ODVOZENÍ LAPLACEOVY VĚTY

Cíl: odvodit platnost Laplaceovy věty pro výpočet determinantu matice libovolného řádu.

Předpoklady: znalost definice determinantu matice, schopnost vypsat členy determinantu z definice, základní středoškolské znalosti z kombinatoriky.

Definice: Determinant matice

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad tělesem T. Pak *determinant* matice A je číslo z tělesa T označené $\det A$ (nebo též $|A|$) a definované vztahem:

$$\det A = \sum_{(j_1,\dots,j_n)} (-1)^{I(j_1,\dots,j_n)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n},$$

kde $I(j_1, \dots, j_n)$ značí celkový počet inverzí v permutaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

použitých řádkových a sloupcových indexů. Sčítání se provádí přes všechna různá pořadí $(j_1, \dots, j_n)$ sloupcových indexů.

Výraz $(-1)^{I(j_1,\dots,j_n)} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$ se nazývá *člen determinantu*.

ČÁST I.

Členy determinantu matice řádu 3

Příklad 1

Vypiš všechny členy determinantu následující matice A řádu 3 a podtrhni členy obsahující prvek a_{11}. V matici vybarvi všechny prvky, které jsou součástí těchto členů.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Příklad 2

Vypiš všechny členy determinantu matice A obsahující postupně prvek a_{12}, a_{13} a vybarvi v maticích všechny prvky, které tvoří tyto členy.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ČÁST II.

Členy determinantu matice řádu 4

Příklad 3

Kolik členů determinantu má matice řádu 4? Zkus na to přijít bez vypisování všech členů.

$$|B| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Příklad 4

Všechny členy determinantu matice řádu 4 vypadají následovně:

$$\begin{aligned}
&+a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\
&+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\
&+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\
&+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \\
&-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\
&-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} \\
&-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\
&-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}
\end{aligned}$$

Podtrhni mezi všemi vypsanými členy determinantu matice B všechny, které obsahují člen a_{11}. V následující matici vybarvi všechny prvky, které jsou součástí všech těchto podtržených členů.

$$|B^{\star}| = \left\| \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ \hline \end{array} \right\|$$

Příklad 5

Bez počítání a vypisování členů na základě schémat pro matice řádu 3 vybarvi vždy všechny doplňující prvky ze všech členů determinantu, které obsahují vybarvený prvek.

$$|B| = \left\| \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ \hline \end{array} \right\|$$

$$|B| = \left\| \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ \hline \end{array} \right\|$$

$$|B| = \left\| \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ \hline \end{array} \right\|$$

Příklad 6

a) Tebou vybarvená pole v matici $B^\star$ tvoří novou čtvercovou matici. Z definice determinantu napiš, jak vypadá determinant této nové matice. (Použij přesné označení členů tak, jak je v matici $B^\star$)

b) Celý determinant z předchozího příkladu 6a vynásob členem a_{11} a rozepiš jednotlivé členy.

c) Výsledek předchozího příkladu 6b srovnej s podtrhanými členy determinantu z příkladu 4.

Příklad 7

a) Vypiš všechny členy determinantu matice řádu 4, které obsahují prvek a_{11} a zároveň prvek a_{22}. Opět zakresli do následující matice všechny prvky, které jsou součástí těchto členů.

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

b) Jak se situace změní pro výběr prvků a_{21} a a_{12}? Které členy tímto způsobem získáš?

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

c) Do následující matice zakresli sjednocení všech Tebou vybarvených prvků z předchozích dvou matic (7a, 7b).

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

d) Kolik členů determinantu matice C tímto způsobem získáš? Z kolika?

e) Zamysli se nad způsobem, jak by šlo systematicky získat zbývající členy. (Inspiraci hledej v předchozích příkladech, nápovědu najdeš vespodu stránky)

Nápověda k př. 7e: Přemýšlej o tom, kolika různými způsoby můžeš v horních dvou řádcích vybírat 4 prvky tak, aby ti z nich pomyslně vznikla čtvercová matice. Ber v potaz i co se při tvém výběru bude dále dít se zbytkem celé matice.

ČÁST III.

Důkaz Laplaceovy věty

Laplaceova věta

Nechť A je čtvercová matice řádu n a nechť je pevně zvoleno k řádků matice A, kde $0 < k < n$.
Pak determinant matice A je roven součtu všech $\binom{n}{k}$ součinů minorů řádu k, vybraných ze zvolených k řádků, s jejich algebraickými doplňky.

Pro pochopení věty jsou potřebné ještě následující pojmy:

Submatice: ze čtvercové matice řádu n pevně zvolíme k řádků a k sloupců, ze kterých vytvoříme novou matici řádu k. Vybíráme ty prvky, které leží v daném vybraném řádku i sloupci.

Minor: determinant submatice.

Doplňková submatice: submatice tvořená zbývajícími $(n-k)$ řádky a sloupci.

Algebraický doplněk: determinant doplňkové submatice vynásobený číslem (-1) umocněným na součet indexů řádků a sloupců submatice.

Příklad 8

Ověř, že determinant matice řádu 5 má stejný počet členů při počítání z definice jako při použití Laplaceovy věty pro:

a) $k = 1$

b) $k = 2$

Nevíš si rady? Doplň:
Determinant matice řádu 5 má celkem ________ členů.

U rozvoje podle jednoho řádku ($k = 1$) existuje:

________ možností jak vybrat jeden prvek z řádku $\times$ ________ členů determinantu doplňkové submatice řádu $4 =$ ________.

U rozvoje podle dvou řádků ($k = 2$) je:

________ možností jak vybrat submatici řádu 2 z vybraných dvou řádků $\times$ každá tato submatice má ________ členy determinantu $\times$ ________ členů determinantu doplňkové submatice řádu $3 =$ ________.

Příklad 9

Dokaž, že pomocí Laplaceovy věty dostaneš obecně všechny členy determinantu jako z definice pro matici řádu n při zvolení libovolných k řádků ($0 < k < n$).

Nápověda k př. 9: Důkaz proveď na podobném principu, jako v příkladu 8, jen obecně. Potřebuješ ověřit, že počet členů determinantu při vybírání submatic ze zvolených k řádků je totožný s počtem členů determinantu přímo z definice pro matici řádu n.

Kolik členů determinantu má matice řádu n?

Kolika různými způsoby můžeme vybrat submatici řádu k z pevně zvolených k řádků? (Odpověď najdeš přímo ve znění Laplaceovy věty)

Kolik členů determinantu (nazýváme minor) má každá submatice řádu k?

Kolik členů determinantu (nazýváme algebraický doplněk) má každá doplňková submatice? (Zamysli se nad tím, jakého řádu je tato submatice)