HLEDÁNÍ INVERZNÍ MATICE

Cíl: pochopit vzorec pro hledání inverzní matice pomocí adjungované matice. Objevit algoritmus pro hledání inverzní matice za pomoci elementárních řádkových úprav.

Předpoklady: znalost Laplaceovy věty a pojmů algebraický doplněk prvku, regulární matice, schopnost násobení matic a provádění elementárních řádkových úprav.

Definice: Inverzní matice

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Matice X s vlastností:

$A \cdot X = E_n \quad \wedge \quad X \cdot A = E_n$

se nazývá inverzní matice k matici A a označuje se symbolem A^{-1}.

Poznámka: Pro $n = 3$, tedy hledáme matici:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ČÁST I.

Vzorec pro hledání inverzní matice s adjungovanou maticí

Příklad 1

Při hledání inverzní matice si pomůžeme maticí, kde namísto prvku a_{ij} stojí jeho algebraický doplněk A_{ij}. Rozepiš jednotlivé algebraické doplňky na příslušná místa do matice.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\qquad\qquad} & \underline{\qquad\qquad} & \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} & \underline{\qquad\qquad} & \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} & \underline{\qquad\qquad} & \underline{\qquad\qquad} \end{pmatrix}$$

Příklad 2

Když vynásobíme libovolný prvek jeho algebraickým doplňkem, dostaneme člen determinantu (plyne z Laplaceovy věty).
Když vynásobíme celý řádek prvků s jejich příslušnými algebraickými doplňky, dostaneme determinant celé matice (důsledek Laplaceovy věty). (Můžeš si představit, jako bychom násobili dva vektory středoškolským skalárním součinem.)

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

Schématicky:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = |A|$$

Co se stane, když vynásobíš řádek prvků s algebraickými doplňky jiných prvků? Například:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23}$$

Rozepiš algebraické doplňky z předchozí situace a roznásob členy.

Zamysli se nad tím, jestli to platí i obecně, kdybychom zvolili například druhý řádek první matice a algebraické doplňky ze třetího řádku druhé matice. Proč by tomu tak mohlo být?

Při násobení matic, ale nedochází k násobení řádků jedné matice s řádky druhé matice.

Definice: Součin matic

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m/n, B = (b_{ij})$ je matice typu n/p (obě nad týmž tělesem T). Pak matice $A \cdot B = C = (c_{ij})$, typu m/p, kde:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj},$$

pro $i = 1, ..., m, j = 1, ..., p$, se nazývá součin matic A, B (v tomto pořadí).

Příklad 3

Přeházej prvky matice tvořené algebraickými doplňky tak, aby platilo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

Nápověda: Využij znalost z příkladu 2 a důsledek Laplaceovy věty

Matice tvořená algebraickými doplňky splňující předchozí rovnost se nazývá *adjungovaná matice* a značí se A^*.

Příklad 4

Najdi způsob, jak vytvořit z následující matice matici jednotkovou.

$$? \cdot \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 5

Zkus najít vzorec pro hledání inverzní matice na základě její definice a předchozích výpočtů. Za jakých podmínek vzorec platí? Řešení najdeš na další straně.

Vzorec pro hledání inverzní matice

Nechť A je regulární matice. Pak $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$

Doplň:

Čtvercová matice je regulární právě tehdy, když její determinant je ______________.

Čtvercová matice je singulární právě tehdy, když její determinant je ______________.

ČÁST II.

Algoritmus pro hledání inverzní matice pomocí elementárních řádkových úprav

Definice: Elementární řádkové úpravy

Nechť A je matice typu m/n nad tělesem T. Pak každá z následujících úprav matice A se nazývá *elementární řádková úprava* matice A:

1. libovolná záměna pořadí řádků,
2. vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem z T,
3. k jednomu řádku přičtení jiného řádku vynásobeného libovolným číslem z T,
4. k jednomu řádku přičtení lineární kombinace ostatních řádků.

Věta: Elementární řádkové úpravy regulární matice

Nechť A je regulární matice řádu n nad tělesem T. Pak platí:

1. matici A lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na jednotkovou matici E_n
2. provedení jedné řádkové elementární úpravy matice A je ekvivalentní vynásobení matice A zleva jistou regulární maticí řádu n.

Cílem následujících příkladů je uvědomění si vztahu mezi násobením regulárních matic a provádění elementárních řádkových úprav a následné pochopení algoritmu pro hledání inverzní matice.

Pro jednoduchost budeme hledat inverzní matici k matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Principy následujících příkladů jsou ale uplatnitelné na libovolnou regulární matici jakéhokoliv řádu.

Příklad 6

Jaká matice vznikne následující elementární řádkovou úpravou? (První řádek vynásobíme (-2) a přičteme k druhému řádku)

$$\begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \hookrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Příklad 7

Najdi jistou regulární matici řádu 2, která odpovídá elementární řádkové úpravě z předchozího příkladu.

Sem přepiš výsledek předchozího příkladu

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Příklad 8

Najdi jisotu regulární matici řádu 2, kterou vynásobíš matici, která byla výsledkem příkladu 6, tak aby vznikla matice jednotková. Které elementární řádkové úpravě odpovídá?

Sem přepiš výsledek 6. příkladu

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 9

Za pomoci předchozích příkladů a definice inverzní matice najdi inverzní matici k matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$?
Nevíš si rady? Nápovědu najdeš vespodu stránky.

Příklad 10

Stejnými regulárními maticemi, které jsi hledal/a v příkladech 8 a 7 (v tomto pořadí), vynásob jednotkovou matici. Co vyjde? Proč? Obecné vysvětlení najdeš na další straně.

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Nápověda k př. 9: Napiš si za sebou regulární matice, kterými jsme násobili a za ně dopiš původní matici, ke které hledáme inverzi. Následně vyjdi z definice inverzní matice.

Obecné vysvětlení:
$R_1, ..., R_s$ jsou regulární matice (např. ty, kterými jsme násobili v předchozích příkladech).

$\underbrace{(R_s \cdot R_{s-1} \cdot \dots \cdot R_2 \cdot R_1)}_{A^{-1}} \cdot A = E_n$

$(R_s \cdot R_{s-1} \cdot \dots \cdot R_2 \cdot R_1) \cdot E_n = A^{-1}$, protože jednotková matice je neutrální prvek.

Prakticky tedy provádíme elementární řádkové úpravy současně na matici A i E_n tak, abychom matici A převedli na matici jednotkovou a matici jednotkovou převedli na hledanou inverzní matici.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E_n \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} E_n & A^{-1} \end{array}\right)$$

Příklad 11

Pomocí algoritmu (schéma z obecného vysvětlení) najdi inverzní matici k matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Příklad 12

Doplň vynechaná pole:

Připomeň si, že hodnost matice je počet nenulových řádků v matici po jejím převedení elementárními úpravami na ____________________.

Abychom tedy mohli čtvercovou matici A řádu n převést elementárními úpravami na jednotkovou, je nutné a stačí, že její hodnot $h(A) =$ _____

Důsledek: Matice A řádu n je regulární, právě tehdy, když $h(A) =$ _____.

Příklad 13*

a) Najdi inverzní matici k matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ pomocí sloupcových úprav. Vyšla stejně? Zdůvodni.

b) Dokážeš celý proces hledání inverzní matice přeformulovat na sloupcové úpravy a násobení elementárními maticemi zprava?