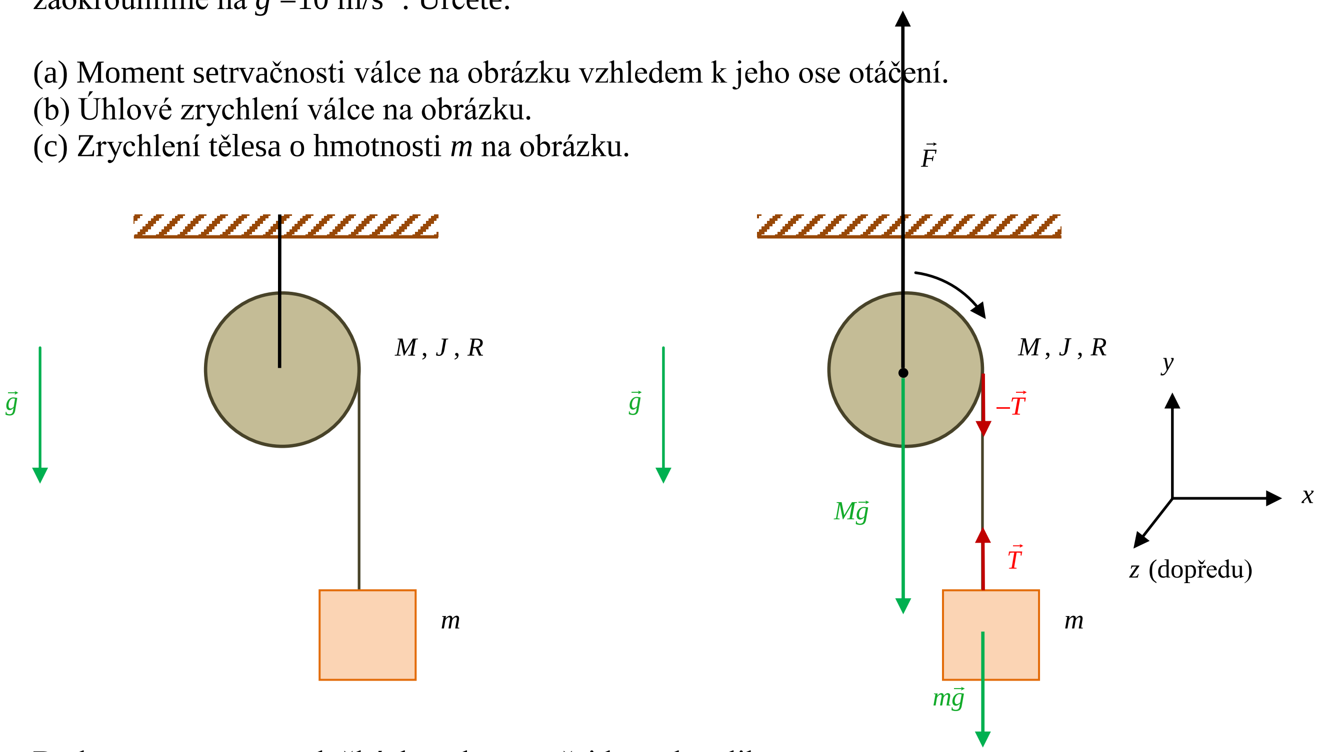
F1030 Písemka 18.12.2024 - řešení

Homogenní válec o poloměru R = 10 cm a hmotnosti M = 10 kg se může bez tření otáčet okolo pevné osy vedené geometrickou osou válce (osa symetrie). Do válce je vetknuta a na něj navinuta nehmotná a ohebná nit neproměnné délky, na jejímž konci je upevněno těleso o hmotnosti m = 5 kg, viz bokorys na obrázku. Hodnotu tíhového zrychlení zaokrouhlíme na g =10 m/s^{-2}. Určete:

(a) Moment setrvačnosti válce na obrázku vzhledem k jeho ose otáčení.
(b) Úhlové zrychlení válce na obrázku.
(c) Zrychlení tělesa o hmotnosti m na obrázku.



Budeme pracovat ve složkách, nakonec přejdeme k velikostem

Druhý NZ pro kostku

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \Rightarrow ma_y = -mg + T \quad (1)$$

(x-ové a z-ové složky všech vektorů vystupujících v druhém NZ pro kostku jsou nulové)

První impulsová věta pro kladku

$\vec{0} = M\vec{g} + (-\vec{T}) + \vec{F}$ (translační zrychlení kladky, tj. zrychlení jejího SH, je nulové)

$0 = -Mg - T + F$ (poslouží pouze pro případné určení velikosti síly $\vec{F}$)

Druhá impulsová věta vzhledem k ose symetrie kladky (moment setrvačnosti $J = \frac{1}{2}MR^2$)

$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_F + \vec{M}_{Mg} + \vec{M}_{(-T)}$, přičemž $\vec{M}_{Mg} = \vec{0}$, $\vec{M}_F = \vec{0}$ (síly $\vec{F}$ a $M\vec{g}$ mají působiště v SH),

$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{(-T)}$

Úhlové zrychlení i moment síly $-\vec{T}$ mají směr záporně orientované osy z, ve složkách proto $\vec{\varepsilon} \sim (0, 0, \varepsilon_z)$, $\vec{M}_{(-T)} \sim (0, 0, M_{(-T,z)}) = (0, 0, -TR)$ (TR je velikost momentu, ale jeho z-ová složka je záporná, neboť moment má směr záporné osy z)

$$J\varepsilon_z = M_{(-T,z)} \Rightarrow J\varepsilon_z = -RT \quad (2)$$

Přejdeme-li v rovnicích (1) a (2) k velikostem zrychlení a úhlového zrychlení, dostaneme při zvolené soustavě souřadnic (!!)

$-ma = -mg + T \quad (1)$, neboť $\vec{a} \sim (0, a_y, 0) = (0, -a, 0)$, kde $a_y < 0$, $a_y = -|\vec{a}| = -a$

$-J\varepsilon = -TR \Rightarrow J\varepsilon = TR \quad (2)$, neboť $\vec{\varepsilon} \sim (0, 0, \varepsilon_z) = (0, 0, -\varepsilon)$, kde $a_y < 0$, $\varepsilon_z = -|\vec{\varepsilon}| = -\varepsilon$

Rovnice (1) a (2) obsahují neznámé a_y, ε_z, T, potřebujeme vazební podmínku, tj. vztah mezi zrychlením kostky a úhlovým zrychlením kladky. Vypadá to, že tyto dvě veličiny spolu nesouvisejí, souvislost se objeví, pokud se lano odvíjí z kladky bez prokluzování.
Především: v každém okamžiku platí souvislost tečného zrychlení libovolného bodu na obvodu kladky a jejího úhlového zrychlení vztah $|a_t| = R\varepsilon$ (a to bez ohledu na to, zda lano prokluzuje či nikoli – vztah se týká jen samotné kladky). Vazební podmínka přio neprokluzování pak svazuje $|a_t|$ s velikostí zrychlení kostky $|\vec{a}|$ takto:
Při poklesu kostky o nějaký úsek Δs se body na obvodu kladky posunou právě o oblouk o délce Δs, kladka se tedy pootočí o úhel $\Delta\varphi$, přičemž $\Delta s = R\Delta\varphi \Rightarrow |\vec{a}| = |a_t| \Rightarrow a = R\varepsilon \quad (3)$.
Řešíme tedy soustavu rovnic pro neznámé a, ε, T

$-ma = -mg + T \quad (1)$

$J\varepsilon = TR \quad (2)$

$a = R\varepsilon \quad (3)$