

7. Populace pod tlakem nespecializovaného predátora

E3101 Úvod do matematického modelování



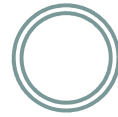
Populace pod tlakem nespecializovaného predátora

Nespecializovaný predátor



- Nespecializovaný predátor není závislý na kořisti z uvažované populace, má i alternativní zdroje obživy.
- Velikost populace nespecializovaného predátora považujeme za konstantní a do modelu ji nemusíme zahrnovat.
- Množství kořisti bude úměrné době lovu:
 - množství ulovené kořisti za časový interval délky h je rovno $p \cdot h$
 - parametr p se nazývá intenzita predace a vyjadřuje predáčn \acute{y} tlak vyvíjený na uvažovanou populaci, přesněji řečeno: množství kořisti, které predátoři uloví za jednotku času.
 - Intenzita predace závisí na velikosti N populace kořisti, tj. $p = p(N)$.

Nespecializovaný predátor



- Pokud není uvažovaná populace v prostředí přítomna, predátoři nic neuloví a živí se alternativní potravou.
- Pokud je uvažovaná populace velká (větší než predátoři dokáží sníst), loví predátoři pouze omezené množství jedinců, které představuje jakousi hladinu nasycení.
- To lze vyjádřit jako:
 - $p(0) = 0$;
 - $p(N) = S$ pro $N > N_{\text{krit}}$ nebo obecněji jako $p(N) \rightarrow S$ pro $N \rightarrow \infty$.
- Procvičení: nalezněte vhodnou funkci $p(N)$ splňující výše uvedené podmínky pro $N \in \mathbb{R}_0^+$:
 1. jakoukoliv,
 2. hladkou.

Nespecializovaný predátor



- U předešlého modelu jsme v diskrétním případě dospěli k rovnici

$$N(t + 1) = N(t) + r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad N(0) = N_0$$

- a ve spojitém případě k rovnici

$$N'(t) = r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad N(0) = N_0$$

- Obě tyto rovnice lze za použití časového kroku h vyjádřit ve tvaru

$$N(t + h) = N(t) + r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \cdot h, \quad N(0) = N_0$$

Nespecializovaný predátor

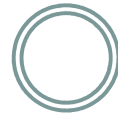


- Nyní vyjádříme změnu velikosti populace za časový interval délky h jako přirozený přírůstek populace změněný o množství ulovených jedinců. Rovnici tedy dále modifikujeme a dostaneme model růstu populace pod tlakem nespecializovaného predátora ve tvaru

$$N(t + h) = N(t) + r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \cdot h - p(N(t)) \cdot h, \quad N(0) = N_0$$

- Procvičení: určete rovnice populace pod tlakem nespecializovaného predátora v diskrétním a spojitém případě.

Implementace modelu



- V diskrétním případě nelze určit řešení modelu, ale můžeme řešit model rekurentně (výpočtem následujícího stavu ze znalosti stavů předcházejících).
- Ve spojitém případě lze model analyticky řešit pokud stále platí
$$N > N_{krit} \text{ nebo } N < N_{krit}$$
- V obecném případě je nicméně nutné řešit model za pomoci numerických metod, k čemuž musíme znát numerické hodnoty všech parametrů modelu.

Implementace modelu



- Implementujme proto model s následujícím nastavením:
 - $S = 300$
 - $r = 1$
 - $K = 1000$
 - $N_{\text{krit}} = 200$
 - $N_0 = 500$
- Pro implementaci nejprve použijeme predační funkci definovanou po částech lineárně (se zlomem v bodě N_{krit}).
- Spojitou predační funkci si procvičíte za domácí úkol.

Spojité predáční funkce (DÚ 3 do 21. 11. 2024)



- Využijte kód z dnešní přednášky a nadefinujte predáční funkce $q(N)$ a $r(N)$, které budou různé a budou splňovat následující předpoklady:
 - $N < 0 \Rightarrow q(N) = r(N) = NA$
 - $N = 0 \Rightarrow q(N) = r(N) = 0$
 - $N \rightarrow \infty \Rightarrow q(N) \rightarrow S \ \& \ r(N) \rightarrow S$
 - Funkce budou hladké.
- Předpokládejte následující hodnoty parametrů a do jednoho grafu vynesete řešení spojitého modelu s nesespecializovaným predátorem a funkcemi $p(N)$, $q(N)$ a $r(N)$ + **okomentujte**:
 - $S = 100$
 - $r = 1$
 - $K = 1000$
 - $N_{krit} = 200$
 - $N_0 = 500$