

# Lineární a adaptivní zpracování dat

## 5. Kumulační zvýrazňování užitečné složky časových řad v šumu I.



Daniel Schwarz  
Jakub Jamárik



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Investice do rozvoje vzdělávání

# Opakování

Co je to filtrace?

Co je to filtr? A jak ho popisujeme?

Co je to FIR?

Co je to IIR?

Co je to AR-MA?

Jaký je rozdíl mezi FIR systémem a MA systémem?

Může být FIR systém realizován rekurzivním algoritmem?

Může být AR-MA systém realizován nerekurzivním algoritmem?

MA systémy jsou vždy stabilní. Je to pravda? Proč?

# Osnova

- Opakování: lineární filtrace
- Kumulační zvýrazňování signálů v šumu I
  - Repetiční signál / repetiční časová řada
  - Princip kumulačních technik
  - Podmínky pro aplikaci kumulačních technik
  - Zlepšování výkonového poměru signálu k šumu
  - Cvičení:
    - ruční výpočty zlepšení SNR
    - grafické znázornění dynamických vlastností kumulačních technik

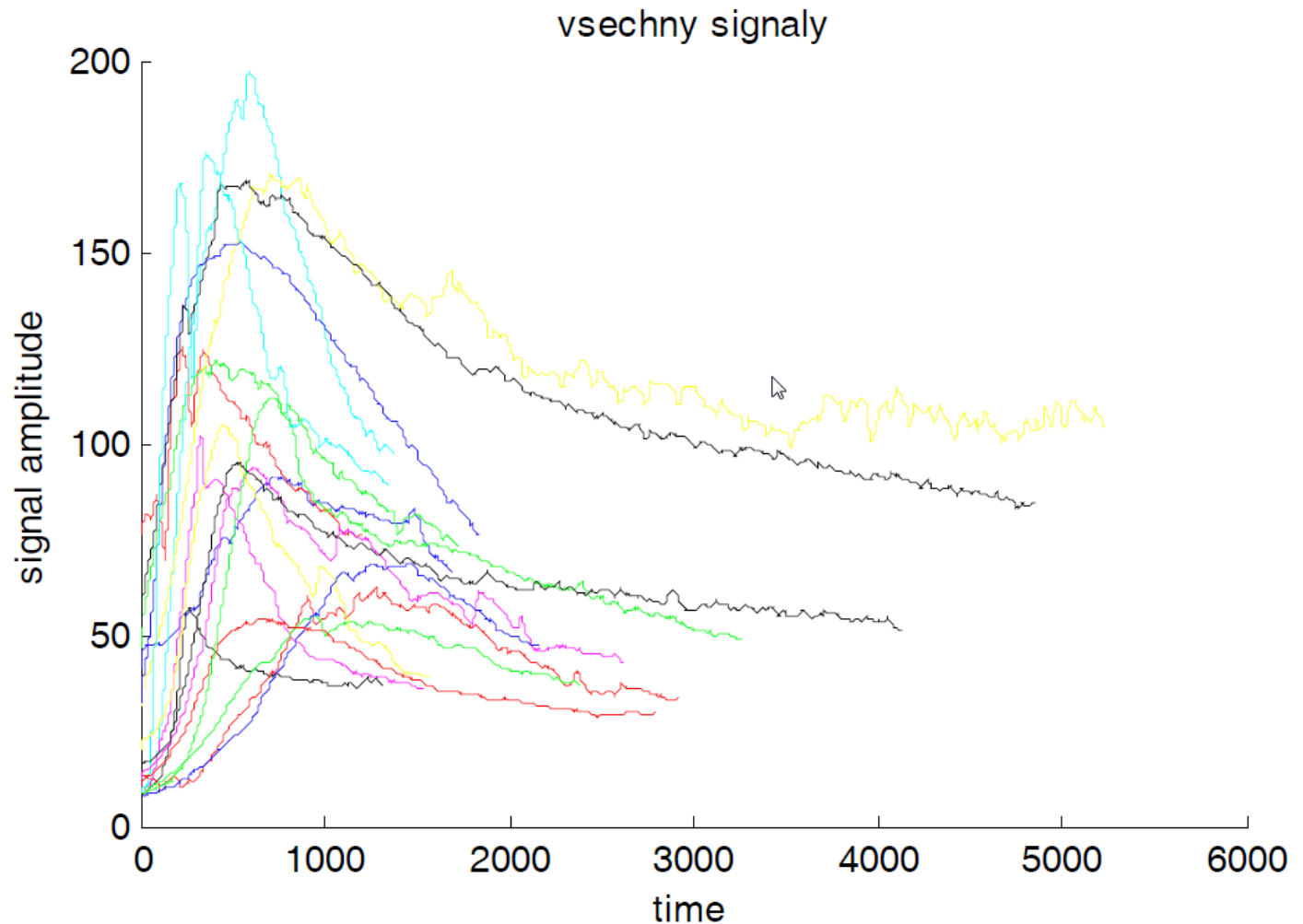
**Kumulační zvýrazňování signálu v šumu = vyhlazování repetičních časových řad**

# Zvýrazňování užitečné složky dat skryté v šumu

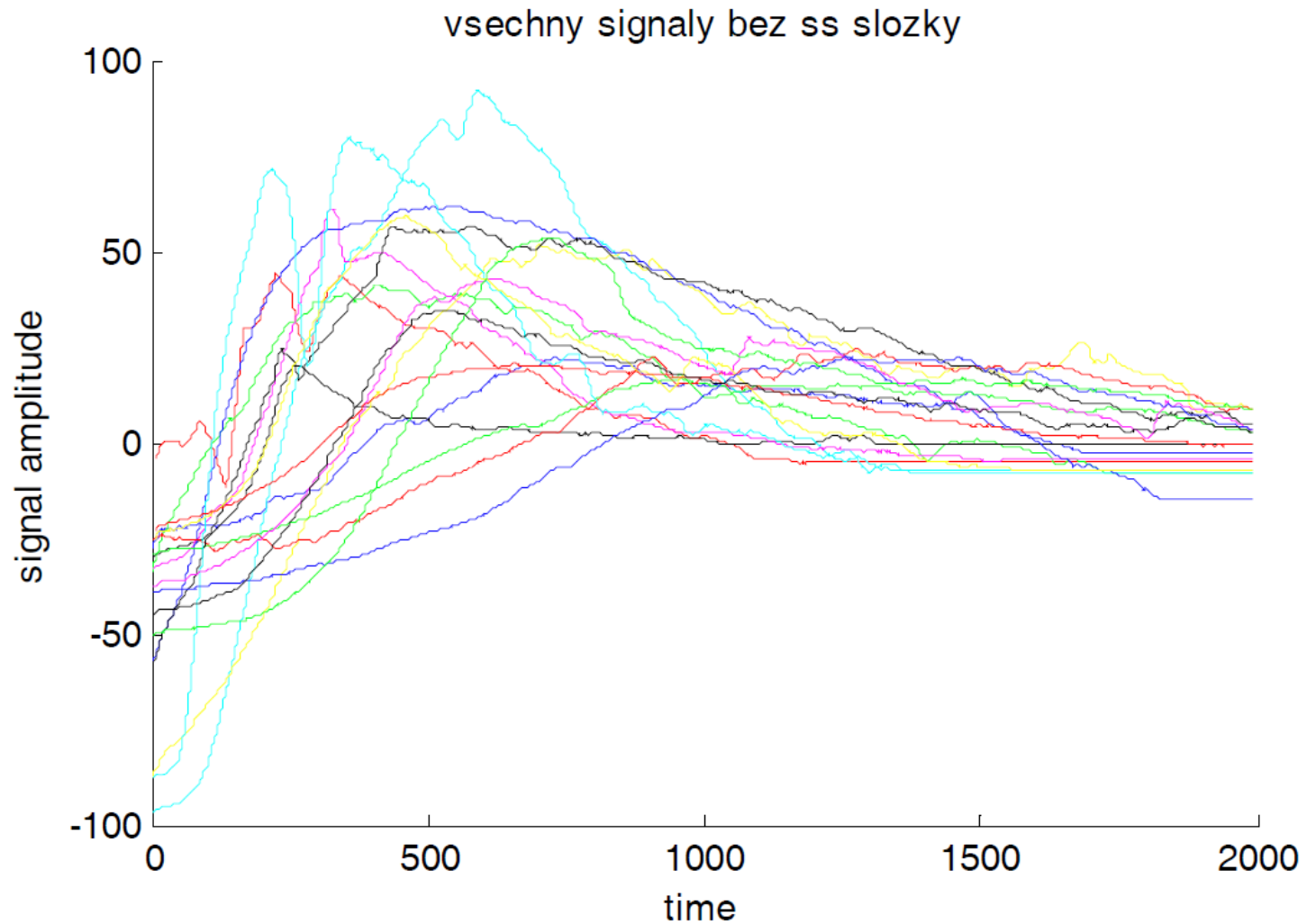
Techniky známé také pod označením:

- zvyšování poměru signálu k šumu
- metoda kumulačních součtů
- kumulace či průměrování
- signal averaging

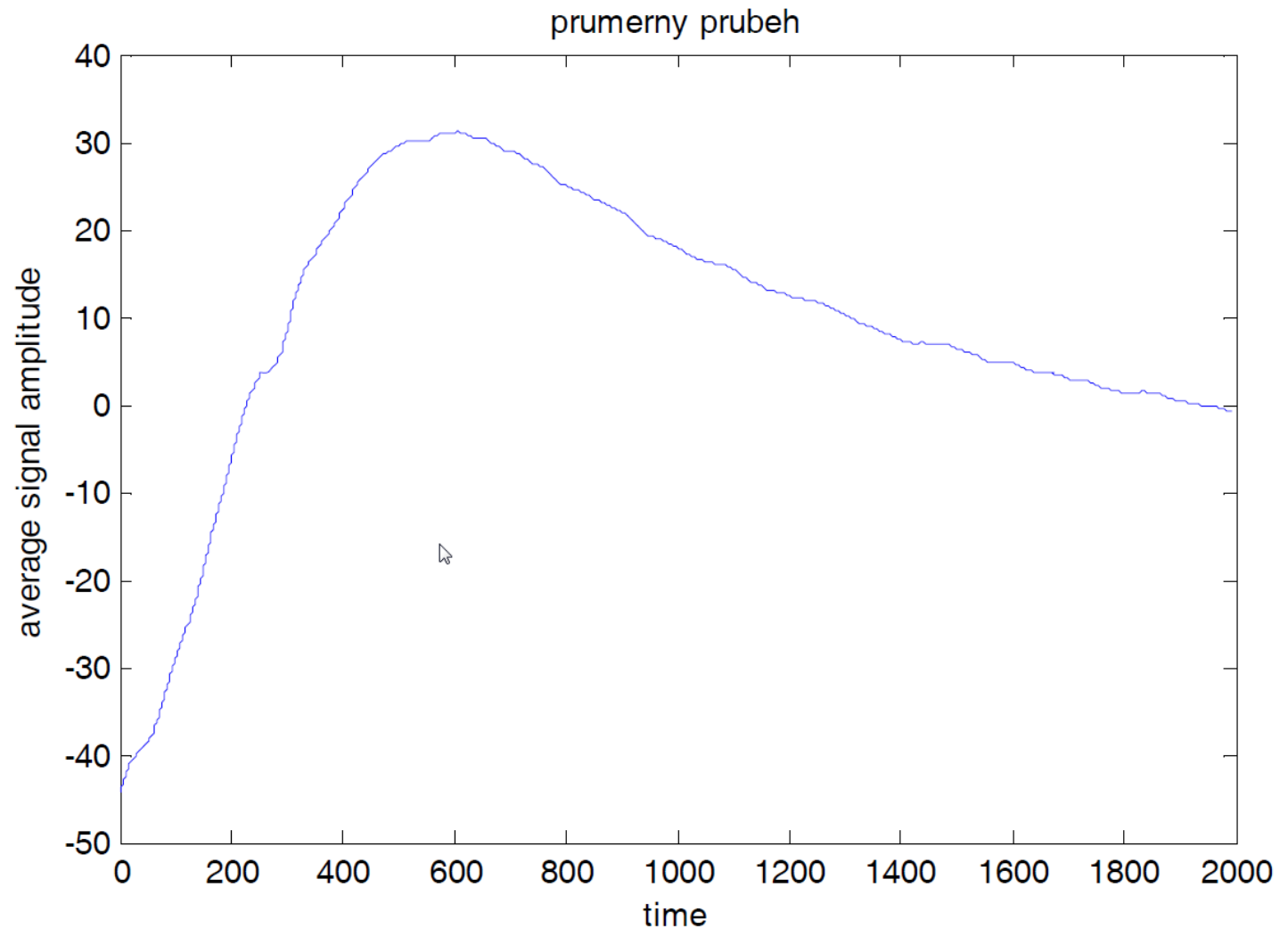
# Motivační příklad ze života: vazospazmy



# Motivační příklad ze života: vazospazmy

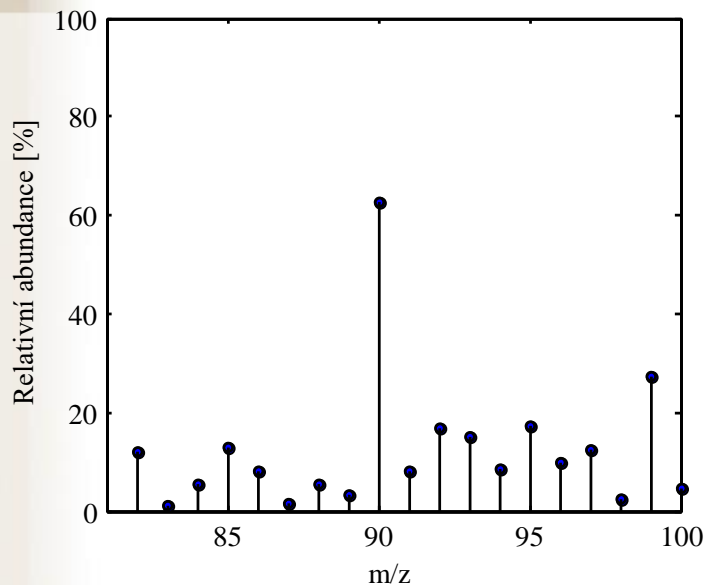


# Motivační příklad ze života: vazospazmy

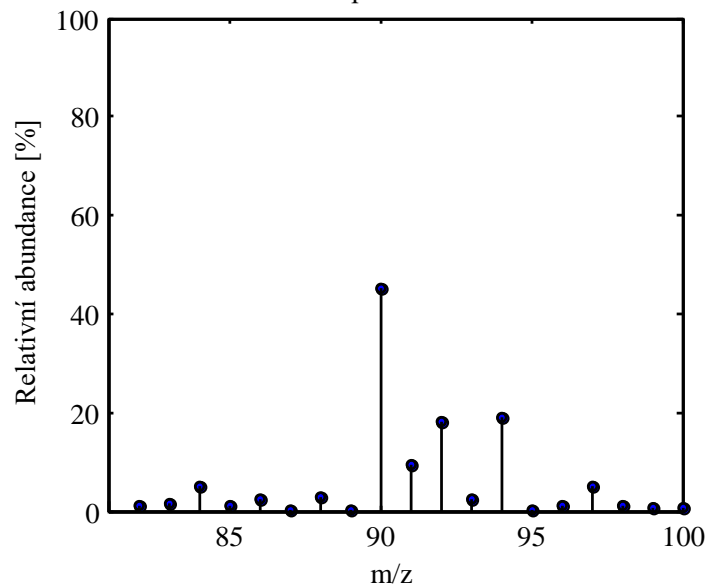


# Motivační příklad ze života: hmotnostní spektroskopie

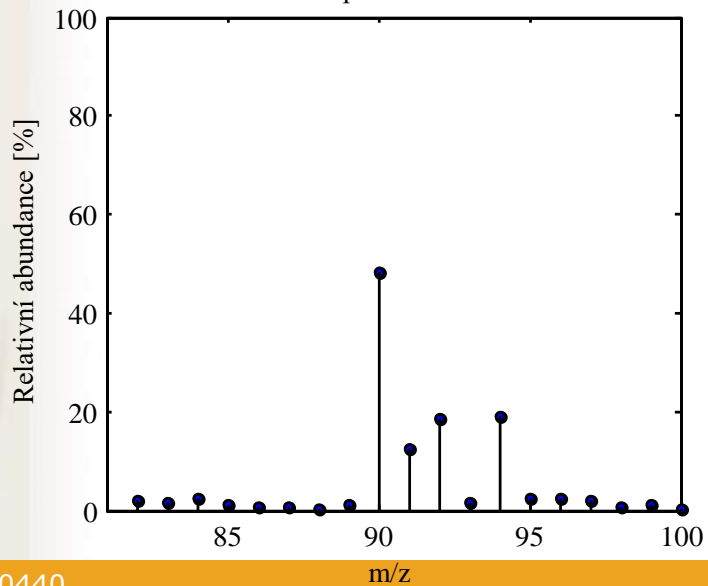
Zirconium: 1 měření



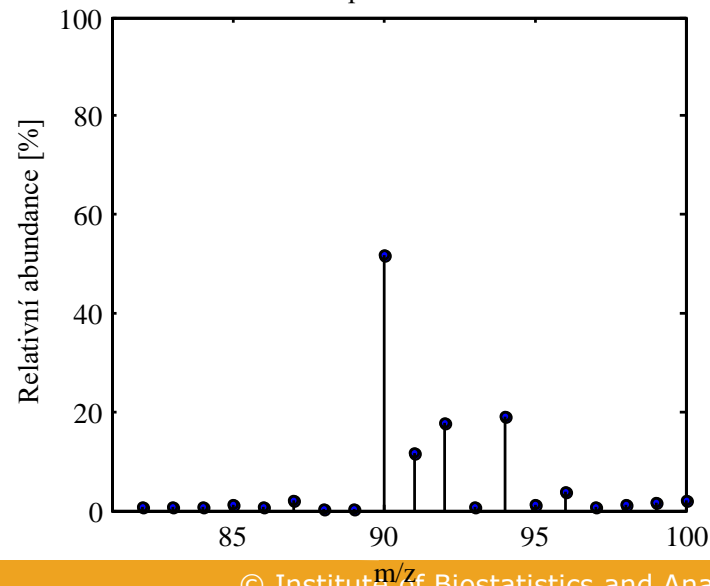
Zirconium: průměr 30 měření



Zirconium: průměr 100 měření

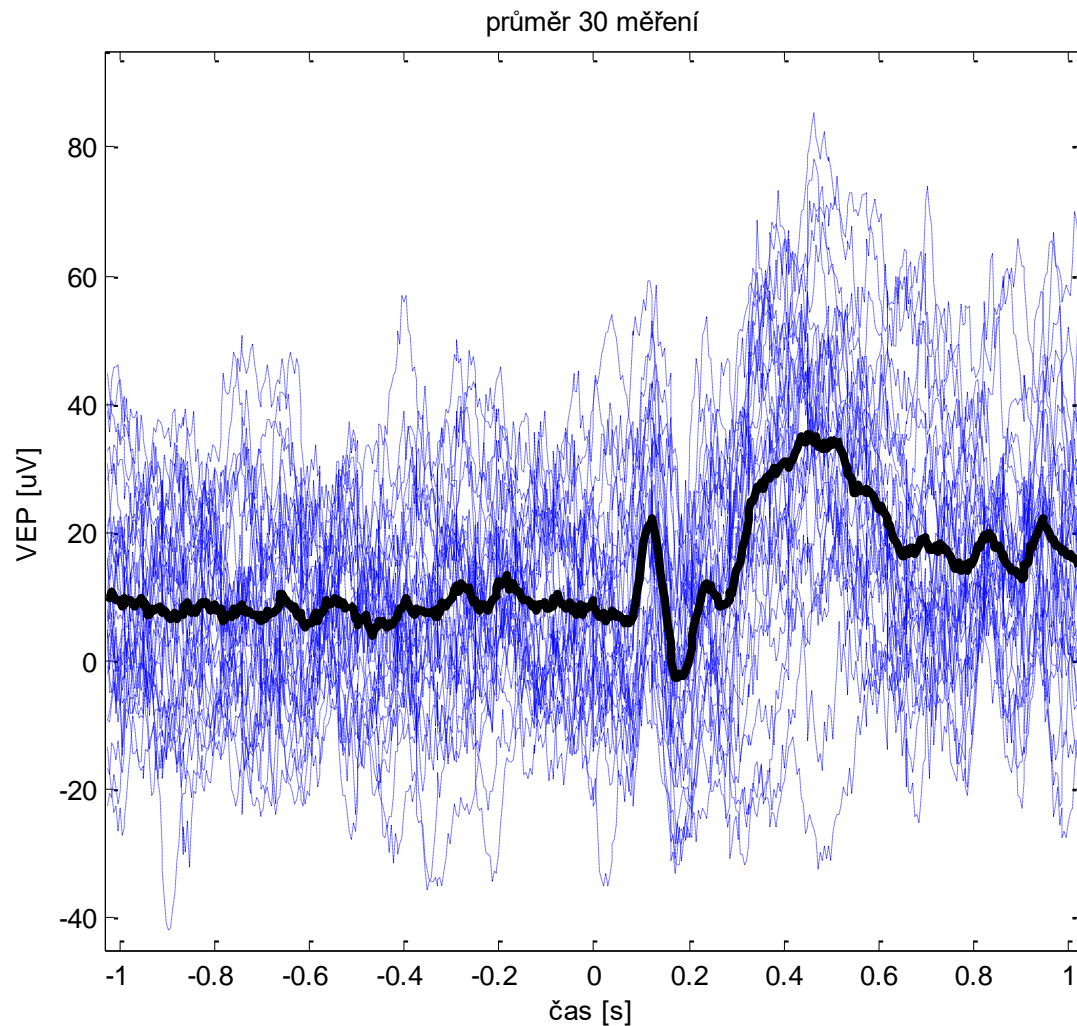


Zirconium: průměr 500 měření



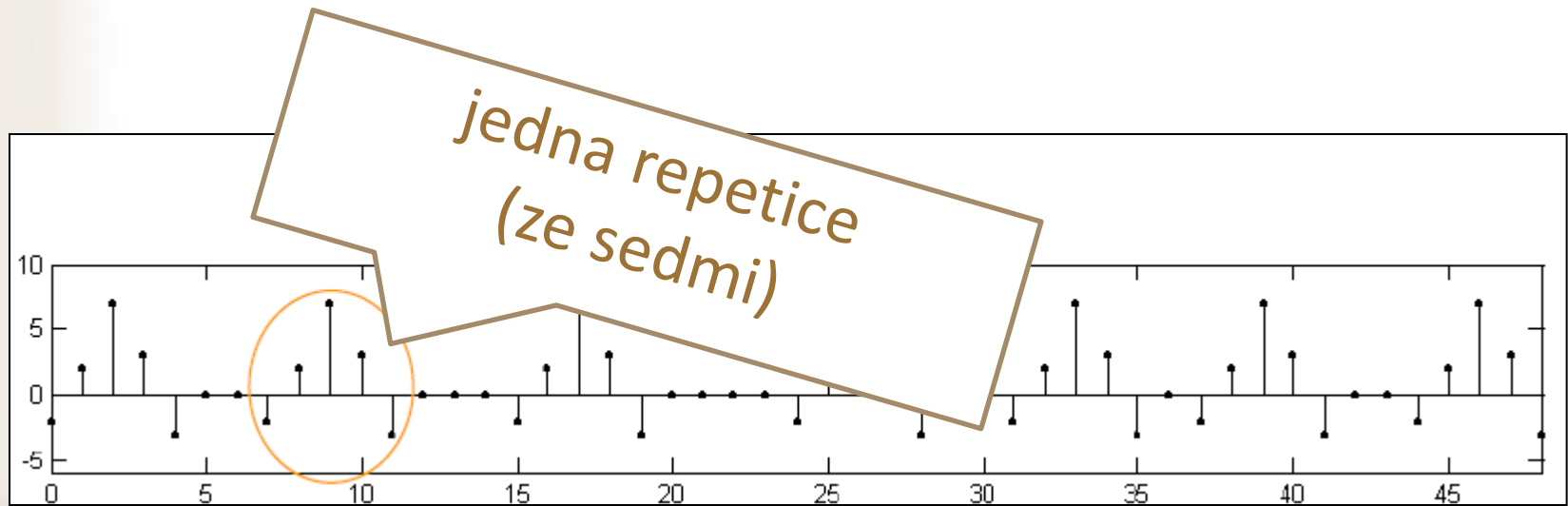


# Motivační příklad ze života: zrakové evokované potenciály



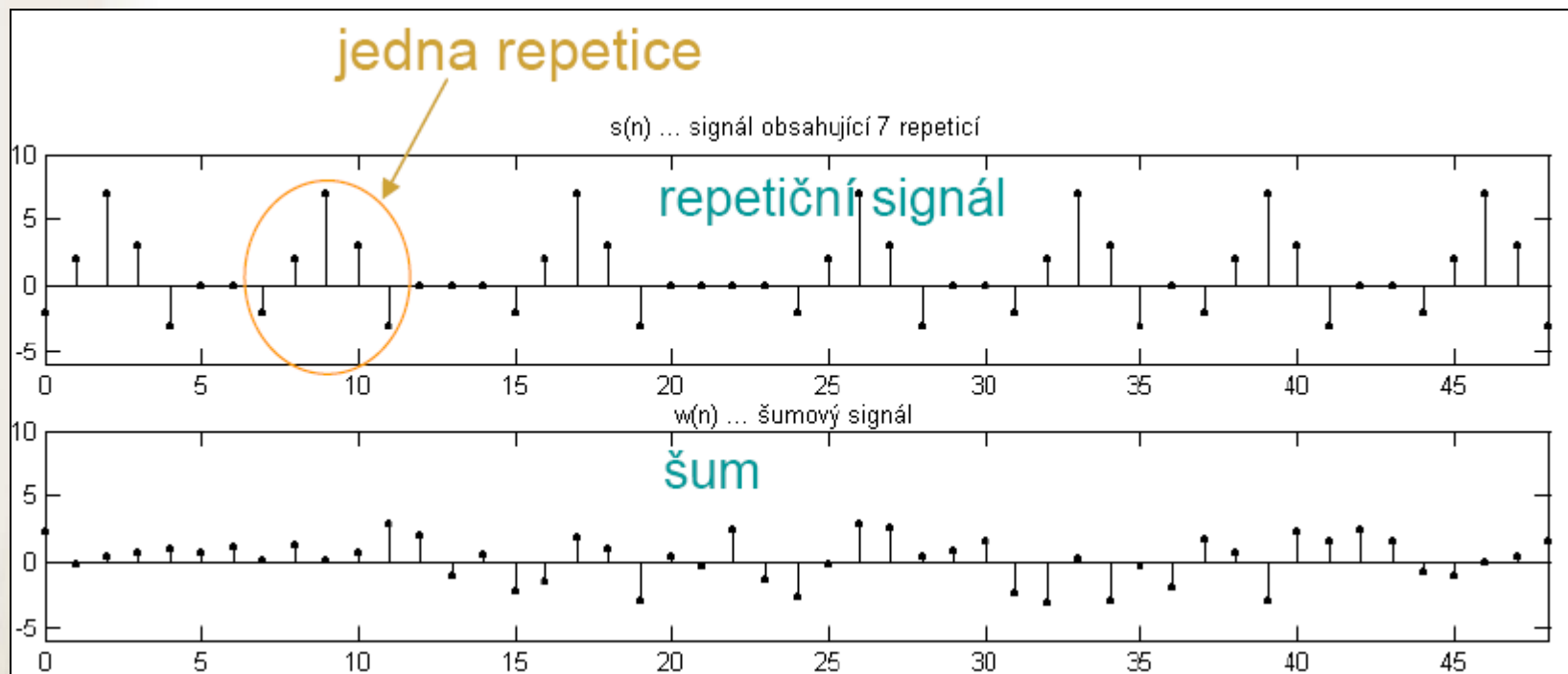
# Repetiční časové řady

Posloupnost hodnot omezeného trvání se vícekrát v čase po nějaké nekonstantní době opakuje.



# Princip kumulačních technik

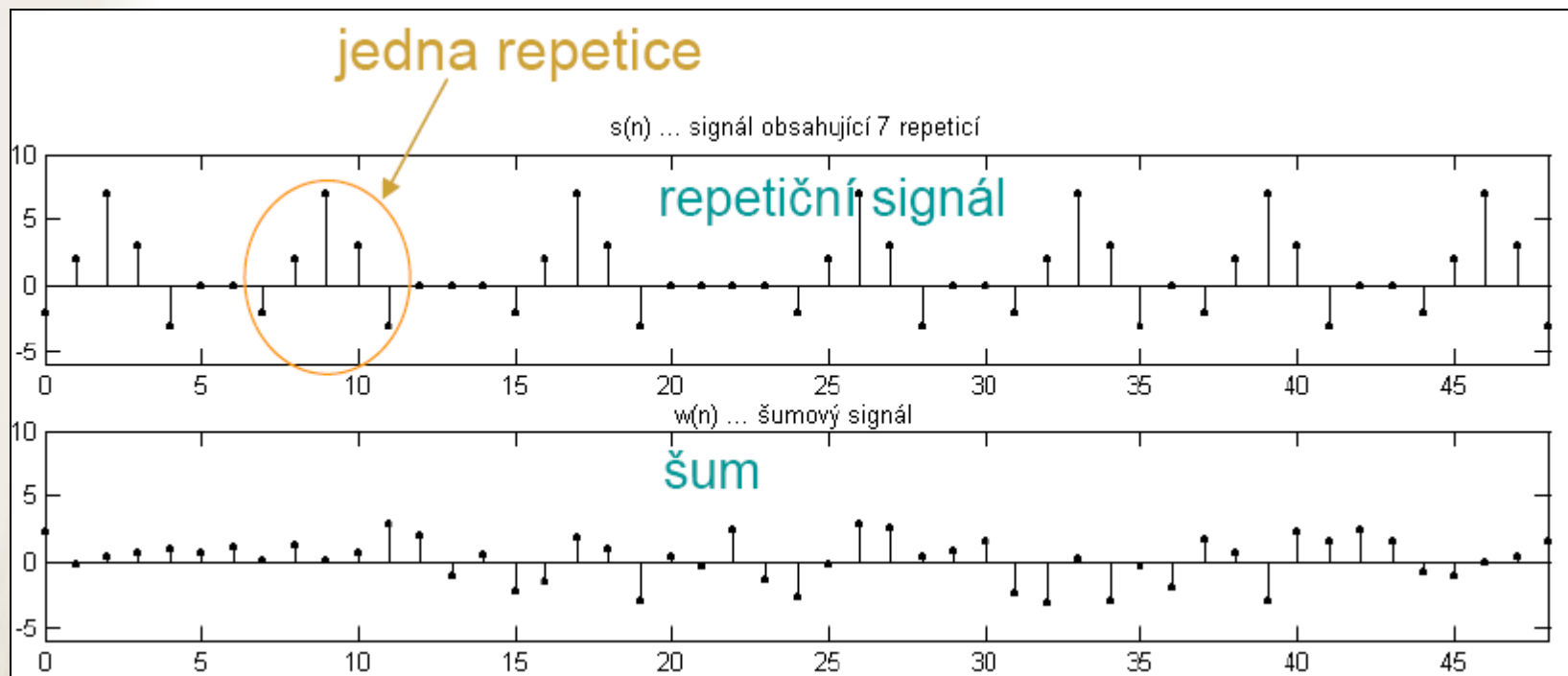
- užitečná složka stejná v každém měření (v každé repetici)
- šum má pokaždé jinou hodnotu



# Princip kumulačních technik

- užitečná složka stejná v každém měření
- šum má pokaždé jinou hodnotu

šum bude mít tendenci vymizet při průměrování repetic.



# Princip kumulačních technik

- signálová složka stejná v každém měření
- šum má pokaždé jinou hodnotu

šum bude mít tendenci vymizet při průměrování repetic.

Jaká je nutná podmínka pro „vymizení“?  
..... ? .....

# Princip kumulačních technik

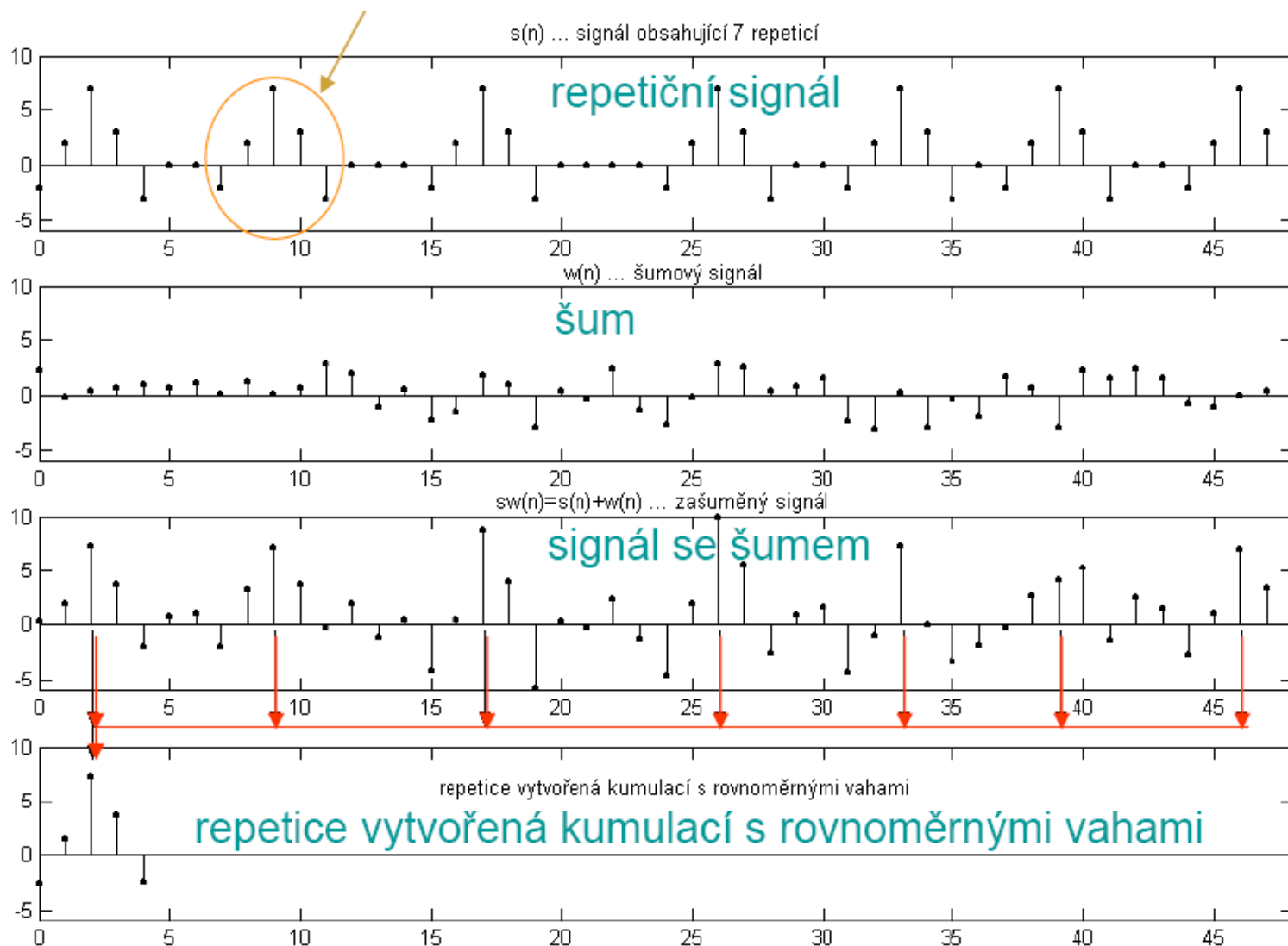
- užitečná složka stejná v každém měření
- šum má pokaždé jinou hodnotu

šum bude mít tendenci vymizet při průměrování repetic.

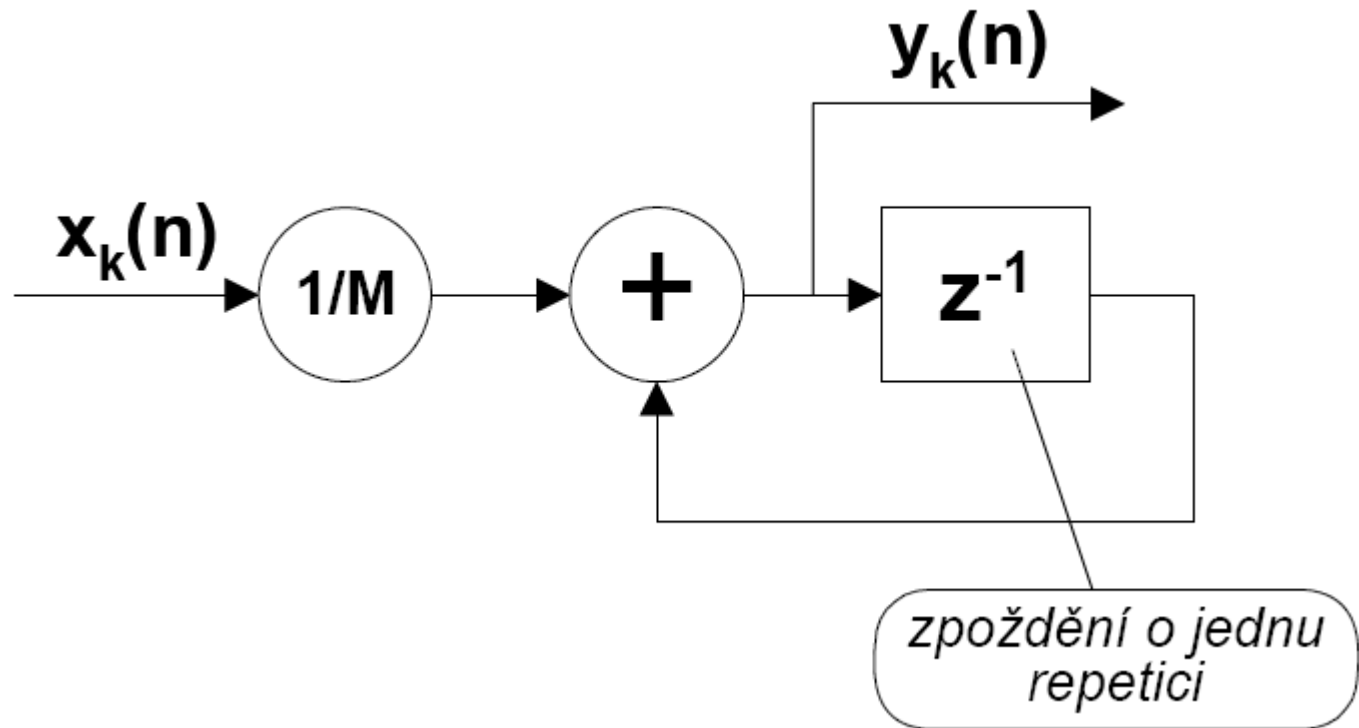
Jaká je nutná podmínka pro „vymizení“?

Jedná se o aditivní šum, který je generován stacionárním náhodným procesem s nulovou střední hodnotou. Užitečná složka a rušení (šum) nejsou korelovány.

# Princip kumulačních technik



# Princip kumulačních technik





# Kumulační techniky

## Požadavky:

- přesná koherence kumulovaných průběhů
- nezávislost mezi korespondujícími vzorky šumu z různých repetit

# Kumulační techniky

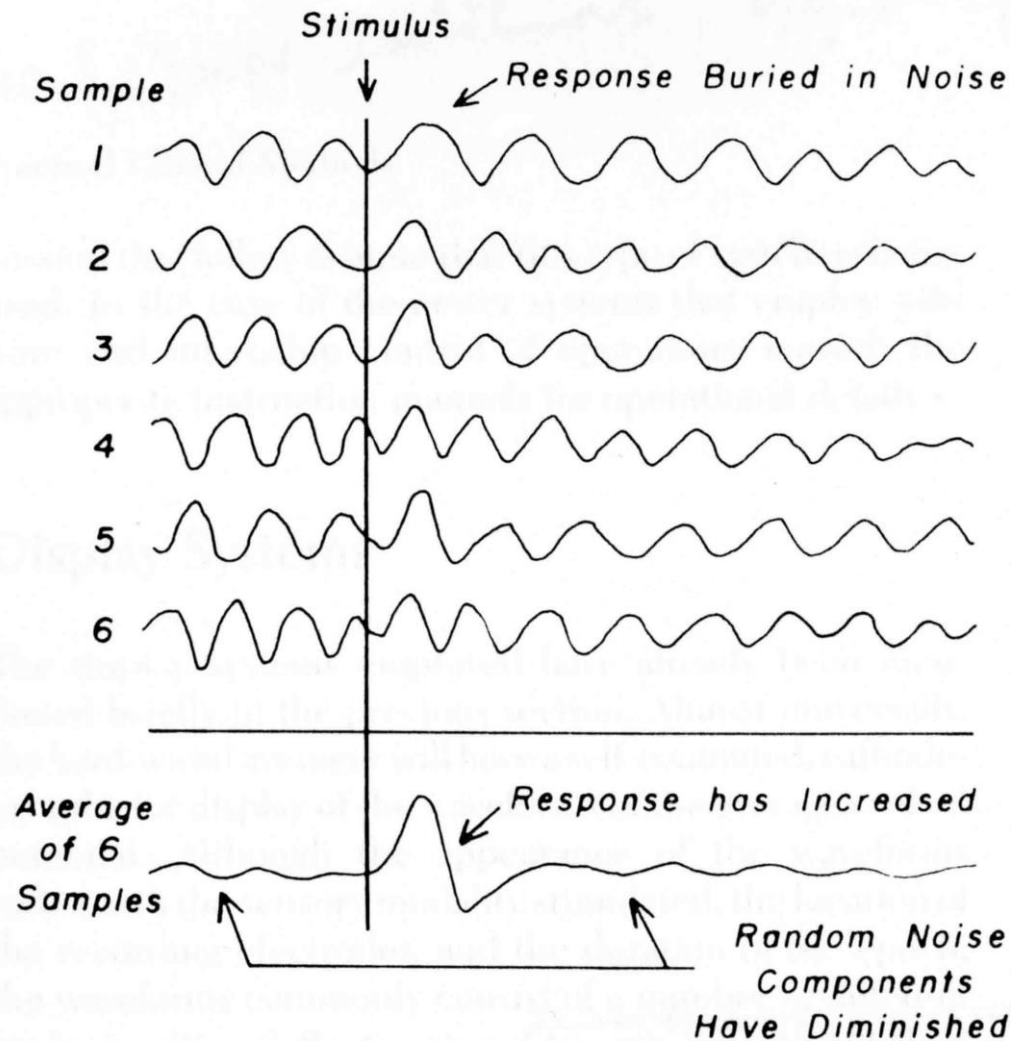
## Požadavky:

- repetiční povaha časových řad
- přesná koherence kumulovaných průběhů
- rušivá složka je generována náhodným procesem s nulovou střední hodnotou
- nezávislost mezi korespondujícími vzorky z různých repetic

Periodické signály  
Stimulované signály  
...  
Korelační analýza

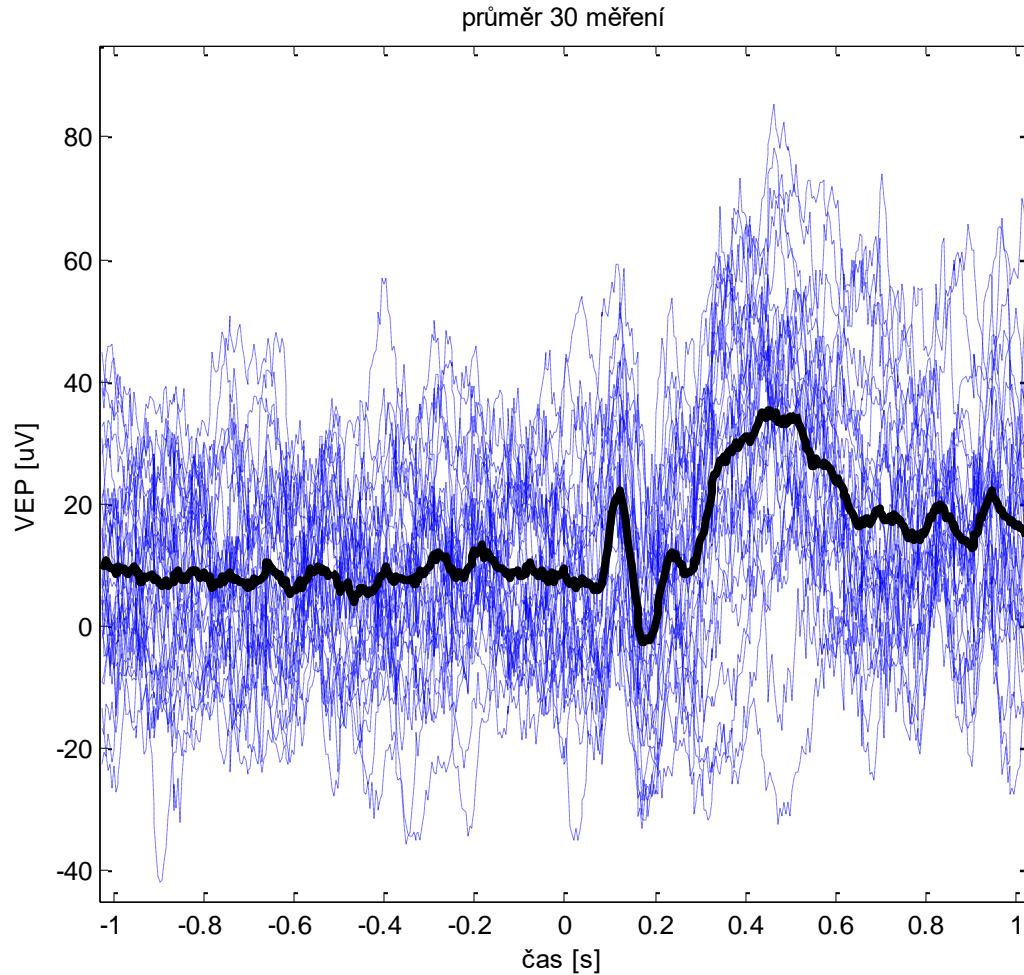
# Kumulační techniky

Příklad: stimulované signály při vyšetřeních EEG/EP



# Kumulační techniky

Příklad: stimulované signály při vyšetřeních EEG/EP



# Kumulační techniky

**Jak váhovat jednotlivé repetice?**

# Kumulační techniky

$$y(kT) = y((l+m_j)T) = \sum_{i=0}^j [a_{i \cdot (j-i)} x(lT)]$$

$$a_i, i=0, 1, \dots, j$$

$$j = 0, 1, \dots$$

# Kumulační techniky

$$y(kT) = y((l+m_j)T) = \sum_{i=0}^j [a_i \cdot (j-i) x(lT)]$$

$a_i, i=0,1,\dots,j$   
 $j = 0,1,\dots$

Váhy jednotlivých repetic  
 $a_0$  – poslední, nová repetice  
 $a_j$  – nejstarší repetice

Počátky jednotlivých repetic

Výstup v průběhu j-té  
repetice

Pořadové číslo repetice

l-tý vzorek  
v repetici

# Kumulační techniky

$$y(kT) = y((l+m_j)T) = \sum_{i=0}^j [a_i \cdot (j-i) x(lT)]$$

$a_i, i=0,1,\dots,j$   
 $j = 0,1,\dots$

Váhy jednotlivých repetic  
 $a_0$  – poslední, nová repetice  
 $a_j$  – nejstarší repetice

Počátky jednotlivých repetic

Pořadové číslo repetice

$l$ -tý vzorek  
v repetici

Výstup v průběhu  $j$ -té  
repetice



# Kumulační techniky

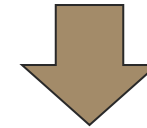
$$y(kT) = y((l+m_j)T) = \sum_{i=0}^j [a_i \cdot (j-i) x(lT)]$$

$$a_i, i=0, 1, \dots, j$$

$$j = 0, 1, \dots$$

$$y(kT) = \sum_{i=0}^j a_i \cdot x((k - (m_j - m_{j-i})) T)$$

$$k = m_j + l$$



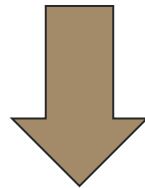
Interpretace kumulace ve frekvenční oblasti

# Kumulační techniky

$$y(kT) = \sum_{i=0}^j a_i \cdot x((k-iN)T)$$



Zjednodušení pro případ periodických signálů  
s délkou užitečných úseků  $NT$



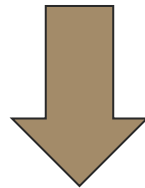
.....?

# Kumulační techniky

$$y(kT) = \sum_{i=0}^j a_i \cdot x((k-iN)T)$$



Zjednodušení pro případ periodických signálů  
s délkou užitečných úseků  $NT$

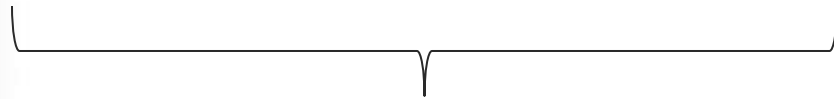


FIR filtr

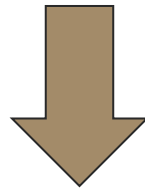
$\{h_k\}$  – konečná, ale s každou další repeticí se prodlužuje.

# Kumulační techniky

$$y(kT) = \sum_{i=0}^j a_i \cdot x((k-iN)T)$$



Zjednodušení pro případ periodických signálů  
s délkou užitečných úseků  $NT$



FIR filtr

$\{h_k\}$  – konečná, ale s každou další repeticí se prodlužuje.

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

$$y(kT) = \sum_{i=0}^j a_{i(j-i)} s(lT) +_{(j-i)} n(lT)$$

Užitečný signál

šum

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

$$y(kT) = \sum_{i=0}^j a_i ({}_{(j-i)}s(lT) + {}_{(j-i)}n(lT)) =$$
$$= s(lT) \sum_{i=0}^j a_i + \sum_{i=0}^j [a_i \cdot {}_{(j-i)}n(lT)]$$

Užitečný signál

šum

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

$$P_n = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{-1} \int_0^{\tau} n^2(t) dt$$

Průměrný výkon šumu  
před diskretizací

$$P_n = \sigma_n^2$$

Výkon diskrétního šumu  
je dán jeho rozptylem

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

$$y(kT) = \sum_{i=0}^j a_i ({}_{(j-i)}s(lT) + {}_{(j-i)}n(lT)) =$$
$$= s(lT) \sum_{i=0}^j a_i + \sum_{i=0}^j [a_i \cdot {}_{(j-i)}n(lT)]$$

Užitečný signál

Šum na výstupu = součet  $j$  stejných  
náhodných veličin váhovaných  
koeficienty  $a_i$



# Kumulační techniky: zlepšení SNR

$$D\left(\sum_i a_i v_i\right) = \sum_i a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_l a_i a_l \sigma_{il}$$

Rozptyly jednotlivých  
veličin

Rozptyl lineární  
kombinace náhodných  
veličin

.....?

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

$$D\left(\sum_i a_i v_i\right) = \sum_i a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_l a_i a_l \sigma_{il}$$

Rozptyly jednotlivých veličin

Kovariance dvojic členů kombinace

Výstupní šum po kumulaci:

$$\sigma_{nc}^2 = \sigma_n^2 \sum_{i=0}^j a_i^2 + \sum_{i=0}^j \sum_{l=0}^j a_i a_l \sigma_{il}$$

Stacionarita

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

Výstupní šum po kumulaci:

$$\sigma_{nc}^2 = \sigma_n^2 \sum_{i=0}^j a_i^2 + \underbrace{\sum_{i=0}^j \sum_{l=0}^j a_i a_l \sigma_{il}}_{\text{cross-correlation terms}}$$



Případná závislost mezi šumovými příspěvky z různých repetice rozptyl zvyšuje a zhoršuje tak možnosti kumulačního zpracování.

Kumulací se šumový výkon v případě nezávislosti šumových příspěvků z různých repetice změní na **.....?.....** - násobek původního výkonu.

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

Výstupní šum po kumulaci:

$$\sigma_{nc}^2 = \sigma_n^2 \sum_{i=0}^j a_i^2 + \underbrace{\sum_{i=0}^j \sum_{l=0}^j a_i a_l \sigma_{il}}_{\text{cross-terms}}$$



Případná závislost mezi šumovými příspěvky z různých repetice rozptyl zvyšuje a zhoršuje tak možnosti kumulačního zpracování.

Kumulací se šumový výkon v případě nezávislosti šumových příspěvků z různých repetice změní na  $\sum a_i^2$  - násobek původního výkonu.

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

Výstupní šum po kumulaci:

$$\sigma_{nc}^2 = \sigma_n^2 \sum_{i=0}^j a_i^2 + \sum_{i=0}^j \sum_{l=0}^j a_i a_l \sigma_{il}$$

**Nutné předpoklady pro úspěch kumulačních technik:**

- Žádná (slabá) korelace mezi realizacemi šumu v jednotlivých repeticích
- Centrovaný proces

**Další, zbytečné předpoklady uváděné v literatuře:**

- normální rozdělení
- bílý šum
- tvar autokorelační funkce

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

Výstupní šum po kumulaci:

$$\sigma_{nc}^2 = \sigma_n^2 \sum_{i=0}^j a_i^2 + \sum_{i=0}^j \sum_{l=0}^j a_i a_l \sigma_{il}$$

**Nutné předpoklady pro úspěch kumulačních technik:**

- Žádná (slabá) korelace mezi realizacemi šumu v jednotlivých repetičích
- Centrovaný proces

**Další, zbytečné předpoklady uváděné v literatuře:**

- normální rozdělení
- bílý šum
- tvar autokorelační funkce

Nepotřebujeme  
rovnoměrné spektrum,  
rušením může být  
i harmonický signál  
s náhodnou fází vzhledem  
k počátkům repetic.

Na vazbách mezi blízkými  
vzorky v rámci repetice  
nezáleží.

Postačí nulová střední  
hodnota

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

Jak ověřit, že realizace šumu v jednotlivých repeticích nejsou korelovány?

.....?

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

**Jak ověřit, že realizace šumu v jednotlivých repeticích nejsou korelovány?**

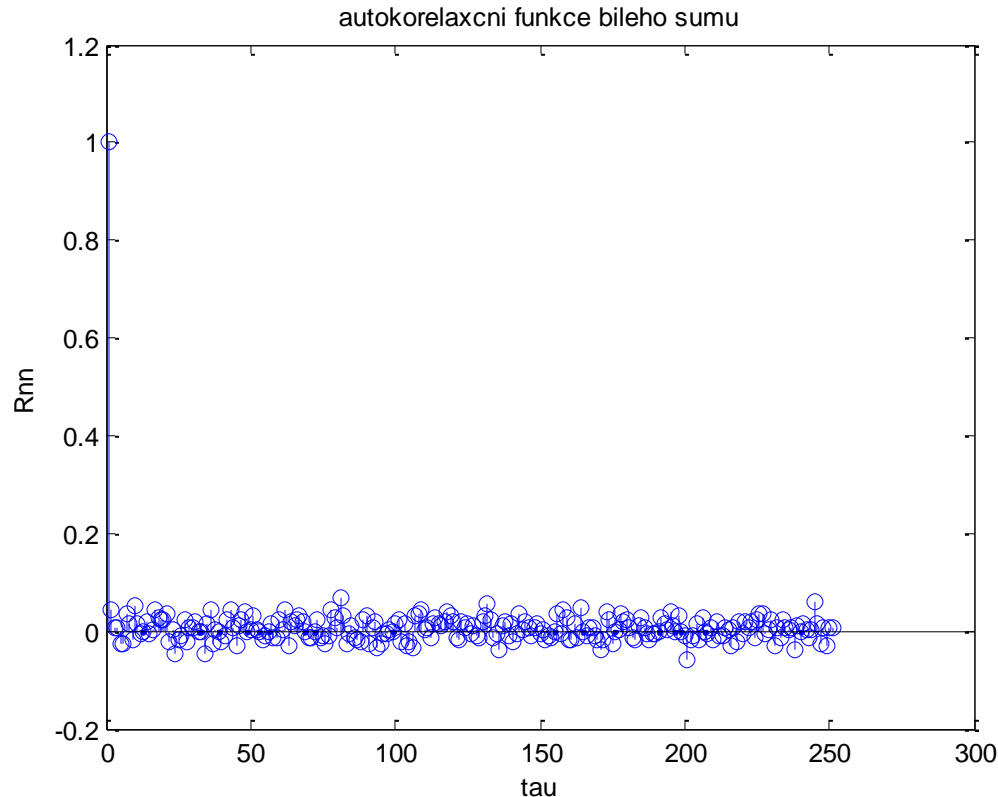
Autokorelační funkce šumu bez signálu konverguje k nule a její hodnoty jsou pro zpoždění odpovídající intervalům mezi repeticemi zanedbatelně malé.



# Kumulační techniky: zlepšení SNR

Jak ověřit, že realizace šumu v jednotlivých repeticích nejsou korelovány?

Autokorelační funkce šumu bez signálu konverguje k nule a její hodnoty jsou pro zpoždění odpovídající intervalům mezi repeticemi zanedbatelně malé.

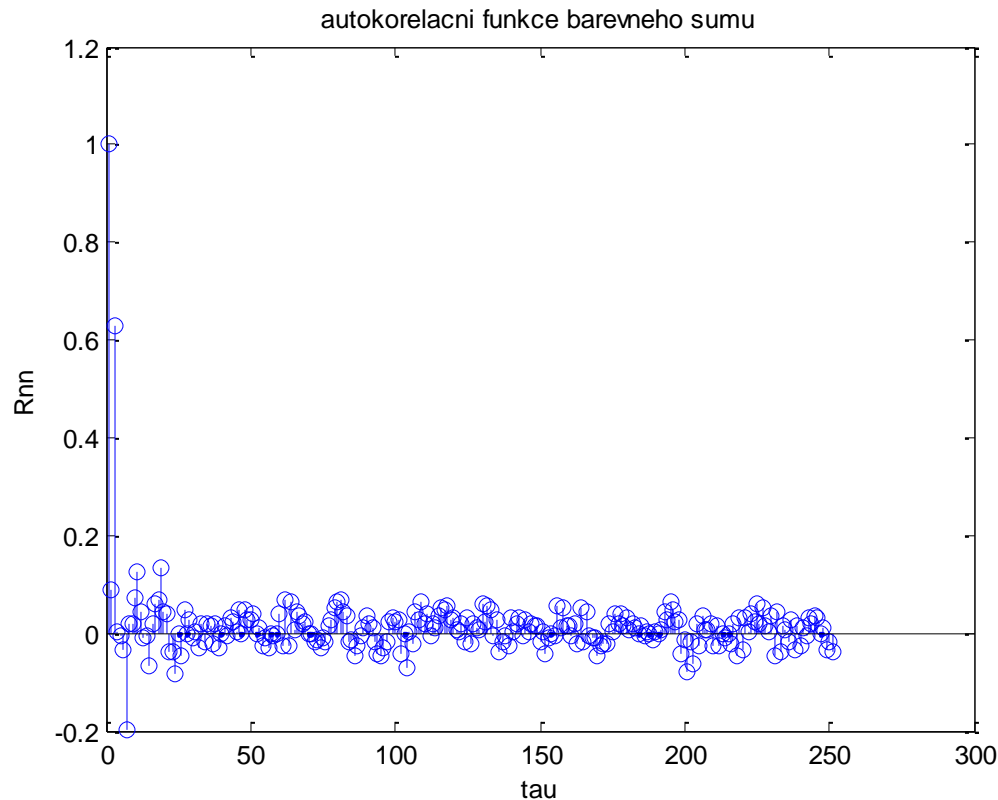


Jak vypadá teoretický průběh autokorelační funkce bílého šumu?

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

Jak ověřit, že realizace šumu v jednotlivých repeticích nejsou korelovány?

Autokorelační funkce šumu bez signálu konverguje k nule a její hodnoty jsou pro zpoždění odpovídající intervalům mezi repeticemi zanedbatelně malé.



Potlačí úspěšně tento šum kumulační technika, pokud užitečný signál má délku repetice 25 vzorků?

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

$$y(kT) = \sum_{i=0}^j a_i ({}_{(j-i)}s(lT) + {}_{(j-i)}n(lT)) =$$
$$= s(lT) \sum_{i=0}^j a_i + \sum_{i=0}^j [a_i \cdot {}_{(j-i)}n(lT)]$$

Jak se kumulací  
změní výkon signálu  
???

Užitečný signál

šum

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

Průměrný výkon signálu je úměrný průměru kvadrátů hodnot signálu.

Výkon signálu po kumulaci se tedy změnil .....?..... - krát

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

Průměrný výkon signálu je úměrný průměru kvadrátů hodnot signálu.

Výkon signálu po kumulaci se tedy změnil  $(\sum a_i)^2$  - krát.

Zlepšení výkonového poměru signálu k šumu je:

$$K_P = \frac{\left( \sum_{i=0}^j a_i \right)^2}{\sum_{i=0}^j a_i^2}$$

# Kumulační techniky: zlepšení SNR

Průměrný výkon signálu je úměrný průměru kvadrátů hodnot signálu.

Výkon signálu po kumulaci se tedy změnil  $(\sum a_i)^2$  - krát.

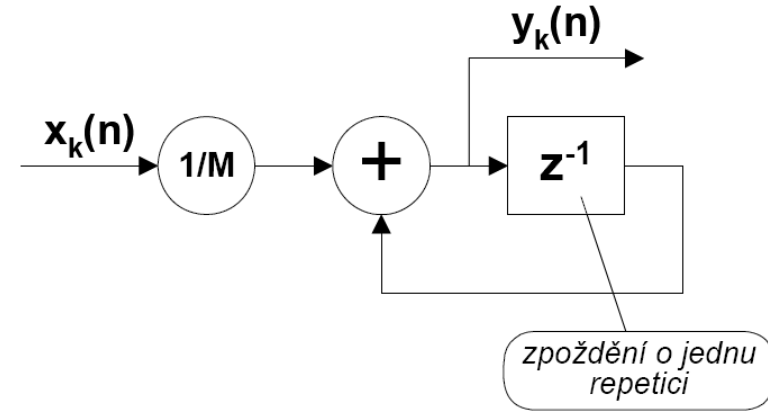
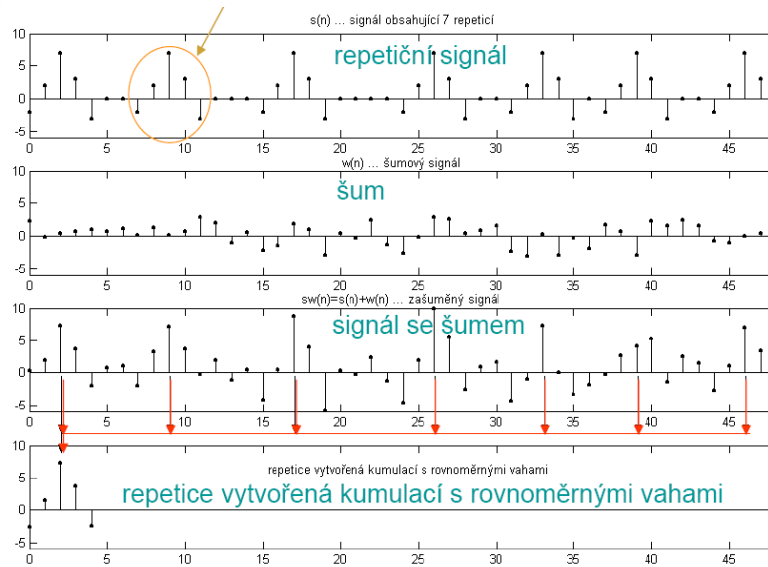
Zlepšení výkonového poměru signálu k šumu je:

$$K_P = \frac{\left( \sum_{i=0}^j a_i \right)^2}{\sum_{i=0}^j a_i^2}$$

Závislost na vahách.

Závislost na počtu repeticí

# Kumulační techniky



## Kumulace s rovnoměrnými vahami a pevným oknem

Nevýhoda:

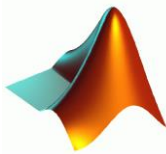
= pevné okno neumožní zachycení vývoje repetice



- a) Rovnoměrné váhy, plovoucí okno
- b) Exponenciální váhy

# 5. cvičení

- 1) Vypočtete zlepšení výkonového poměru signálu k šumu pro kumulační techniku s rovnoměrnými vahami a s pevným oknem. Počet repetič  $M$  je znám předem. Využívá se vah vedoucích na zachování původní úrovně signálu.
- 2) Zakreslete (pomocí Matlabu) dynamické vlastnosti kumulace s pevným oknem (tj. závislost výkonového i hodnotového SNR na počtu repetič).
- 3) Načtete testovací obraz „Lena“ (<https://en.wikipedia.org/wiki/Lenna>), vytvořte z něj 50 realizací zarušených šumem a pomocí kumulačního zvýrazňování užitečné složky obraz zpátky rekonstruujte. Výkon šumu volte jako parametr (proměnnou) ve vašem skriptu.





## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Otázky ?

[jakub.jamarik@med.  
muni.cz](mailto:jakub.jamarik@med.muni.cz)

