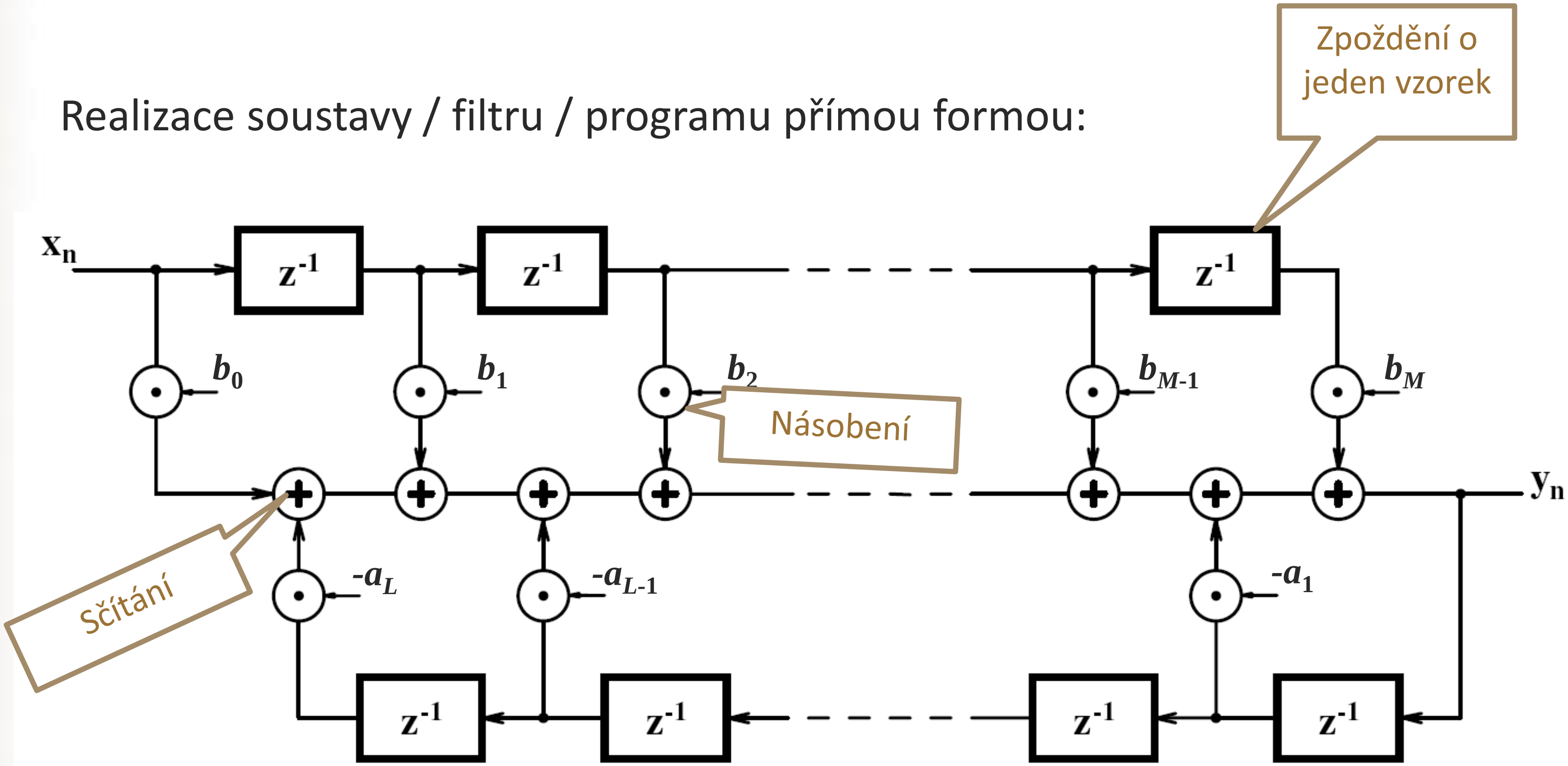
Realizace soustavy / filtru / programu přímou formou:



Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

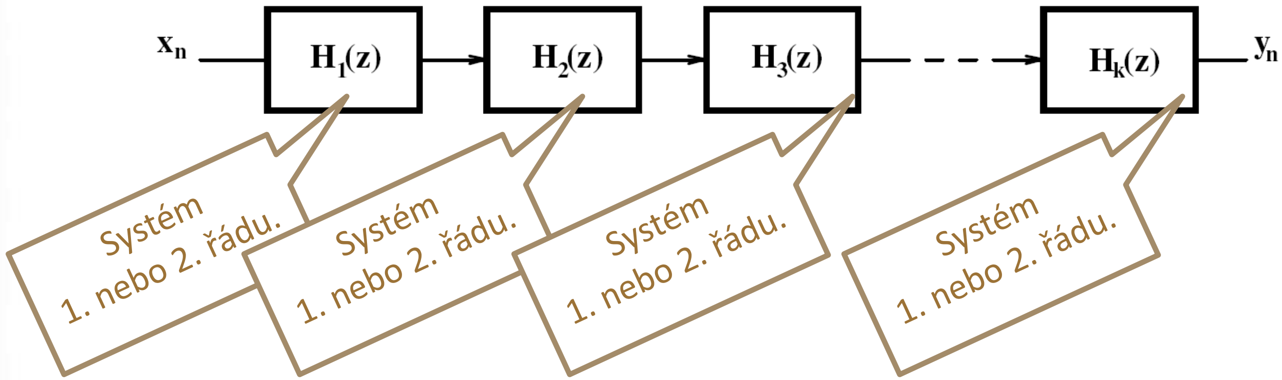
Realizace soustavy / filtru / programu přímou formou:



Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

Další formy realizace filtru / soustavy/ programu:

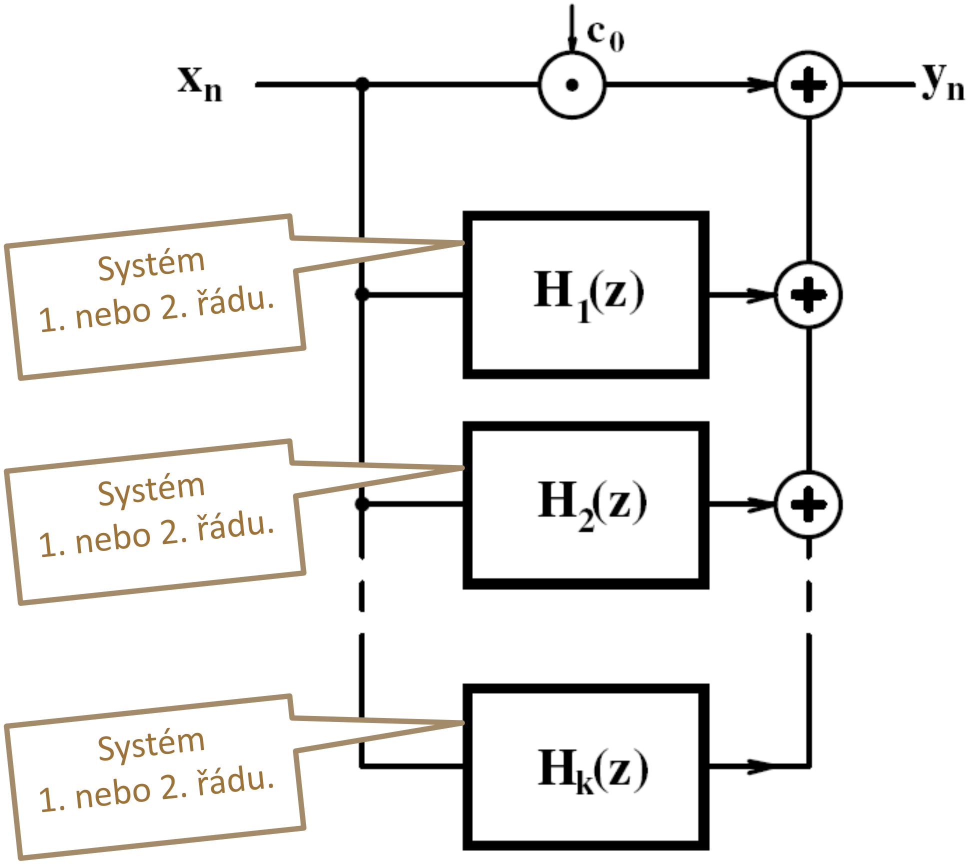
Kaskádní:



Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

Další formy realizace filtru / soustavy/ programu:

Paralelní:



Systémy s konečnou impulsní charakteristikou

FIR – finite impulse response

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \cancel{\sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}}$$

pouze člen MA
(moving average)

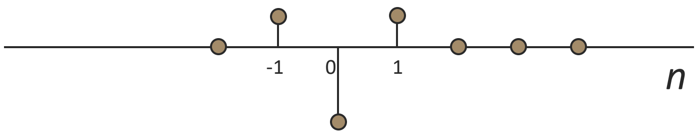
nerekurzivní realizace
(většinou, ale nemusí vždy)

Systémy s konečnou impulsní charakteristikou

FIR PŘÍKLAD: hranový detektor

$$y[n] = x[n+1] - 2x[n] + x[n-1]$$

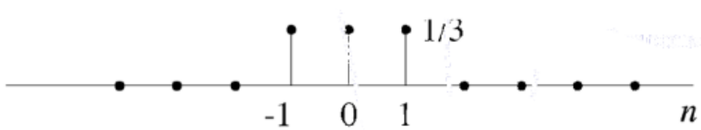
$$h[n] = \{\delta[n-1] - 2\delta[n] + \delta[n+1]\}$$



FIR PŘÍKLAD: „vyhlazovací“ systém

$$y[n] = \frac{1}{3}\{x[n-1] + x[n] + x[n+1]\}$$

$$h[n] = \frac{1}{3}\{\delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]\}$$



Systémy s konečnou impulsní charakteristikou

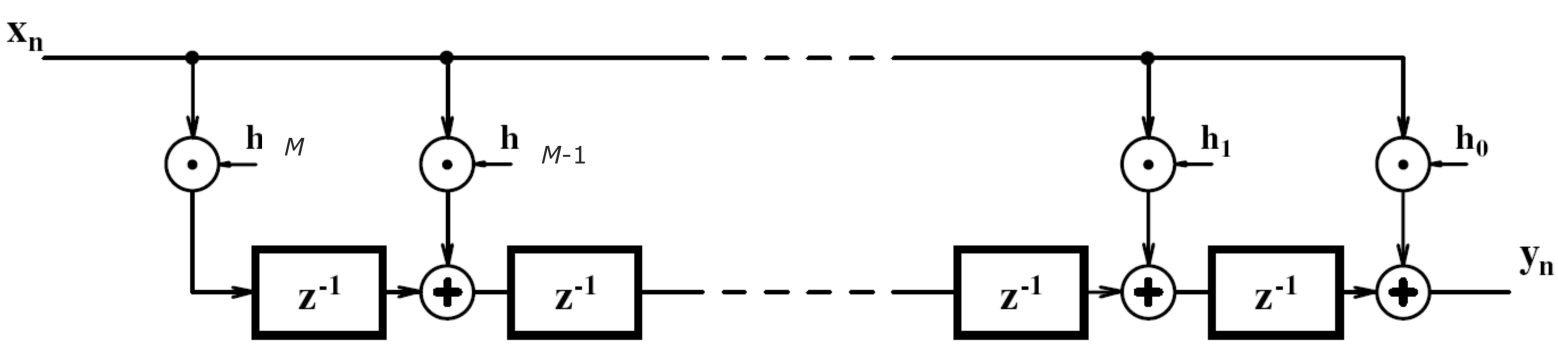
FIR – finite impulse response

Realizační koeficienty odpovídají hodnotám impulsní charakteristiky

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{k=0}^{M} b_i \,.\, z^{-k}$$

$$y(n)=b_0\,.\,x(n)+b_1\,.\,x(n-1)+b_2\,.\,x(n-2)+\ldots+b_{M-1}\,.\,x(n-M)=$$

$$=\sum_{k=0}^{M} b_k\,.\,x(n-k)= \quad \left|\text{subst}: \; b_k=h(n)\right| \quad =h(n)*x(n).$$



Systémy s konečnou impulsní charakteristikou

FIR – finite impulse response

Realizační koeficienty odpovídají hodnotám impulsní charakteristiky

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M} b_i . z^{-k}$$

$$y(n) = b_0 . x(n) + b_1 . x(n-1) + b_2 . x(n-2) + \ldots + b_{M-1} . x(n-M) =$$

$$= \sum_{k=0}^{M} b_k . x(n-k) = \left| \text{subst}: \; b_k = h(n) \right| = h(n) * x(n).$$

Počet pólů přenosové funkce:...............?............, kde? ....?..................

Počet nulových bodů přenosové funkce:...............?............, kde? ....?..................

Systémy s konečnou impulsní charakteristikou

FIR – finite impulse response

Realizační koeficienty odpovídají hodnotám impulsní charakteristiky

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M} b_i . z^{-k}$$

$$y(n) = b_0 . x(n) + b_1 . x(n-1) + b_2 . x(n-2) + \ldots + b_{M-1} . x(n-M) =$$

$$= \sum_{k=0}^{M} b_k . x(n-k) = \left| \text{subst}: \; b_k = h(n) \right| = h(n) * x(n).$$

Počet pólů přenosové funkce:.M, kde? ....?..................

Počet nulových bodů přenosové funkce:M, kde? ....?..................

Systémy s konečnou impulsní charakteristikou

FIR – finite impulse response

Realizační koeficienty odpovídají hodnotám impulsní charakteristiky

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M} b_i . z^{-k}$$

$$y(n) = b_0 . x(n) + b_1 . x(n-1) + b_2 . x(n-2) + \ldots + b_{M-1} . x(n-M) =$$

$$= \sum_{k=0}^{M} b_k . x(n-k) = \quad \left| \text{subst} : \; b_k = h(n) \right| \quad = h(n) * x(n).$$

Počet pólů přenosové funkce:.M, kde? V bodě *z*=0 (násobný pól v počátku, který vyjadřuje jen fázový posun – nutno vyjádřit *H*(*z*) v kladných mocninách *z*).

Počet nulových bodů přenosové funkce:M, kde? Kdekoli v rovině *z*.

Filtry s konečnou impulsní charakteristikou

FIR filtry mohou mít přesně lineární fázi, a to platí-li:

$$h(n) = \pm h(M-n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, M.$$

- osová nebo bodová souměrnost impulsní charakteristiky
- tj. impulsní charakteristika je symetrická nebo antisymetrická.

Filtry s lineární fází mají speciální konfiguraci nulových bodů obrazového přenosu:
Je-li $H(n_i) = 0$, je také $H(1/n_i) = 0$.
Pokud má systém reálné koeficienty, platí také: $H(n_i^*)=H(1/n_i)$.

$\downarrow$

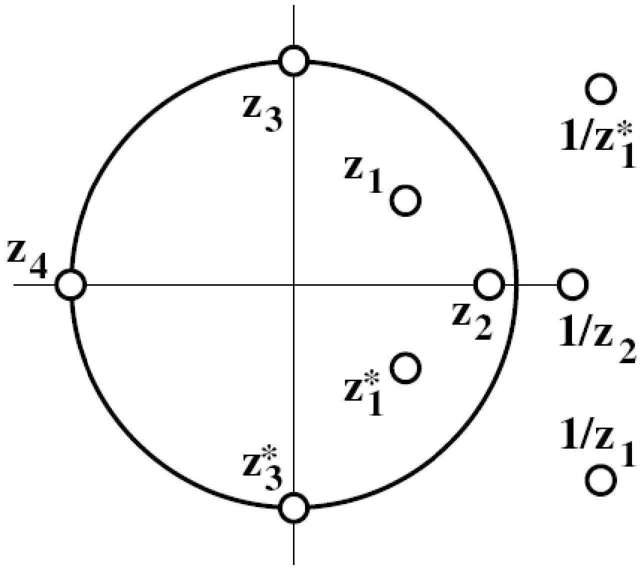
Nulové body se vyskytují ve čtveřicích.

Filtry s konečnou impulsní charakteristikou

FIR filtry mohou mít přesně lineární fázi, a to platí-li:

$$h(n) = \pm h(M-n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, M.$$

- osová nebo bodová souměrnost impulsní charakteristiky
- tj. impulsní charakteristika je symetrická nebo antisymetrická.



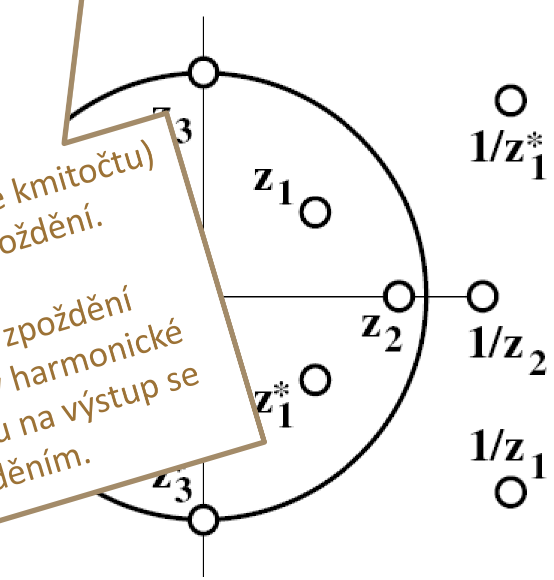
Nuly jsou v komplexně sdružených nebo v recipročních párech.

Filtry s konečnou impulsní charakteristikou

FIR filtry mohou mít přesně lineární fázi, a to platí-li:

$$h(n)=\pm h(M-n),\qquad n=0,1,2,\dots,M.$$

- osová nebo bodová souměrnost impulsní charakteristiky
- tj. impulsní charakteristika je symetrická nebo antisymetrická.



Nuly jsou v komplexně sdružených nebo v recipročních párech.

Záporná derivace fáze (podle kmitočtu) se nazývá skupinové zpoždění.

Konstantní skupinové zpoždění znamená, že se všechny harmonické složky signálu dostanou na výstup se stejným zpožděním.

Filtry s konečnou impulsní charakteristikou

FIR filtry – vlastnosti:

- jsou vždy stabilní, neboť všechny póly leží v nule
(pokud nejsou záměrně realizovány rekurzivním systémem se zpětnou vazbou)

- většinou nerekurzivní realizace

- možnost lineární fázové charakteristiky

- relativně snadná programová (hardwarová) realizace

- pro dosažení strmých charakteristik je třeba použít vyšší stupeň filtru než u IIR filtrů

- s rostoucím řádem roste zpoždění

- návrh FIR filtru:
    - vzorkování frekvenční charakteristiky
    - váhování impulsní charakteristiky

Filtry s konečnou impulsní charakteristikou

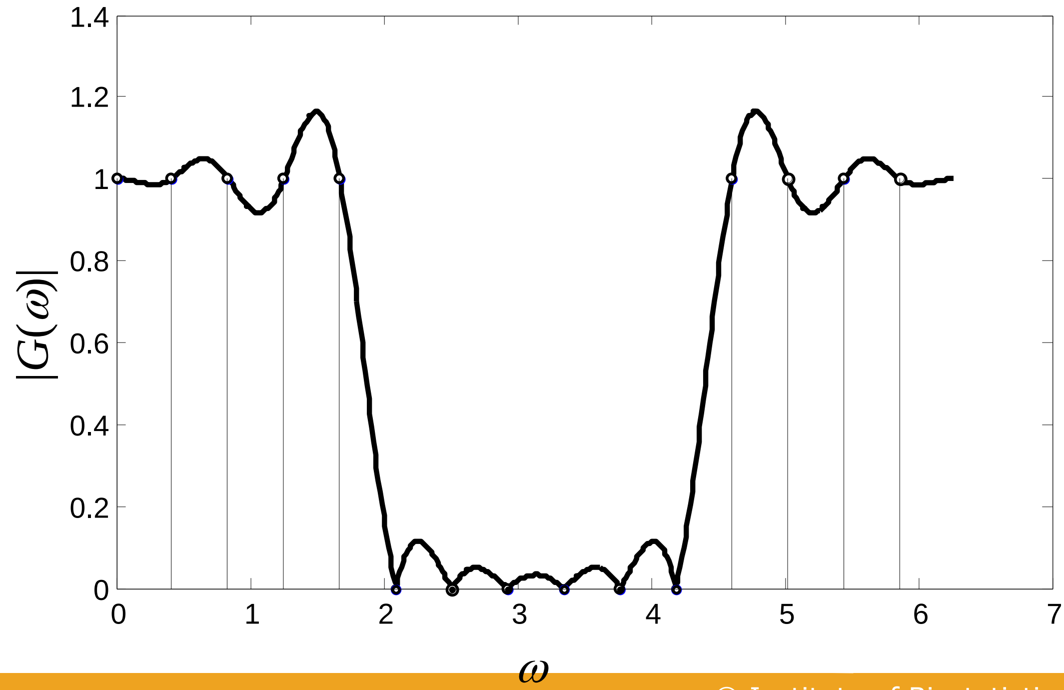
Návrh FIR filtru vzorkováním frekvenční charakteristiky

1. Zadávají se jednotlivé body (vzorky) amplitudové frekvenční charakteristiky.
2. Mimo vzorkovací body se předpokládá chování libovolné (zakmitávání).
3. Impulsní charakteristika se vypočítá pomocí inverzní DFT.
4. Fázová charakteristika se zadává nulová, výsledná impulsní odezva se kauzalizuje pomocí přerovnání vzorků (ifftshift).

Filtry s konečnou impulsní charakteristikou

Návrh FIR filtru vzorkováním frekvenční charakteristiky

1. Zadávají se jednotlivé body (vzorky) amplitudové frekvenční charakteristiky.
2. Mimo vzorkovací body se předpokládá chování libovolné (zakmitávání).
3. Impulsní charakteristika se vypočítá pomocí inverzní DFT.
4. Fázová charakteristika se zadává nulová, výsledná impulsní odezva se kauzalizuje pomocí přerovnání vzorků (ifftshift).



Systémy s nekonečnou impulsní charakteristikou

IIR – infinite impulse response

Autoregresní
člen
AR

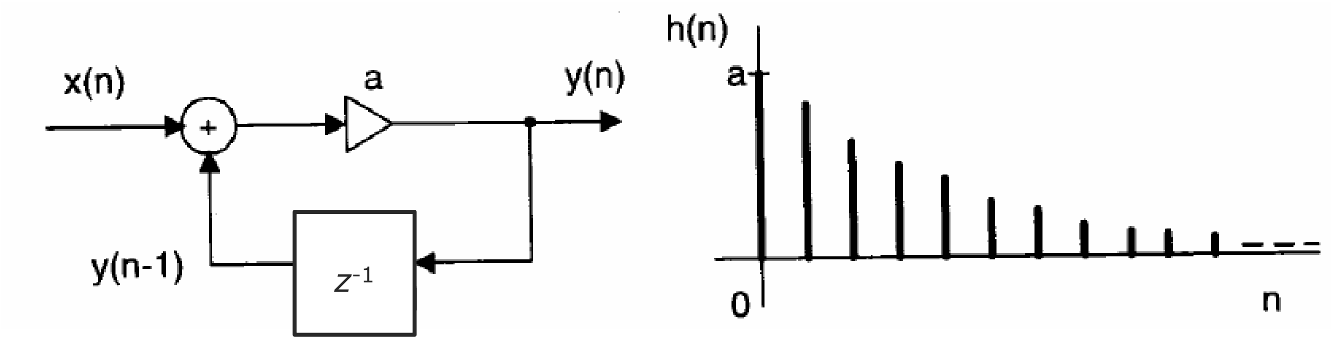
$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

Klouzavý
průměr
MA

vždy rekurzivní realizace

Systémy s nekonečnou impulsní charakteristikou

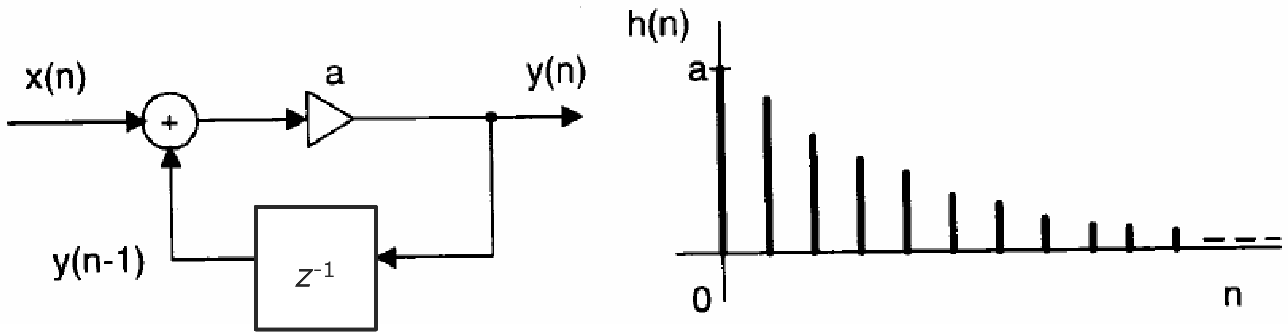
IIR PŘÍKLAD: „vyhlazovací“ systém



H(z) = $az/(z-a)$. Pro a>1 je filtr nestabilní.

Systémy s nekonečnou impulsní charakteristikou

IIR PŘÍKLAD: „vyhlazovací" systém



H(z) = $az/(z-a)$. Pro a>1 je filtr nestabilní.

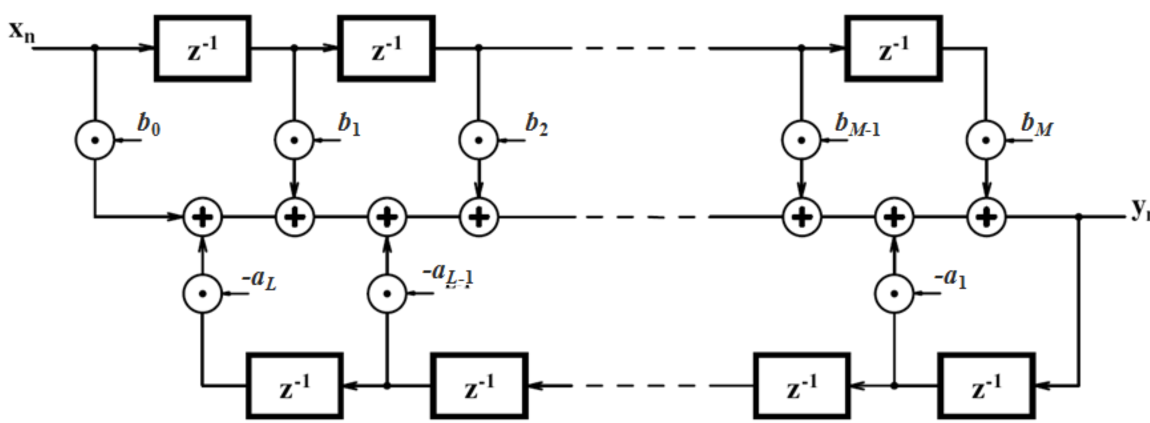
Tip: co lze získat tzv. dlouhým dělením polynomů ?

Systémy s nekonečnou impulsní charakteristikou

IIR :

- vyžadují alespoň jednu zpětnovazební smyčku, jsou vždy rekurzivní
- přenosová funkce = podíl polynomů

Nuly přenosové funkce souvisejí s nerekurzivní částí. Póly přenosové funkce souvisejí s rekurzivní částí.



Filtry s nekonečnou impulsní charakteristikou

IIR filtry – vlastnosti:

- s filtry IIR lze dosáhnout velmi strmé přechody mezi propustným a nepropustným pásmem, a to i při malém řádu filtru.

- filtr je vždy rekurzivní (se zpětnými vazbami), může být nestabilní (pro amplitudově omezený vstupní signál by generoval signál s neustále rostoucími amplitudami).

- Filtr IIR bude stabilní, pokud všechny jeho póly leží uvnitř jednotkové kružnice.

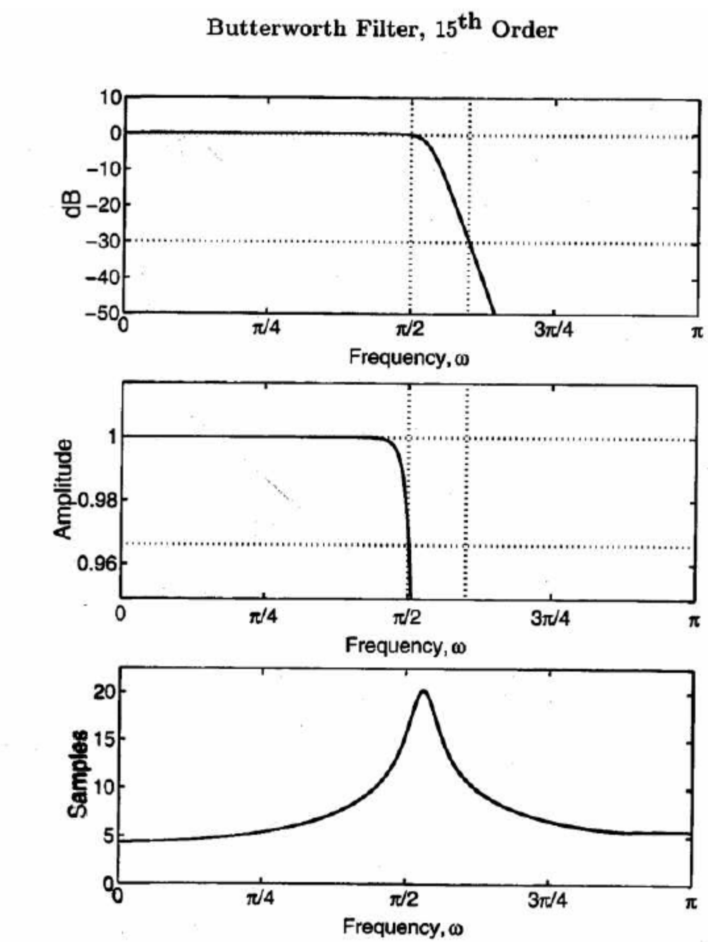
- Filtry IIR nemají lineární průběh fázové charakteristiky.

- poměrně složitý a méně intuitivní návrh:
    - rozmisťování nulových bodů a pólů
    - optimalizační návrhy podle frekvenční charakteristiky (vedou na řešení soustavy nelineárních rovnic)
    - přístupy založené na podobnosti s analogovými systémy

Není vztah mezi žádoucí frekvenční charakteristikou a systémovými konstantami (srovnej s FIR).

Filtry s nekonečnou impulsní charakteristikou

IIR filtry – příklad:



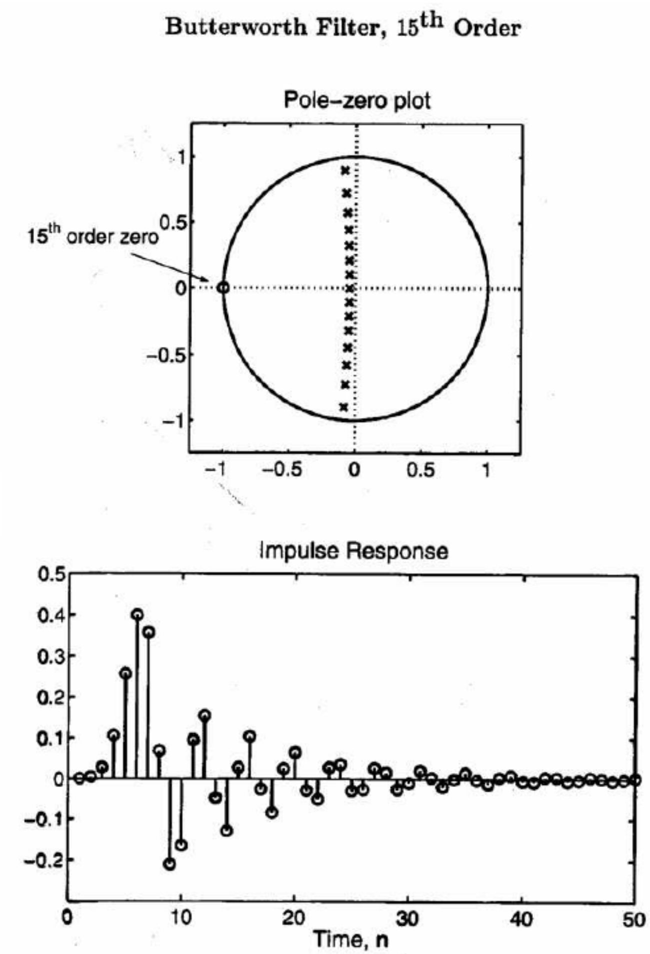


Figure 4: Pole-Zero Plot, Impulse Response

Terminologie: IIR, FIR, MA, AR

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

FIR filtry: a_i=0, pro všechna *i.*
Označovány také jako „moving average“ nebo „all-zero“ filtry.

IIR filtry: a_i<>0, pro alespoň jedno *i.*
Zahrnují:

- autoregresivní (AR) filtry
- moving-average, autoregresivní (ARMA) filtry

Terminologie: IIR, FIR, MA, AR

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

FIR filtry: a_i=0, pro všechna *i.*
Označovány také jako „moving average“ nebo „all-zero“ filtry.

IIR filtry: a_i<>0, pro alespoň jedno *i.*
Zahrnují:

- autoregresivní (AR) filtry
- moving-average, autoregresivní (ARMA) filtry

AR filtry: b_i=0, kromě b_0 .
Výstup závisí pouze na ....?...................

Terminologie: IIR, FIR, MA, AR

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

FIR filtry: a_i=0, pro všechna *i.*

Označovány také jako „moving average“ nebo „all-zero“ filtry.

IIR filtry: a_i<>0, pro alespoň jedno *i.*

Zahrnují:

- autoregresivní (AR) filtry
- moving-average, autoregresivní (ARMA) filtry

AR filtry: b_i=0, kromě b_0.

Výstup závisí pouze na aktuální hodnotě na vstupu a na konečném počtu starších vzorků výstupního signálu.

Označovány také jako:
„all-pole“, „purely recursive“, „autoregressive“

Terminologie: IIR, FIR, MA, AR

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

FIR filtry: a_i=0, pro všechna *i.*

Označovány také jako „moving average“ nebo „all-zero“ filtry.

IIR filtry: a_i<>0, pro alespoň jedno *i.*

Zahrnují:

- autoregresivní (AR) filtry
- moving-average, autoregresivní (ARMA) filtry

ARMA filtry: a_i , b_i nenulové

Označovány také jako:
„pole-zero“, „autoregressive, moving-average “

Terminologie: IIR, FIR, MA, AR

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

DOPORUČENÍ:

- pro filtry a lineární systémy používat označení FIR, IIR
- označení AR, MA, ARMA používat pro popis či modely stochastických procesů, které generují data náhodné povahy

4. cvičení

1. Je dán systém s přenosovou funkcí $H(z)=\dfrac{1-z^{-8}}{1+z^{-2}}$

   Nakreslete rozložení nulových bodů a pólů.
   Odhadněte modulovou frekvenční charakteristiku.
   Zjistěte diferenční rovnici systému.
   Zjistěte impulsní charakteristiku systému.
   Na závěr vše ověřte v MATLABu (fvtool, freqz).
   O jaký filtr jde (FIR, IIR) ?
   O jaký filtr jde (HP, DP, PP) ?

4. cvičení

2. Diskrétní soustava má přenosovou funkci H(z): $1/(1-0.5z^{-1})$. Určete diferenční rovnici systému.

4. cvičení

3. Navrhněte FIR filtr pro odstranění rušivých složek v časové řadě reprezentující sběr údajů o koncentraci toxické látky v říčním toku. Sběr dat probíhá s hodinovou vzorkovací periodou. Změny v koncentracích jsou pozvolné, odehrávají se v týdenním rytmu (provoz chemické fabriky). Rušivé složky, které je potřeba potlačit, souvisejí se stochastickým procesem (počasí, tj. zejména srážky, ale i teplota), který generuje signálové komponenty s nejvyšší periodou okolo 6 h. Zkontrolujte správnost vzorkování v experimentu a pro návrh filtru volte metodu vzorkování frekvenční charakteristiky.

- Volte filtr s 19 vzorky impulsní charakteristiky.
- Metodou analogie navrhněte Butterworthův filtr (IIR) se stejným řádem filtru a porovnejte strmost přechodu mezi propustnýma nepropustným pásmem.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Otázky ?

jakub.jamarik@med.muni.cz