# 6. Model růstu populace

## E3101 Úvod do matematického modelování

Analýza citlivosti

Analýza neurčitosti

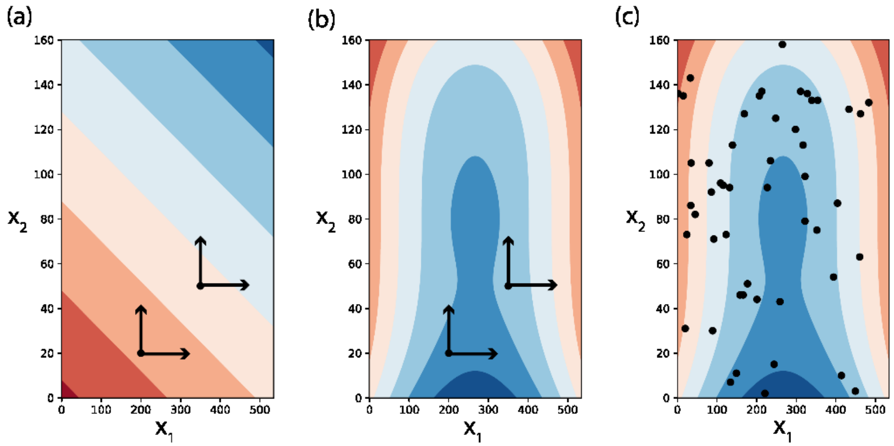
Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
*J. Kalina*

# Analýza neurčitosti

- Výstupy modelů závisí na vstupech a struktuře modelu.
- Obojí může být zdrojem nejistot.
- Kvantifikace nejistoty nám umožňuje použít model i bez přesného výsledku.
- Neurčitost je obecnější pojem a analýza neurčitosti zahrnuje nejen neurčitost ve struktuře modelu a hodnotách vstupů ale také neurčitost ve schopnosti interpretace modelu a další případné zdroje nejistoty.
- Obecně se v analýze neurčitosti díváme na chování modelu jako celku, jeho výstupů, bez vztahování variability ke konkrétním vstupním hodnotám.

# Analýza citlivosti

- Analýza citlivosti se v širším slova smyslu zabývá vztahem ve variabilitě vstupů a výstupů modelu.
- ***Lokální analýza citlivosti*** se zabývá jednotlivými proměnnými (obvykle) bez interakcí v okolí nějaké referenční hodnoty.
- ***Globální analýza citlivosti*** se zabývá celým vstupním prostorem a interakcemi mezi proměnnými.
- Lokální analýza je užitečná pro hodnocení významu změny proměnných ve známém intervalu, pokud model používáme ve „standardizovaném prostředí“.



# Lokální analýza citlivosti

- Základní technikou je výpočet indexů lokální citlivosti pro jednotlivé proměnné.
- Více možností výpočtů:
  - analytický výpočet pomocí derivace známé funkce modelu nebo jejího odhadu,
  - intervalová aritmetika;
  - variance-based metody;
  - Monte-Carlo metody.
- Mimo to je třeba rozlišovat, zda hodnotíme lokální citlivost jediné proměnné, která je na ostatních proměnných nezávislá nebo se snažíme postihnout i vzájemné vztahy více proměnných.
- One-At-a-Time (OAT) × All-At-a-Time (AAT) metody pro více proměnných.

# Metoda přímé derivace

- Vhodná pouze, pokud je známé analytické řešení modelu.
- Taylorův rozvoj počítá s přírůstky pro malé Δx:

  kde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je vektor všech vstupů modelu.
- Pokud se omezíme jen na derivace 1. řádu (což je obvyklé), jde o OAT metodu, která hodnotí každou proměnnou samostatně.
- Hodnotu $\frac{dy(t,x)}{dx_i}$ nazýváme indexem lokální citlivosti vstupu $i$ (prvního řádu), lze počítat i indexy vyšších řádů (není obvyklé).

# Metoda konečných diferencí

- Obvykle není analytický předpis modelu znám (proto(že) řešíme modely numericky) a tedy se musíme i v analýze citlivosti uchýlit k numerickému řešení.
- Metoda konečných diferencí nahrazuje derivace (tečny ke křivce) sečnami (spojnice dvou bodů) mezi body

$$[x, y(t, x)] \text{ a } [x + \Delta x, y(t, x + \Delta x)]$$

- Hodnotu $\Delta x$ zpravidla volíme dostatečně malou vzhledem k rozpětí hodnot daného vstupu.

# Metoda konečných diferencí

- Citlivost pomocí obou metod přímých derivací i konečných diferencí vyhodnocujeme v okolí obvyklých hodnot vstupů a pro jeden (několik) vstupů při nezměněných hodnotách ostatních vstupů.
- Obvykle pracujeme s normalizovanými variantami, které jsou vynásobeny (obvyklou) hodnotou vstupní proměnné a poděleny (obvyklou) hodnotou výstupu modelu.

# Variance-based metody

- Předpokladem je, že rozptyl výstupních hodnot modelu je dán rozptylem vstupních hodnot modelu a pokud umíme tento rozptyl charakterizovat, dokážeme jej (aditivně) rozdělit mezi jednotlivé vstupy.
- Soboľova metoda – přechod do globální analýzy citlivosti.
- Předpoklad:

$$Var\left[f\left(y(t,x)\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(y(t,x))}{\partial x_i} \frac{\partial f(y(t,x))}{\partial x_j} \cdot Cov(x_i, x_j)$$

- Kritická je schopnost odhadnout kovarianci, rozptyl a předpoklad pravděpodobnostního rozdělení proměnných.

# Monte-Carlo metody

- Pokud je dobře charakterizováno rozdělení proměnných, lze využít Monte-Carlo metody pro odvození pravděpodobnostního rozdělení výstupu modelu.
- Analýza citlivosti i neurčitosti.
- Pro detailní charakterizaci případů nutné použít až desetitisíce vygenerovaných hodnot – výpočetně velmi náročné.
- Optimalizační metody pro Monte-Carlo simulace.

# Domácí úkol č. 2 (do 12. 11. 2024)

- Použijte variance based metodu pro výpočet normalizovaného indexu citlivosti r v modelu neomezeného růstu s koeficientem r z množiny {-0,1; 0; 0,1} a počáteční velikostí populace 1000.
- Pro výpočet použijte skutečné derivace místo konečných diferencí, jak bylo uvedeno v kódu z přednášky.
- Směrodatné odchylky koeficientu r volte tak, aby se 95 % hodnot koeficientu nacházelo v rozmezí r +- 10 %.
- Srovnejte všechna tři řešení.