7. Populace pod tlakem nespecializovaného predátora

E3101 Úvod do matematického modelování

Populace pod tlakem nespecializovaného predátora

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Hřebíček, J. Kalina

Nespecializovaný predátor

- Nespecializovaný predátor není závislý na kořisti z uvažované populace, má i alternativní zdroje obživy.
- Velikost populace nespecializovaného predátora považujeme za konstantní a do modelu ji nemusíme zahrnovat.
- Množství kořisti bude úměrné době lovu:
  - množství ulovené kořisti za časový interval délky h je rovno $p \cdot h$
  - parametr p se nazývá intenzita predace a vyjadřuje predační tlak vyvíjený na uvažovanou populaci, přesněji řečeno: množství kořisti, které predátoři uloví za jednotku času.
  - Intenzita predace závisí na velikosti N populace kořisti, tj. $p = p(N)$.

Nespecializovaný predátor

- Pokud není uvažovaná populace v prostředí přítomna, predátoři nic neuloví a živí se alternativní potravou.
- Pokud je uvažovaná populace veliká (větší než predátoři dokáží sníst), loví predátoři pouze omezené množství jedinců, které představuje jakousi hladinu nasycení.
- To lze vyjádřit jako:
  - $p(0) = 0$;
  - $p(N) = S$ pro $N > N_{krit}$ nebo obecněji jako $p(N) \to S$ pro $N \to \infty$.
- Procvičení: nalezněte vhodnou funkci p(N) splňující výše uvedené podmínky pro $N \in \mathbb{R}_0^+$:
  1. jakoukoliv,
  2. hladkou.

Nespecializovaný predátor

- U předešlého modelu jsme v diskrétním případě dospěli k rovnici

$$N(t+1) = N(t) + r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \qquad N(0) = N0$$

- a ve spojitém případě k rovnici

$$N'(t) = r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \qquad N(0) = N0$$

- Obě tyto rovnice lze za použití časového kroku h vyjádřit ve tvaru

$$N(t+h) = N(t) + r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \cdot h, \qquad N(0) = N0$$

Nespecializovaný predátor

- Nyní vyjádříme změnu velikosti populace za časový interval délky h jako přirozený přírůstek populace změněný o množství ulovených jedinců. Rovnici tedy dále modifikujeme a dostaneme model růstu populace pod tlakem nespecializovaného predátora ve tvaru

$$N(t+h) = N(t) + r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \cdot h - p(N(t)) \cdot h, \qquad N(0) = N0$$

- Procvičení: určete rovnice populace pod tlakem nespecializovaného predátora v diskrétním a spojitém případě.

Implementace modelu

- V diskrétním případě nelze určit řešení modelu, ale můžeme řešit model rekurentně (výpočtem následujícího stavu ze znalosti stavů předcházejících).
- Ve spojitém případě lze model analyticky řešit pokud stále platí

$$N > N_{krit} \text{ nebo } N < N_{krit}$$

- V obecném případě je nicméně nutné řešit model za pomoci numerických metod, k čemuž musíme znát numerické hodnoty všech parametrů modelu.

Implementace modelu

- Implementujme proto model s následujícím nastavením:
  - S = 300
  - r = 1
  - K = 1000
  - N_{krit} = 200
  - N0 = 500
- Pro implementaci nejprve použijeme predační funkci definovanou po částech lineárně (se zlomem v bodě N_{krit}).
- Spojitou predační funkci si procvičíte za domácí úkol.

Spojitá predační funkce (DÚ 3 do 21. 11. 2024)

- Využijte kód z dnešní přednášky a nadefinujte predační funkce q(N) a r(N), které budou různé a budou splňovat následující předpoklady:
  - $N<0 \Rightarrow q(N) = r(N) = NA$
  - $N=0 \Rightarrow q(N) = r(N) = 0$
  - $N \rightarrow \infty \Rightarrow q(N) \rightarrow S$ & $r(N) \rightarrow S$
  - Funkce budou hladké.
- Předpokládejte následující hodnoty parametrů a do jednoho grafu vyneste řešení spojitého modelu s nespecializovaným predátorem a funkcemi p(N), q(N) a r(N) + okomentujte:
  - $S = 100$
  - $r = 1$
  - $K = 1000$
  - $N_{krit} = 200$
  - $N0 = 500$