8. Interagující populace

E3101 Úvod do matematického modelování

Modely dvou interagujících populací

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Hřebíček, J. Kalina

Vzájemné ovlivnění populací přes prostředí

- Opět vyjdeme ze stejné rovnice (diskrétní a spojité) pro růst populace:

$$N(t+h) = N(t) + r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \cdot h, N(0) = N0$$

- Pro dvě populace N_1, N_2 budeme mít koeficienty r_1, r_2, K_1 a K_2.
- Zahrneme-li nyní do soustavy rovnic vzájemné ovlivnění populací, změníme koeficienty K_1 a K_2 na funkce κ_1 a κ_2 závislé na velikosti druhé populace.
- Pro funkce $\kappa_1(N_2)$ a $\kappa_2(N_1)$ musí platit:
  - Je-li velikost (té druhé) populace N_j=0, zůstává $\kappa_i(0)= K_i$.
  - Naopak pro $N_j \rightarrow \infty$ se hodnota ustálí na nějaké konstantě $\kappa_i(\infty)= C_i$.

Příklad

- Nalezněte vhodný předpis pro funkce $\kappa_1(N_2)$ a $\kappa_2(N_1)$ splňující následující podmínky:
  - Funkce κ_i nechť jsou spojité a hladké na oboru $<0; \infty)$.
  - Funkce κ_i nechť jsou neklesající na oboru $<0; \infty)$.
  - Je-li velikost (té druhé) populace $N_j=0$, zůstává $\kappa_i(0)= K_i$.
  - Naopak pro $N_j \rightarrow \infty$ se hodnota ustálí na nějaké konstantě $\kappa_i(\infty)= C_i$.
  - $K_i \neq C_i$.

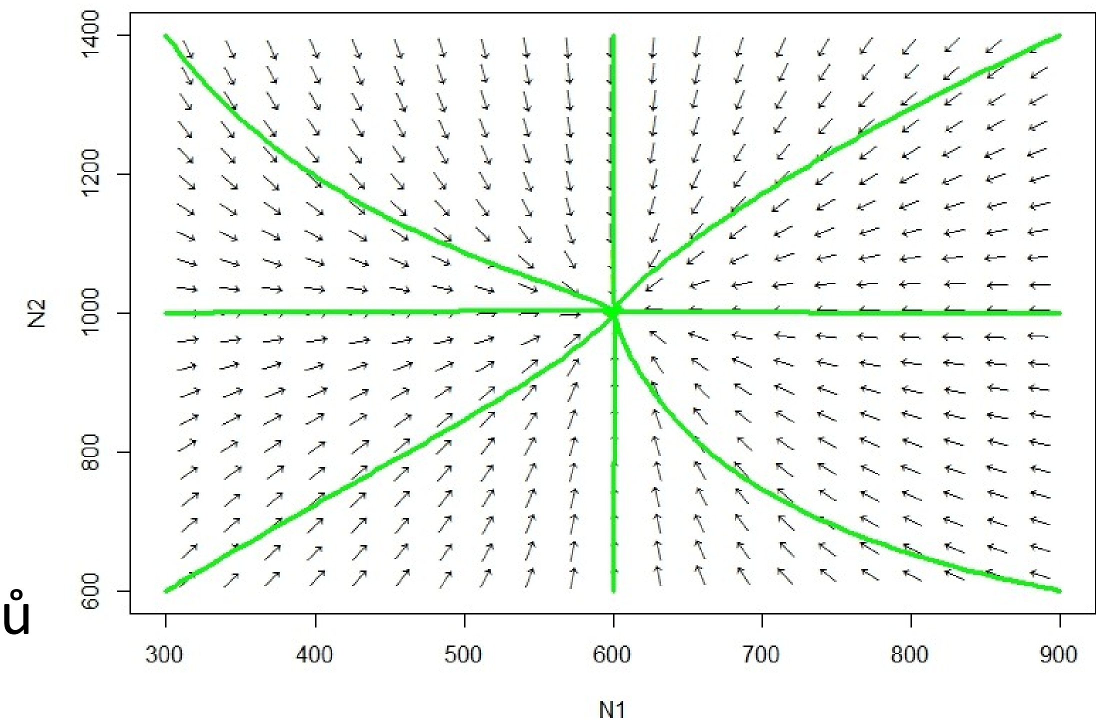
- Ve specifických případech může být komensalizmus neomezený (tj. $C_i = \infty$).

Vzájemné ovlivnění populací přes prostředí

- Varianty vzájemného ovlivnění dvou populací přes prostředí (ekologická klasifikace):
  - $K_i = C_i$ neutrální vztah (žádný vliv),
  - $K_i > C_i$ populace soupeří (amensály),
  - $K_i < C_i$ populace spolupracují (jsou na sobě závislé) (komensály), přičemž:
    - pokud $K_i = 0$, je j-tá populace obligátním komensálem i-té populace (i-tá populace nemůže přežít v nepřítomnosti j-té),
    - pokud $K_i > 0$, je j-tá populace fakultativním komensálem i-té populace (i-tá populace může přežít i bez j-té).
- Amensalizmus je populační vztah, při němž jedna populace uvolňuje do prostředí odpadní produkt nebo speciální látku, která populaci jiného druhu ovlivňuje negativně (potlačuje růst a vývoj, může způsobit i zánik).
- Komensalizmus je populační vztah, při němž jedna populace využívá jinou bez jejího poškozování (jedna populace má ze vztahu prospěch, druhá není ovlivněna)

Směrové pole

- Pro vyšetření dynamiky systému může být užitečným nástrojem tzv. směrové pole soustavy dvou diferenciálních rovnic.
- Na osách jsou velikosti populací N1 a N2.
- Časová složka není z grafu patrná.
- Šipky naznačují směr, kterým se systém bude měnit.
- Zelené čáry jsou trajektorie z vybraných bodů (rohy a středy stran).



Příklad

- Využijte předpis funkcí $\kappa_1(N_2)$ a $\kappa_2(N_1)$ z předchozího příkladu, navrhněte jejich vhodné parametry a nahraďte jimi koeficienty úživnosti K_1 a K_2 z původní rovnice.
- Řešte takto získanou soustavu dvou rovnic pro spojitý případ s nastavením parametrů tak, aby šlo o:
    1. konkurenční vztah dvou populací (oboustranně negativní ovlivnění)
    2. symbiózu obou populací (oboustranně výhodné ovlivnění),
    3. predaci (navzájem pozitivní a negativní ovlivnění populací).
- Zjistěte, jaký vztah se nazývá „orgie vzájemné dobročinnosti“, navrhněte a řešte jemu odpovídající model.

Mezidruhové vztahy

		Vliv první populace na druhou		
	Druhá populace je vůči první	záporný	neutrální	kladný
Vliv druhé populace na první	záporný	konkurent (kompetice)	amensál	predátor parazit
	neutrální		neutrál	
	kladný	kořist hostitel	komensál	mutuál (symbióza)

Vzájemné ovlivnění populací přes přírůstek

- Mimo úživnosti se mohou populace ovlivňovat také jinými mechanizmy.
- Typickým příkladem je ovlivnění koeficientu růstu (resp. přesněji relativního přírůstku).
- V případě lineárního vlivu na relativní přírůstek

$$N_i(t+h) = N_i(t) + N_i(t) \cdot \left[r_i \cdot \left(1 - \frac{N_i(t)}{K_i} \right) \pm \beta_{i,j} \cdot N_j(t) \right] \cdot h, N_i(0) = N0_i$$

označujeme získanou soustavu rovnic jako Lotkův-Volterrův systém.

Domácí úkol č. 4 (do 3. 12. 2024)

- Navrhněte soustavu Lotkových-Volterrových rovnic tří populací.
- Řešte takto získanou soustavu pro spojitý případ s nastavením parametrů tak, aby šlo o:
  1. konkurenční vztah všech tří populací (oboustranně negativní ovlivnění)
  2. predaci jedné populace vůči dvěma symbiotickým populacím (navzájem pozitivní a negativní ovlivnění populací).