10. Společenstva

E3101 Úvod do matematického modelování

Lotkův-Volterrův systém

Maticové populační modely

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Hřebíček, J. Kalina

Mezidruhové vztahy

		Vliv první populace na druhou		
	Druhá populace je vůči první	záporný	neutrální	kladný
Vliv druhé populace na první	záporný	konkurent (kompetice)	amensál	predátor parazit
	neutrální		neutrál	
	kladný	kořist hostitel	komensál	mutuál (symbióza)

Společenstva 3 a více populací

- Opět vyjdeme ze stejné rovnice (diskrétní a spojité) pro růst populace i:

$$N_i(t+h) = N_i(t) + r_i \cdot N_i(t) \cdot h, N_i(0) = N0_i$$

- Vzájemné ovlivňování populací budeme modelovat tak, že růstový koeficient i-té populace r_i závisí na velikostech všech populací tvořících společenstvo (včetně i-té), tedy:

$$r_i = r_i(N_1, N_2, \dots, N_i, \dots, N_n),\ \mathrm{i} \in \{1, \dots, n\}$$

- Pokud budeme předpokládat lineární závislost:

$$r_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \cdot N_j$$

- půjde o systém tzv. Lotka-Volterrových rovnic.

Společenstva 3 a více populací

- Interpretace koeficientů a_i, $b_{i,j}$ je následující:
  - a_i: vnitřní koeficient růstu i-té populace. Pokud
    $a_i > 0$, izolovaná i-tá populace by v daném prostředí rostla,
    $a_i < 0$, izolovaná i-tá populace by v daném prostředí vymírala.
  - $b_{i,i}$: síla vnitrodruhové konkurence nebo kooperace. Pokud
    $b_{i,i} < 0$, jedná se o vnitrodruhovou konkurenci, pokud
    $b_{i,i} > 0$, jedná se o vnitrodruhovou kooperaci.
  - $b_{i,j}$: síla vlivu j-té populace na růst i-té.

    $b_{i,j} > 0$ . . . j-tá populace je komensálem i-té,

    $b_{i,j} < 0$ . . . j-tá populace je amensálem i-té,

    $b_{i,j} = 0$ . . . j-tá populace je k i-té neutrální.

Model konkurence tří populací

- $$N_1'(t) = N_1(t) \cdot \left(\alpha_1 + \beta_{1,1} \cdot N_1(t) + \beta_{1,2} \cdot N_2(t) + \beta_{1,3} \cdot N_3(t)\right),$$
$$N_2'(t) = N_2(t) \cdot \left(\alpha_2 + \beta_{2,1} \cdot N_1(t) + \beta_{2,2} \cdot N_2(t) + \beta_{2,3} \cdot N_3(t)\right),$$
$$N_3'(t) = N_3(t) \cdot \left(\alpha_3 + \beta_{3,1} \cdot N_1(t) + \beta_{3,2} \cdot N_2(t) + \beta_{3,3} \cdot N_3(t)\right),$$
$$N_1(0) = N0_1,$$
$$N_2(0) = N0_2,$$
$$N_3(0) = N0_3,$$
- Řešte model pro:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$$
$$\beta_{1,1} = \beta_{2,2} = \beta_{3,3} = -0{,}01$$
$$\beta_{1,2} = \beta_{2,3} = \beta_{3,1} = -0{,}015$$
$$\beta_{2,1} = \beta_{3,2} = \beta_{1,3} = -0{,}003$$
$$N0_1 = 1000;\ N0_2 = 200;\ N0_3 = 300$$

Model konkurence tří populací (1 predátor)

- $$N_1'(t) = N_1(t) \cdot \left(\alpha_1 + \beta_{1,1} \cdot N_1(t) + \beta_{1,2} \cdot N_2(t) + \beta_{1,3} \cdot N_3(t)\right),$$
$$N_2'(t) = N_2(t) \cdot \left(\alpha_2 + \beta_{2,1} \cdot N_1(t) + \beta_{2,2} \cdot N_2(t) + \beta_{2,3} \cdot N_3(t)\right),$$
$$N_3'(t) = N_3(t) \cdot \left(\alpha_3 + \beta_{3,1} \cdot N_1(t) + \beta_{3,2} \cdot N_2(t) + \beta_{3,3} \cdot N_3(t)\right),$$
$$N_1(0) = N0_1,$$
$$N_2(0) = N0_2,$$
$$N_3(0) = N0_3,$$
- Řešte model pro:

$$\alpha_1 = 1;\ \alpha_2 = 2;\ \alpha_3 = -1{,}5$$
$$\beta_{1,1} = \beta_{2,2} = -0{,}005; \beta_{3,3} = 0$$
$$\beta_{1,2} = -0{,}0001; \beta_{2,3} = -0{,}02;\ \beta_{3,1} = 0{,}03$$
$$\beta_{2,1} = -0{,}01; \beta_{3,2} = 0{,}002; \beta_{1,3} = -0{,}03$$
$$N0_1 = 1000;\ N0_2 = 200;\ N0_3 = 300$$

Maticový zápis modelu

- $$N_1'(t) = N_1(t)\cdot\left(\alpha_1 + \beta_{1,1}\cdot N_1(t) + \beta_{1,2}\cdot N_2(t) + \beta_{1,3}\cdot N_3(t)\right),$$
$$N_2'(t) = N_2(t)\cdot\left(\alpha_2 + \beta_{2,1}\cdot N_1(t) + \beta_{2,2}\cdot N_2(t) + \beta_{2,3}\cdot N_3(t)\right),$$
$$N_3'(t) = N_3(t)\cdot\left(\alpha_3 + \beta_{3,1}\cdot N_1(t) + \beta_{3,2}\cdot N_2(t) + \beta_{3,3}\cdot N_3(t)\right),$$
$$N_1(0) = N0_1,$$
$$N_2(0) = N0_2,$$
$$N_3(0) = N0_3,$$
- Zápis modelu vykazuje určitou pravidelnost, které lze efektivně využít pro zjednodušení práce pomocí matic.
- Tři typy vstupních parametrů lze sjednotit do matic o jednom (= vektorů) nebo více sloupcích: N_{0i},α_i a $\beta_{i,j}$ plus stavový vektor N_i.

Maticový zápis modelu

- Přepsáním rovnic pak získáme následující zápis:

$$N'(t) = diag\big(N(t)\big) \times \big(A + B \times N(t)\big),$$
$$N(0) = N0,$$

- Kde platí (pro K populací ve společenstvu):

$$N(t) = \begin{pmatrix} N_1(t) \\ \vdots \\ N_K(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{K,1} & \cdots & \beta_{K,K} \end{pmatrix}$$

A $diag()$ je funkce pro vytvoření diagonální matice.