

F1421 – Základní matematické metody ve fyzice – Zk 23. 1. 2023

1. a) V ortonormální pravotočivé bázi v \mathbf{R}^3 jsou svými složkami zadány vektory $\vec{a} = (0, 0, 4)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0)$, $\vec{c} = (-2, 1, 0)$. Vypočtěte složky vektorů $\vec{u} = \vec{b} \times \vec{c}$ a $\vec{v} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ v této bázi.

b) Vektory \vec{e} a \vec{f} jsou nekolineární. Charakterizujte všechny vektory \vec{g} , pro něž je vektorový součin $\vec{v} = \vec{g} \times (\vec{e} \times \vec{f})$ nulový.

2. Pohyb hmotného bodu se děje podél osy x a řídí se pohybovou rovnicí $\ddot{x} + K\dot{x} = 0$, kde K je nenulová konstanta. Určete časovou závislost polohy bodu na čase, jestliže jeho počáteční poloha je $x(0) = 0$ a počáteční rychlost $\dot{x}(0) = v_0$. (Návod: Jsou tyto možnosti řešení:

a) pomocí charakteristické rovnice, b) integrací, popřípadě substitucí $v = \dot{x}$ převést na rovnici prvního řádu.)

3. a) Určete přirozený definiční obor funkce $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 2x}$, definiční obor její derivace a derivaci vypočtěte.

b) Určete přirozený definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ a nalezněte všechny její primitivní funkce.

4. Je dána funkce dvou proměnných $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ pro $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

Dodefinováním vzniká funkce spojitá v celé rovině proměnných x, y .

a) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu (podle obou proměnných) této funkce v obecném bodě $(x, y) \neq (0, 0)$.

b) Zjistěte, zda funkce má parciální derivace prvního řádu také v bodě $(x, y) = (0, 0)$ a v kladném případě je určete. (Návod: vyjděte z definice parciálních derivací.)

c) Je funkce diferencovatelná v obecném bodě $(x, y) \neq (0, 0)$? Zdůvodněte. V kladném případě zapište její úplný diferenciál v bodě $(x_0, y_0) = (-1, 2)$ jako funkci přírůstků

$$h = x - x_0, k = y - y_0.$$

5. Sportovní střelec vypálil na terč 40 ran. Jedná se o klasický terč s možnými hodnotami zásahu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (náhodná veličina X). Výsledky střelce ukazuje tabulka:

hodnota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet	1	2	3	3	5	6	9	6	2	2	1

a) Zapište tabulkou rozdělení náhodné veličiny X . (Rozdělením rozumíme soubor $\{(x_i, p_i)\}, 1 \leq i \leq N$, kde p_i je pravděpodobnost dosažení i -té hodnoty.)

b) Určete střední hodnotu veličiny X .

c) Určete rozptyl veličiny X .

d) Určete nejpravděpodobnější hodnotu veličiny X a jí odpovídající pravděpodobnost.