CRAMEROVO PRAVIDLO

Cíl: odvodit platnost Cramerova pravidla pro hledání konkrétního řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

Předpoklady: znalost řešení nehomogenních soustav lineárních rovnic, znalost výpočtu a definice determinantů matice, adjungované matice, inverzní matice, násobení matic.

Definice: Soustava lineárních rovnic

Nechť T je číslené těleso. Pak soustava rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

kde $a_{ij} \in T, b_i \in T$ se nazývá *(nehomogenní) soustava k lineárních rovnic o n neznámých* (nad T).

Poznámka: Pro lepší vyjadřování zaveďme ještě následující označení a názvy: číslo a_{ij} v soustavě budeme nazývat *koeficient* (v i-té rovnici u j-té neznámé), resp. číslo b_i budeme nazývat *absolutní člen* (i-té rovnice). Dále matice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}, \qquad \text{resp. } \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}$$

se nazývá *matice soustavy*, resp. *rozšířená matice soustavy.*

ČÁST I.

Cramerovo pravidlo pro 2 lineární rovnice o 2 neznámých
Mějme soustavu 2 rovnic o 2 neznámých, jejíž matice soustavy je regulární:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Příklad 1

Libovolným způsobem vypočítej x_1 a x_2. Jestliže má tvůj postup nějaké dodatečné podmínky, vymysli, jak by situace dopadla, kdyby nebyly splněny.

Příklad 2

Vyšly ti lomené výrazy, kde čitatel a jmenovatel jsou determinanty jistých matic tvořených koeficienty u neznámých a absolutními členy v zadané soustavě. Najdi tyto matice a zapiš do výrazu:

$$x_1 = \frac{\left| \quad \quad \right|}{\left| \quad \quad \right|} \qquad\qquad x_2 = \frac{\left| \quad \quad \right|}{\left| \quad \quad \right|}$$

ČÁST II.

Cramerovo pravidlo pro 3 lineární rovnice o 3 neznámých

Mějme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých, jejíž matice soustavy je regulární:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Poznámka: Je důležité si uvědomit, že platí $A \cdot X = B$,

kde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Příklad 3

Vynásob následující matice:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} =$$

Příklad 4

Spočti determinant červené, zelené a modré matice z příkladu 3.

Příklad 5

Uvažujme následující rovnosti. Doplň do barevných polí zjištěné determinanty z příkladu 4.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \boxed{} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \boxed{} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \boxed{} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Příklad 6

Vyjádři z rovnic z příkladu 5 tebou vypočítané determinanty z barevných polí, aby ti zůstaly na levé straně samostatně. (Determinanty zbývajících matic ponech v maticovém zápisu, nerozepisuj podle definice)

$$\boxed{} =$$

$$\boxed{} =$$

$$\boxed{} =$$

ČÁST III.

Cramerovo pravidlo pro n lineárních rovnic o n neznámých
Mějme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých, jejíž matice soustavy je regulární:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Poznámka: Soustavu lze zapsat maticově jako: $A \cdot X = B$

Příklad 7

Z výrazu $A \cdot X = B$ vyjádři X.

Poznámka: Je důležité si uvědomit, že A, B v rovnici jsou matice, nikoliv čísla, tedy nebudeme maticí A dělit obě strany rovnice.

Příklad 8

Inverzní matici, která ti vznikla v příkladu 7, nahraď vzorcem s adjungovanou maticí a celý výraz rozepiš tak, aby v maticích bylo vidět několik členů pro tvou lepší představu, jak matice vypadají. (Tzn. místo pouze označení matic písmeny napiš alespoň pár členů do sloupců a řádků).

Příklad 9

Jak se změní celá rovnice, když vyjádříme pouze jedno x? Zvolme například x_1.
Následující úkoly tě provedou, jak se změní pravá strana, když na levé uvažujeme pouze x_1.

a) Které koeficienty v soustavě rovnic stojí u neznámé x_1? Vypiš je. (Pomoct ti může definice soustavy uvedená na začátku tohoto pracovního listu)

b) Jaké jsou algebraické doplňky těchto prvků? Označ je v následující matici:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

c) Napiš si doplňky z příkladu 9b) za sebou do jednořádkové matice. Tuto matici vynásob maticí B z příkladu 8, která obsahuje sloupec absolutních členů. (Opět vypiš několik prvních členů $\cdots$ a poslední člen)

d) Napiš celou pravou stranu rovnice z příkladu 8, když bude vlevo x_1.
(*Nápověda:* násobení adjungované matice maticí absolutních členů nahradíš výrazem z předchozího bodu c)

e) Kdyby výraz z bodu c vypadal takto: $A_{11} \cdot a_{11} + A_{21} \cdot a_{21} + A_{31} \cdot a_{31} + \cdots + A_{n1} \cdot a_{n1}$,
pak podle Laplaceovy věty a jejího důsledku by výraz odpovídal determinantu matice:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

V našem případě, ale místo prvku a_{11} je prvek b_1, místo prvku a_{21} prvek b_2...
Napiš, jak bude vypadat matice, jejíž determinant je roven výrazu z bodu c.

Příklad 10

Kdybychom nevybrali neznámou x_1, ale neznámou x_k, dokážeš stejnými kroky jako v předchozím příkladu 9 dojít k tomu, čemu se x_k rovná?

Princip, který bylo možné odvodit předchozími příklady, se nazývá Cramerovo pravidlo.

Věta: Cramerovo pravidlo

Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých, jejíž matice soustavy A je regulární. Pak soustava má jediné řešení $(x_1, ..., x_n)$, přičemž platí:

$x_j = \dfrac{|A_j|}{|A|}$ pro $j = 1, 2, ..., n$,

kde A_j je matice vzniklá z matice A nahrazením j-tého sloupce sloupcem absolutních členů.