Obsazujte liché řady lavic

Úvod do fyzikálních měření

Zdeněk Bochníček

Literatura:

PÁNEK, Petr. *Úvod do fyzikálních měření*. Brno: skripta PřF MU, 2001

HORÁK, Zdeněk. *Praktická fysika*. SNTL Praha, 1958

BROŽ, Jaromír a kol. *Základy fysikálních měření*. SPN Praha, 1967

Zpracování měření - stručná prezentace

Podmínky zápočtu:

- 80% účast
- vypracování tří odpovědníků s 60% úspěšností během semestru
- minimálně 60% úspěšnost na závěrečné písemce

Styl práce ve cvičení

Úloha experimentu ve fyzice

Každé měření je zatížené chybou

a z toho plyne nejistota výsledku

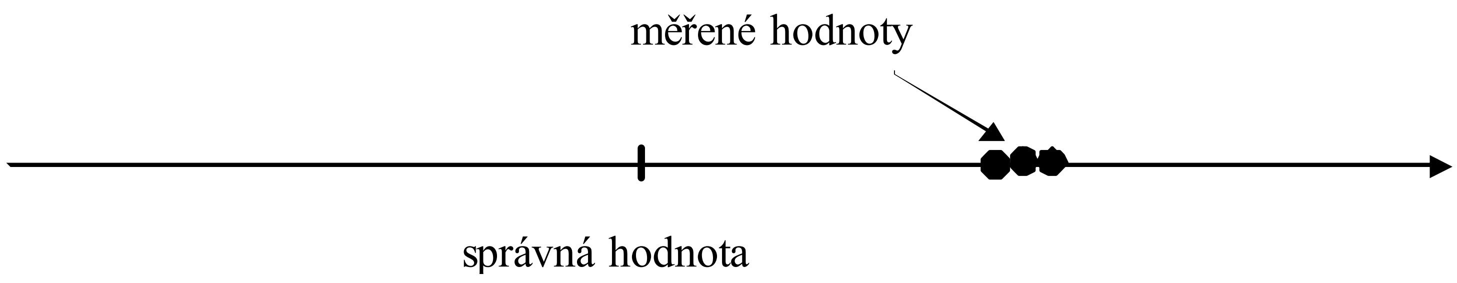
Chyba měření: naměříme jinou hodnotu, než je hodnota správná.

Chyby dělíme na systematické a náhodné (a hrubé).

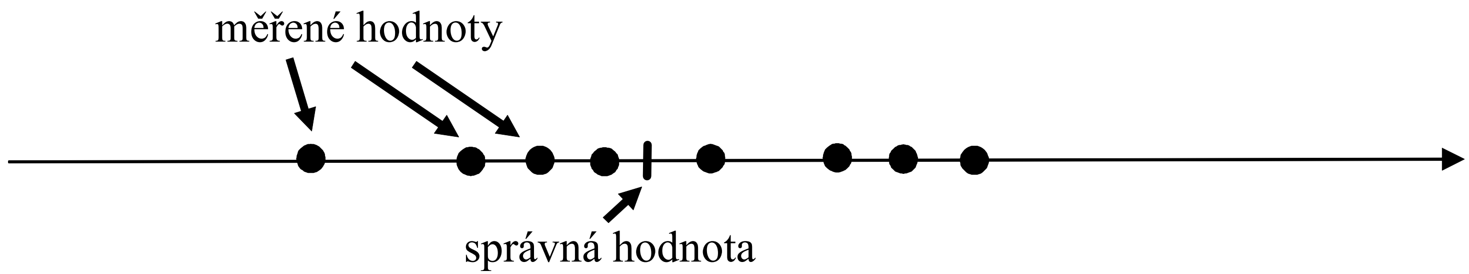
1

Při měření byly získány tyto hodnoty.

Měření 1:



Měření 2:



Které měření je zatíženo velkou náhodnou a které velkou systematickou chybou?

2

Vyznačte na ose možné výsledky dvou měření: s malou a s velkou systematickou chybou. Náhodná chyba obou měření je přibližně stejná.

malá systematická chyba

velká systematická chyba

3

Vyznačte na ose možné výsledky dvou měření: s malou a s velkou náhodnou chybou. Systematická chyba obou měření je přibližně stejná.

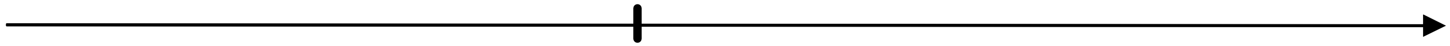
malá náhodná chyba

velká náhodná chyba

4

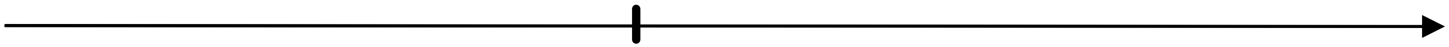
Vyznačte na ose možné výsledky těchto měření:

- s malou systematickou a velkou náhodnou chybou.



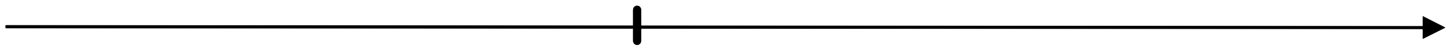
správná hodnota

- s velkou systematickou a malou náhodnou chybou.



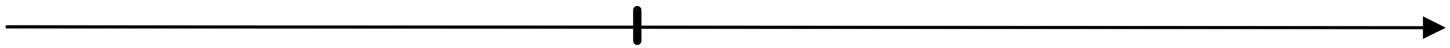
správná hodnota

- s velkou systematickou a velkou náhodnou chybou.



správná hodnota

- s malou systematickou a malou náhodnou chybou.



správná hodnota

chyba x nejistota

$$x = (\text{hodnota} \pm \text{nejistota (chyba)})\left[\text{jednotky}\right]$$

Oficiální terminologie:

systematické chyba určuje **pravdivost** (správnost, *trueness)*

náhodná chyba určuje **preciznost** (precision)

přesnost = pravdivost + preciznost

5

V loňském roce jste měli na spořícím účtu uloženo 20 000Kč. Na konci roku Vám byl připsán celkový roční úrok v hodnotě 300Kč. Jaká byla úroková míra spořícího vkladu?

6

Napíšeme-li výraz:

$$x = (\text{hodnota} \pm \text{nejistota (chyba)})\left[\text{jednotky}\right]$$

je uvedená nejistota tzv. nejistotou absolutní – má stejné jednotky jako hodnota.

Vedle absolutní nejistoty se používá také nejistota relativní, která je bezrozměrná a udává, jakou poměrnou část z hodnoty nejistota tvoří. Relativní nejistota se často udává v procentech.

Jak je relativní nejistota definována?

7

Posuvným měřítkem jsme naměřili tloušťku skleněné destičky:

$$d = (4{,}2 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$$

Jaká je absolutní a jaká relativní nejistota měřené veličiny?

8

Svinovacím metrem měříme šířku knihy a šířku stolu.

Které měření má větší absolutní a které větší relativní nejistotu?

9

Naměřený proud 425mA byl změřen s relativní nejistotou $2 \cdot 10^{-3}$.

Jaká byla absolutní nejistota ?

10

Chceme změřit šířku kovového nosníku (přibližná hodnota 12cm) s relativní nejistotou 1‰. S jakou absolutní nejistotou musíme měřit?

11

Jak dlouho musíme měřit periodu kmitů kyvadla (počítat kmity a měřit čas), abychom ji určili s nejistotou 10^{-4}? Čas měříme ručními stopkami.

Návod: Nejprve odhadněte, s jakou absolutní nejistotou jste schopni ručními stopkami měřit časový interval.

12

Neoficiální terminologie:

Níže jsou uvedeny dva výsledky měření:

$$\text{A:} \quad U = (4,25 \pm 0,01)\,\text{mV}$$

$$\text{B:} \quad U = (425,4 \pm 0,1)\,\text{V}$$

Které měření je **přesnější** a které **citlivější**?

13

Vyberte pravdivé výroky

A: Přesnost měření souvisí s relativní nejistotou.

B: Přesnost měření souvisí s absolutní nejistotou.

C: Citlivost měření souvisí s relativní nejistotou.

D: Citlivost měření souvisí s absolutní nejistotou.

14

Klasická definice pravděpodobnosti:

$$\text{Pravděpodobnost} = \frac{\text{Počet případů příznivých}}{\text{Počet případů možných}}$$

Jakých hodnot může pravděpodobnost daného jevu nabývat?

15

Klasická definice pravděpodobnosti:

$$\text{Pravděpodobnost} = \frac{\text{Počet případů příznivých}}{\text{Počet případů možných}}$$

Jaká je pravděpodobnost, že na hrací kostce padne číslo „3“?

16

Jaká je pravděpodobnost, že na minci padne „orel“?

17

Jaká je pravděpodobnost, že na hrací kostce padne sudé číslo?

18

Jaká je pravděpodobnost, že na hrací kostce padne číslo dělitelné třemí?

19

Jaká je pravděpodobnost, že se narodí děvče?

Statistická definice pravděpodobnosti

n krát opakujeme daný experiment

m krát je výsledek „úspěch“ (příznivý případ).

$$\text{Pravděpodobnost} = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

21

V roce 1999 se v ČR narodilo 43 642 děvčat a 45 829 chlapců.

Z těchto dat určete odhad pravděpodobnosti narození děvčete či chlapce.

28

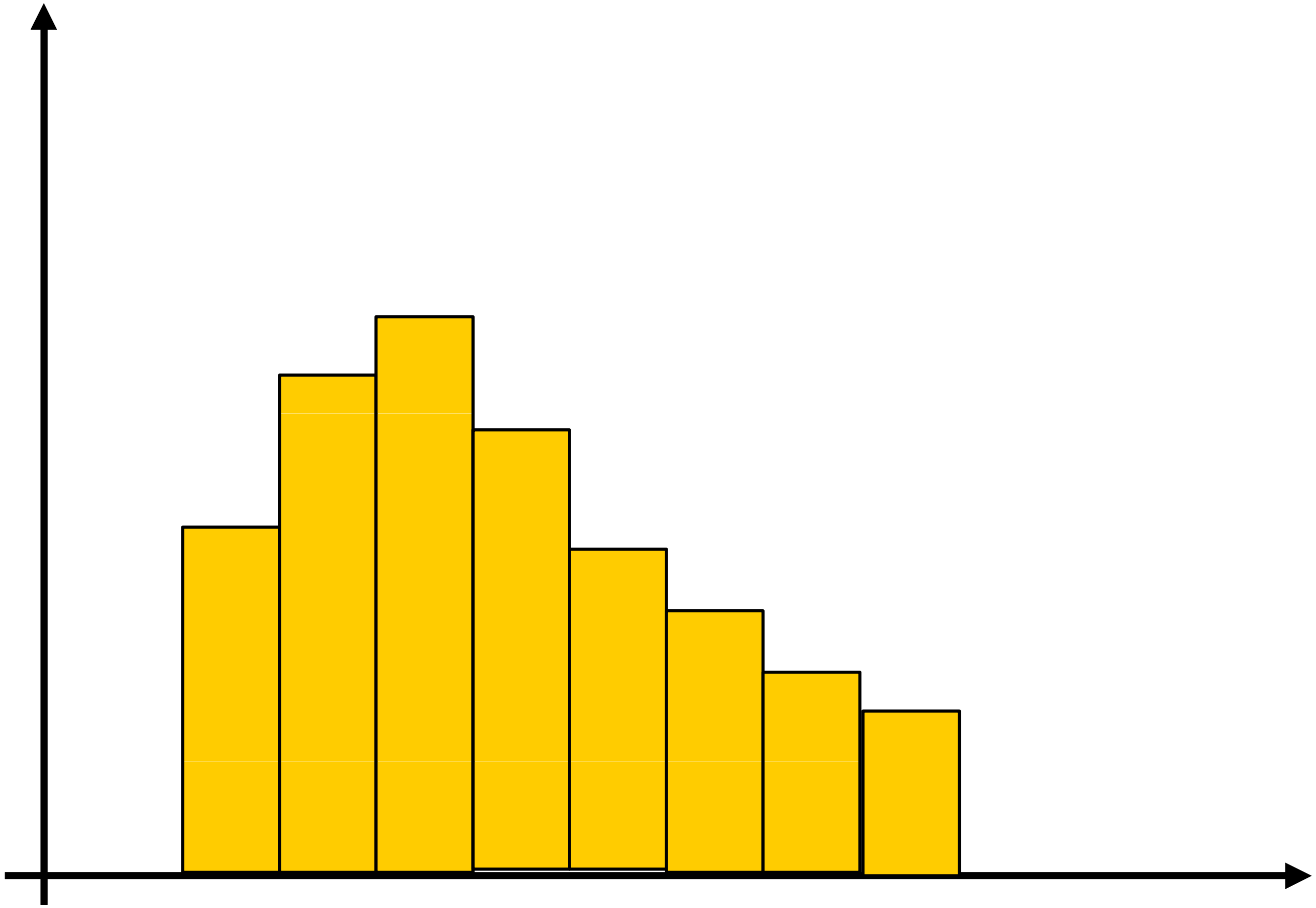
Měříme opakovaně n krát za shodných podmínek stejnou veličinu.

Danou hodnotu x naměříme m krát.

Číslu m říkáme „četnost“ měřené hodnoty x.

Jaké hodnoty může četnost nabývat, pokud jsme provedli n měření?

Tento graf nazýváme histogram

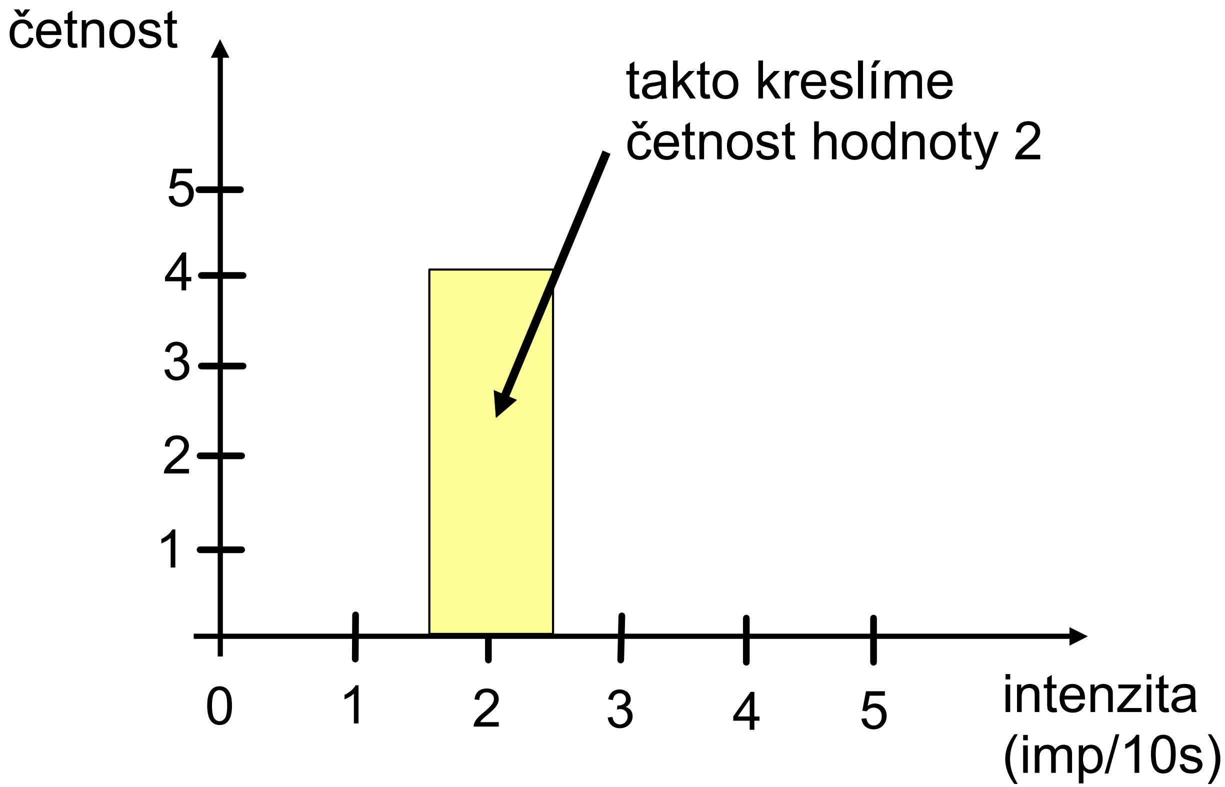


29

Při měření intenzity pozadí ionizujícího záření byly naměřeny následující hodnoty:

číslo měření	intenzita (imp/10s)
1	3
2	4
3	3
4	3
5	4
6	2
7	4
8	3
9	3
10	2

Nakreslete histogram: graf četnosti intenzity jako funkce měřené hodnoty



30

Měříme opakovaně *n* krát za shodných podmínek stejnou veličinu.

Danou hodnotu *x* naměříme *m* krát.

Číslu *m*/*n* říkáme „relativní četnost“ měřené hodnoty *x*.

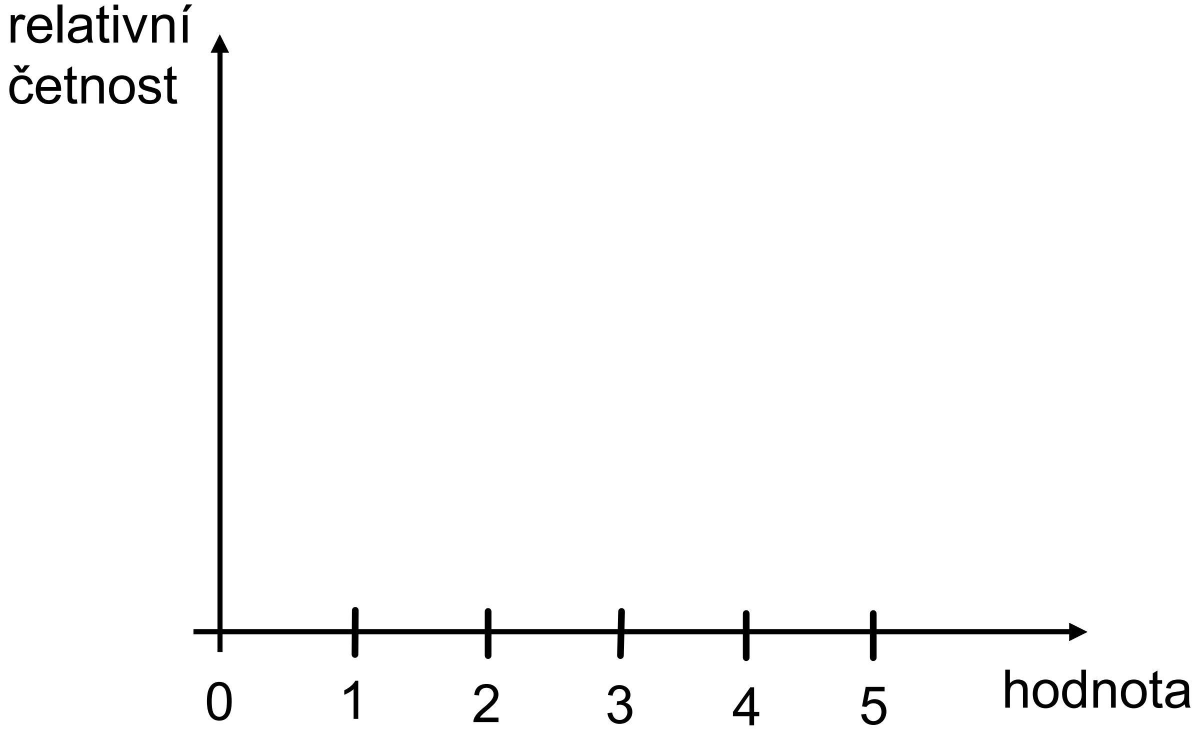
Jaké hodnoty může relativní četnost nabývat, pokud jsme provedli *n* měření?

31

Při měření intenzity pozadí ionizujícího záření byly naměřeny následující hodnoty:

číslo měření	intenzita (imp/10s)
1	3
2	4
3	3
4	3
5	4
6	2
7	4
8	3
9	3
10	2

Nakreslete histogram: graf relativní četnosti intenzity jako funkce měřené hodnoty



32

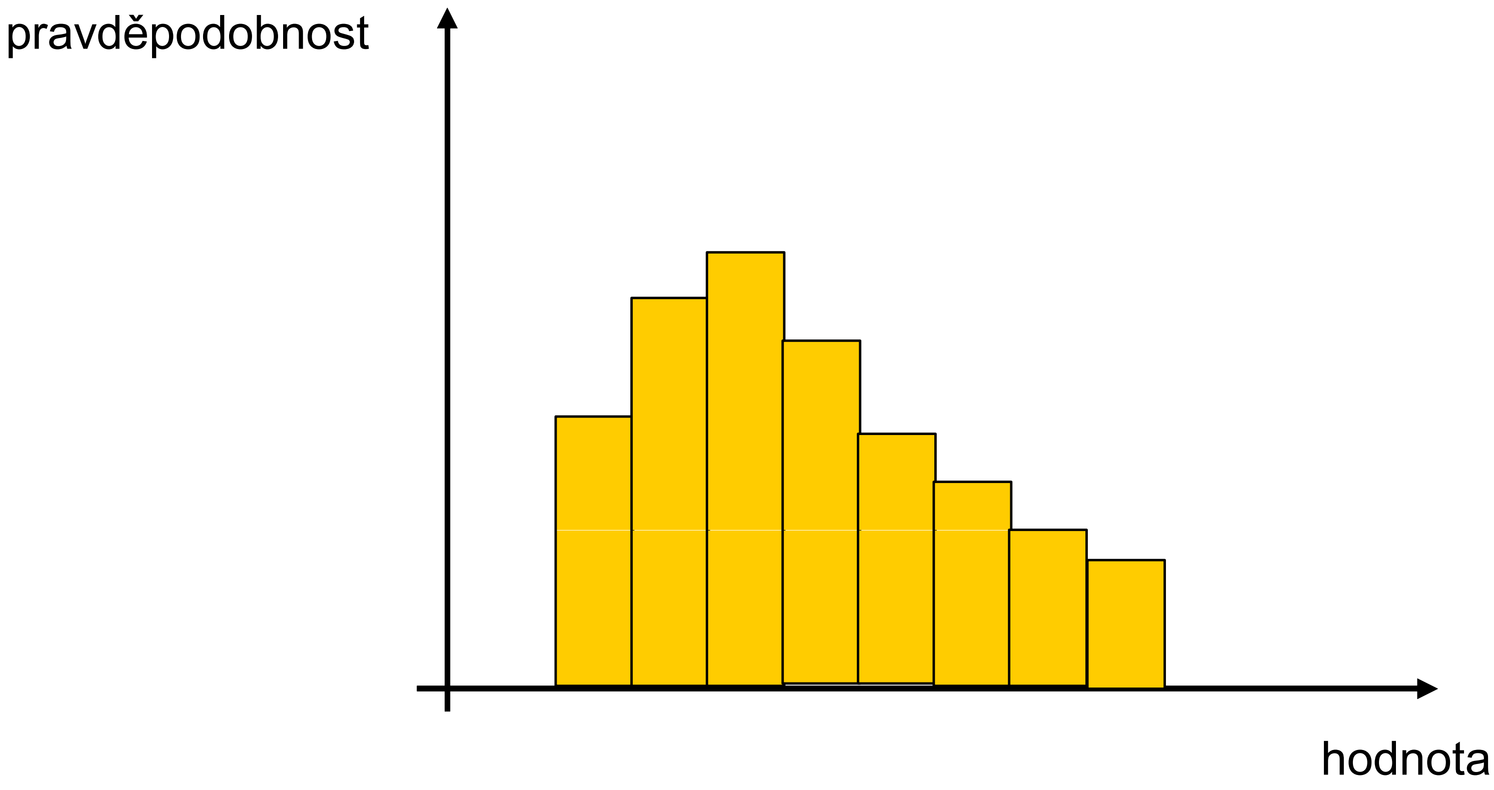
Relativní četnost je definována jako $$\frac{m}{n}$$

Pravděpodobnost je definována jako

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

Za jakých podmínek bude relativní četnost rovna pravděpodobnosti naměření dané hodnoty?

Graf závislosti pravděpodobnosti na naměřené hodnotě nazýváme **rozdělení diskrétní náhodné proměnné**.



Pravděpodobnost naměření hodnoty x_i budeme značit

$$P_{x_i}$$

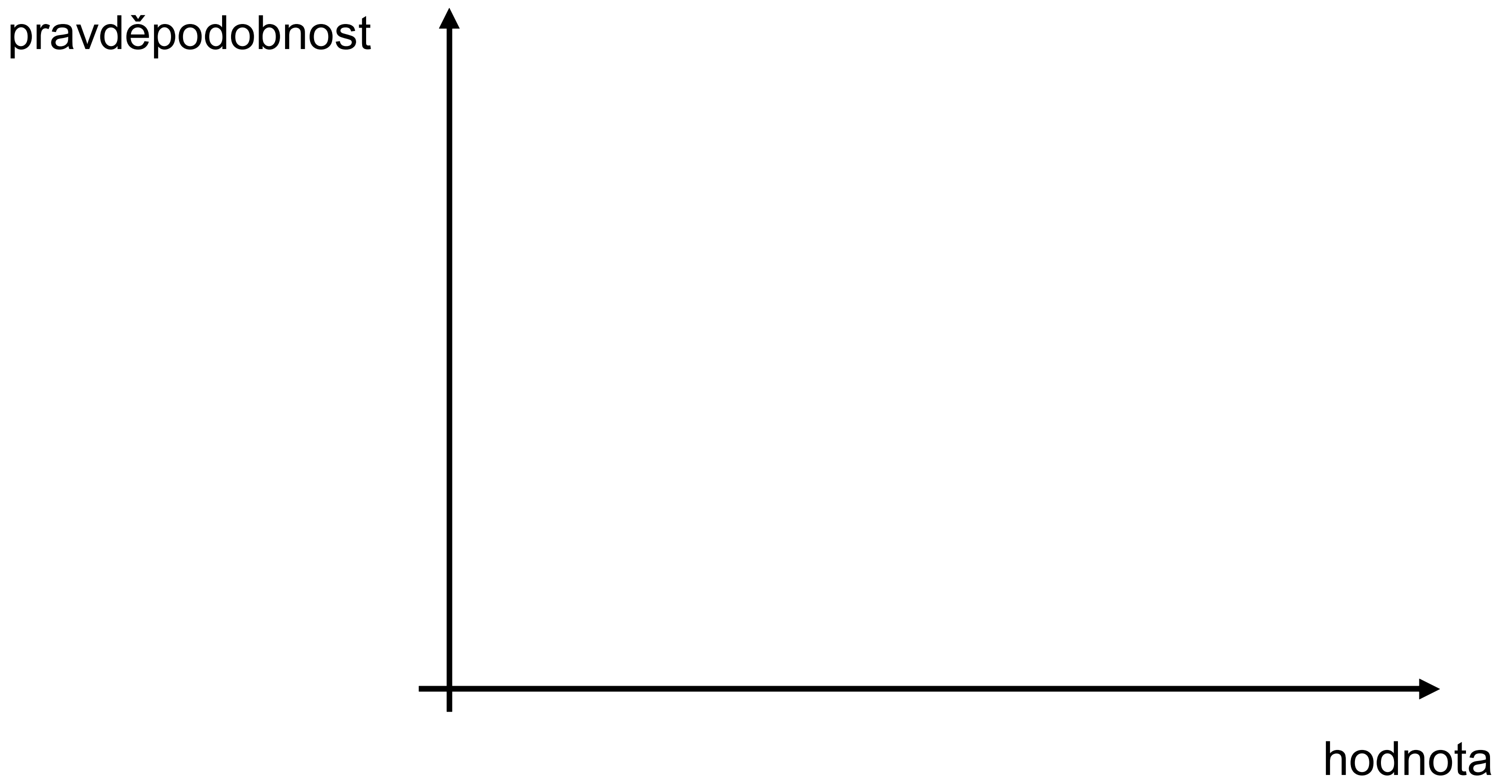
33

Jaká je hodnota výrazu:

$$\sum_{\text{všechna } i} P_{x_i}$$

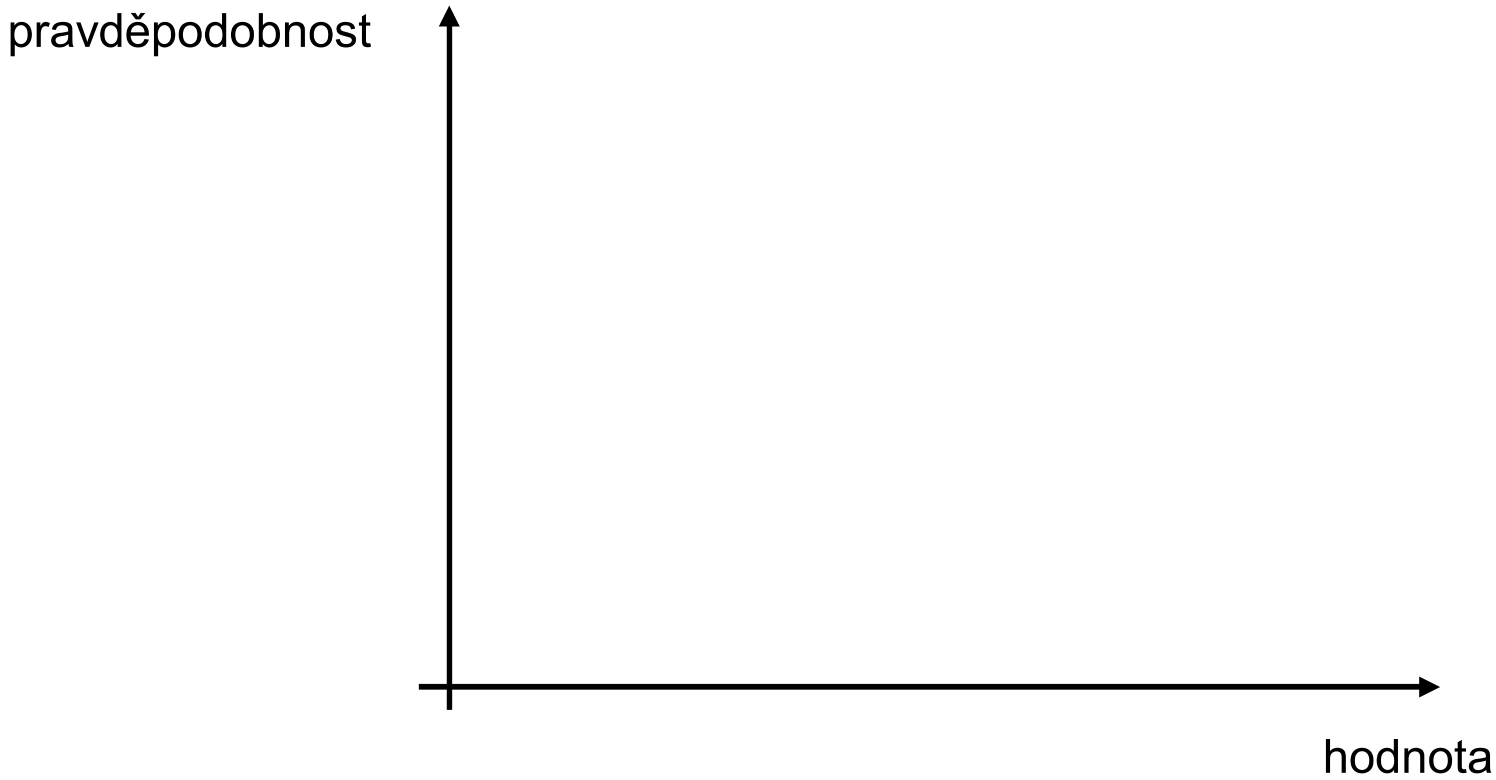
34

Nakreslete pravděpodobnost, že padne dané číslo při hodu kostkou



35

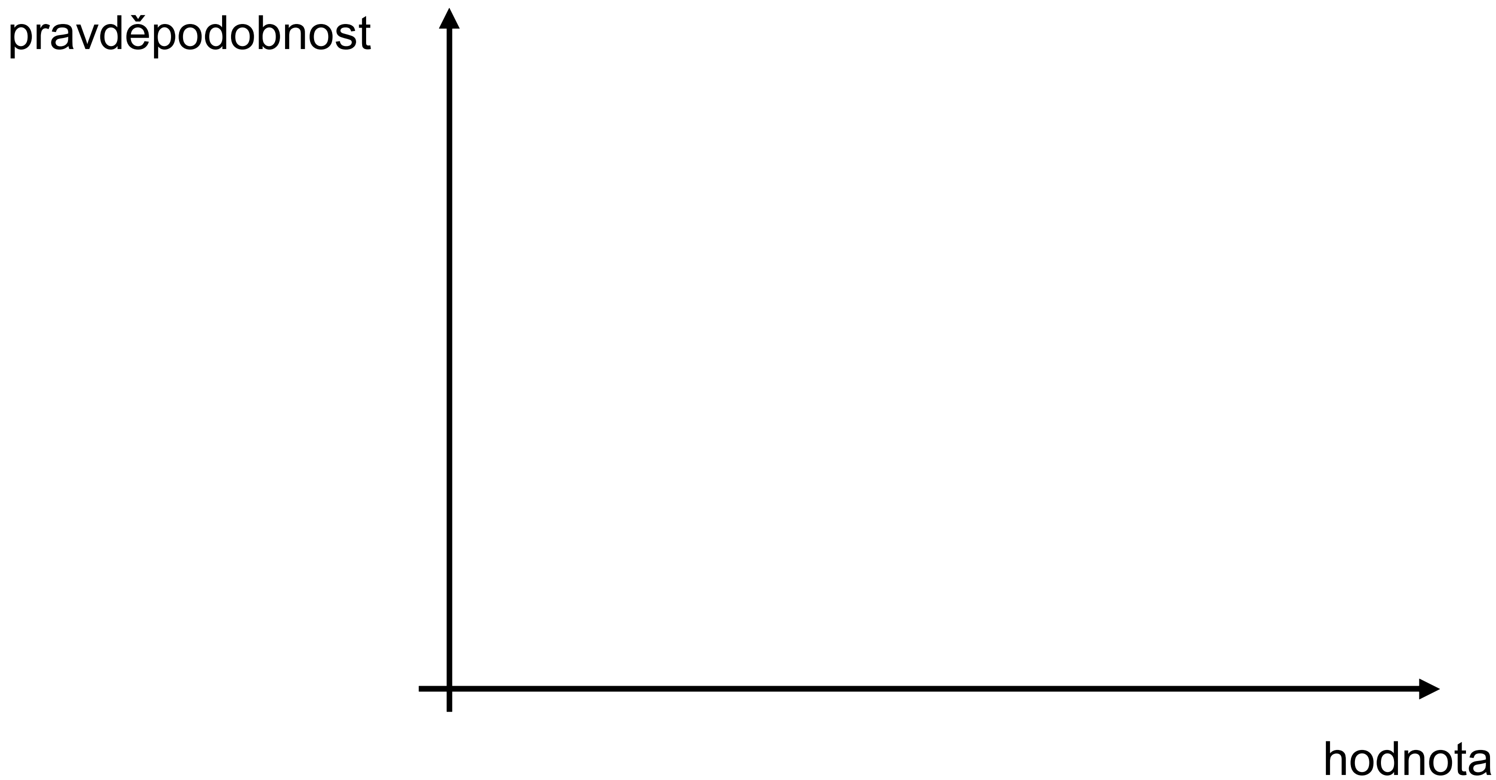
Nakreslete pravděpodobnost, že padne daná strana při hodu mincí



36

Z údajů roku 1999 nakreslete odhad pravděpodobnosti narození daného pohlaví.

(V roce 1999 se v ČR narodilo 43 642 děvčat a 45 829 chlapců).



Doposud jsme se věnovali **diskrétní** náhodné proměnné. To je taková proměnná, která nabývá jen určitých hodnot.

(Př.: výsledek hodu kostkou, posloupnost čísel při tahu sportky apod.)

Fyzikální veličiny však obvykle mohou nabývat libovolné hodnoty. Náhodná proměnná spojená s takovou fyzikální veličinou bude tzv. **spojitá**.

Toto je však pouze teorie

Ve skutečnosti je každá měřená hodnota diskrétní – diskretizaci provádí měřící přístroj.

Tento digitální voltmetr naměří hodnoty 1,295, 1,296 nebo 1,297 ale nic mezi tím.

Přesto, že ve skutečnosti se se spojitými náhodnými proměnnými při měření v praxi nesetkáme, používají se spojitá rozdělení častěji

– lépe se s nimi počítá s využitím aparátu matematické analýzy.

Formalismus popisu náhodných proměnných je odlišný.

Jaká je pravděpodobnost, že naměříme hodnotu frekvence elektromagnetického záření 2,128574443445098853567899653GHz?

Přesně!

Pravděpodobnost naměření určité konkrétní hodnoty spojité náhodné proměnné nemá smysl, Je vždy rovna nule.

Smysl má pouze pravděpodobnost naměření hodnoty v určitém intervalu

Definujeme tzv. hustotu pravděpodobnosti

$$p(x) = \frac{dP}{dx}$$

Analogie

hustota (hmotnosti)

$$\rho = \frac{m}{V}$$

průměrná hustota „kusu“ látky o hmotnosti *m* a objemu *V*

Pokud se hustota tělesa mění místo od místa, má smysl definovat „lokální“ hustotu:

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

Hustota v bodě, hmotnost nekonečně malého kousku děleno objemem tohoto kousku.

38

Známe-li střední hustotu, můžeme hmotnost tělesa spočítat takto:

$$m = V\rho$$

Známe-li lokální hustotu, hmotnost tělesa se spočítá takto:

$$m = \int_V \rho \cdot dV$$

Napište vztah pro výpočet pravděpodobnosti naměření hodnoty *x* z intervalu (x_1, x_2) ze známé hustoty pravděpodobnosti *p(x)*.

Pravděpodobnosti naměření hodnoty *x* z intervalu (*x1, x2*) se spočítá jako:

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx$$

39

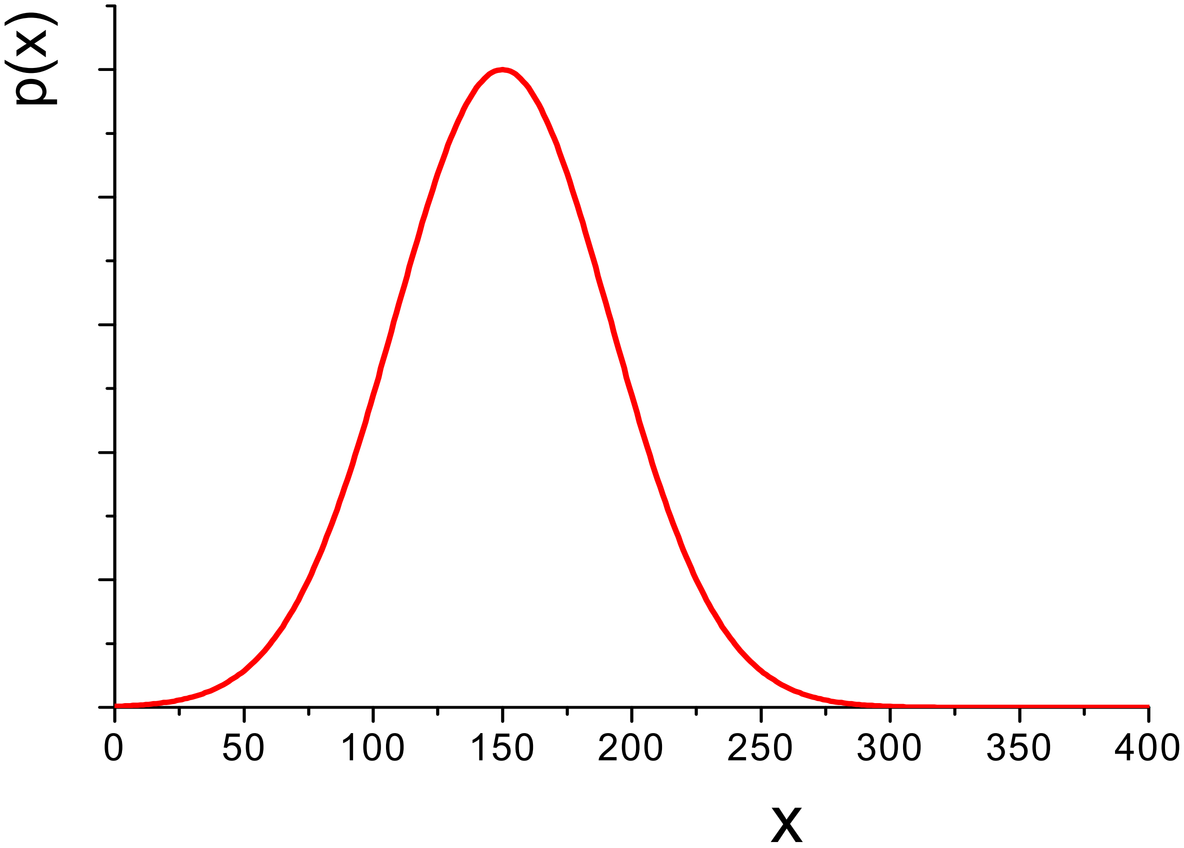
Čemu je roven výraz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = ?$$

40

Seřaďte podle velikosti od nejmenšího po největší

1) pravděpodobnost naměření hodnoty v intervalu (50,100)
2) pravděpodobnost naměření hodnoty v intervalu (100,150)
3) pravděpodobnost naměření hodnoty v intervalu (250,300)

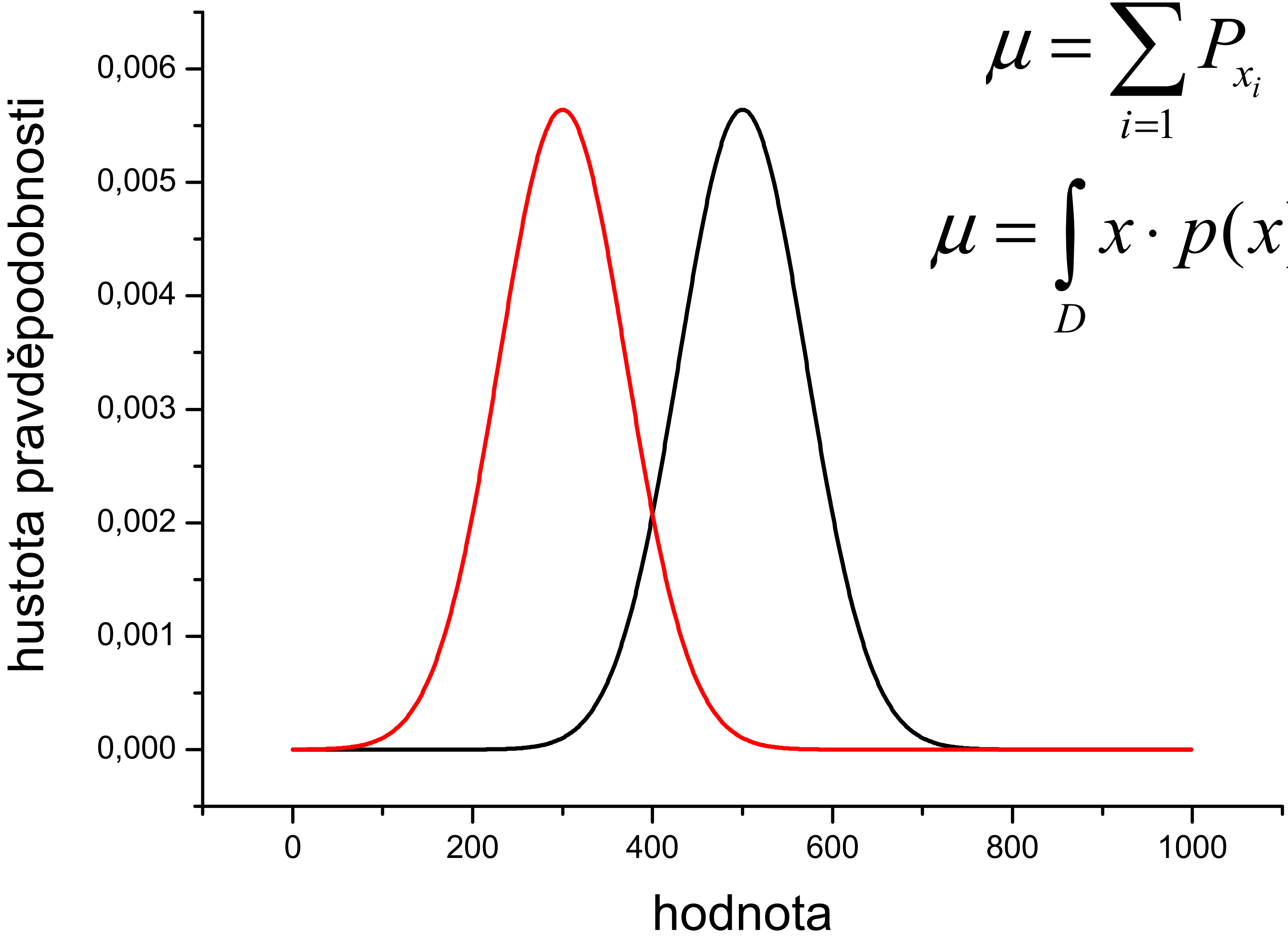


Základními parametry rozdělení jsou:

	diskrétní rozdělení	spojité rozdělení
střední hodnota	$$\mu = \sum_{i=1}^{n} P_{x_i} \cdot x_i$$	$$\mu = \int_D x \cdot p(x)\, dx$$
	n – počet všech možností	*D* – definiční obor
rozptyl (disperze)	$$D = \sum_{i=1}^{n} P_{x_i} \cdot (x_i - \mu)^2$$	$$D = \int_D (x-\mu)^2 \cdot p(x)\, dx$$

41

Které rozdělení má větší střední hodnotu (černé nebo červené)?

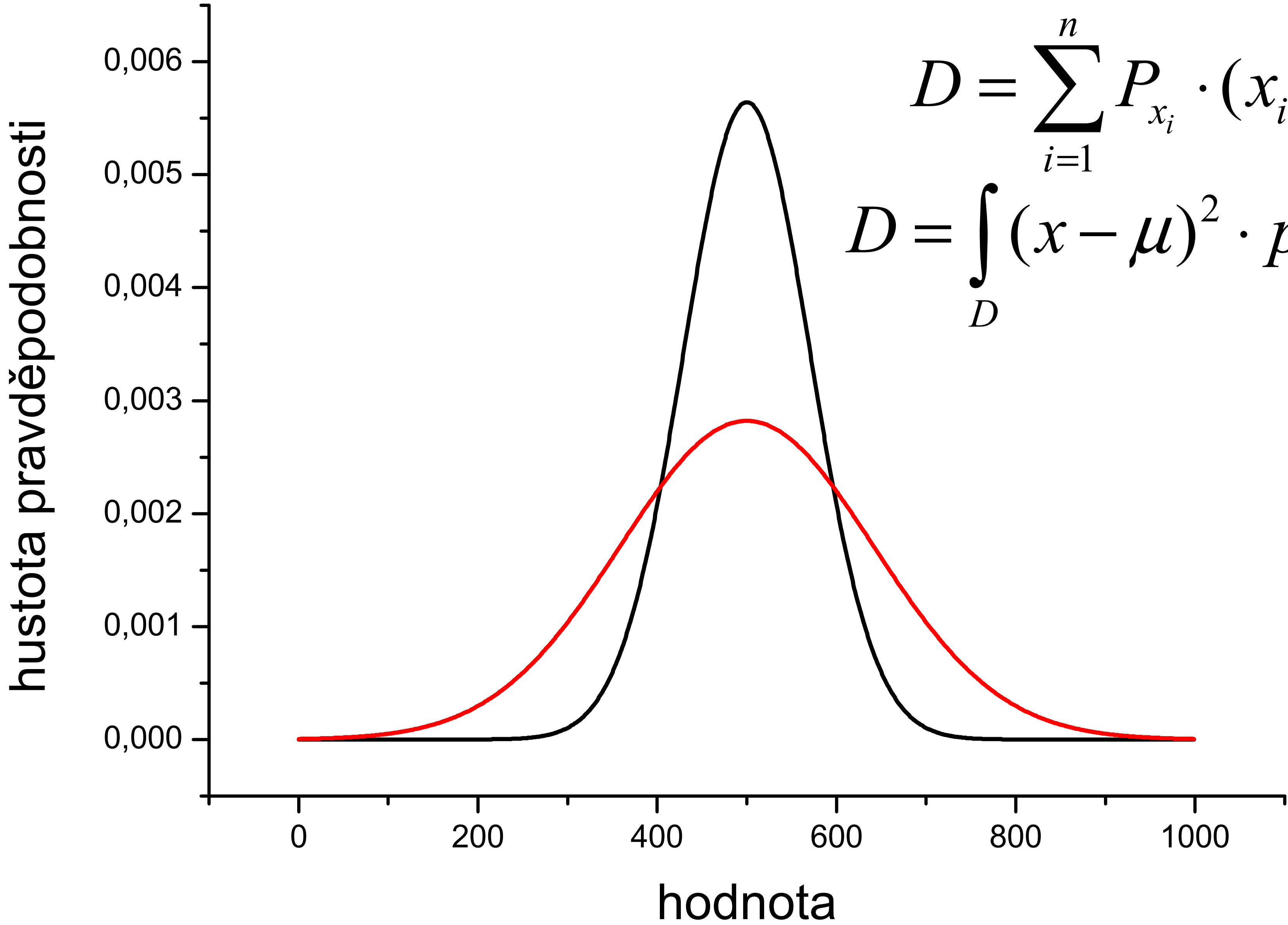


$$\mu = \sum_{i=1}^{n} P_{x_i} \cdot x_i$$

$$\mu = \int_D x \cdot p(x)\, dx$$

42

Které rozdělení má větší disperzi (černé nebo červené)?

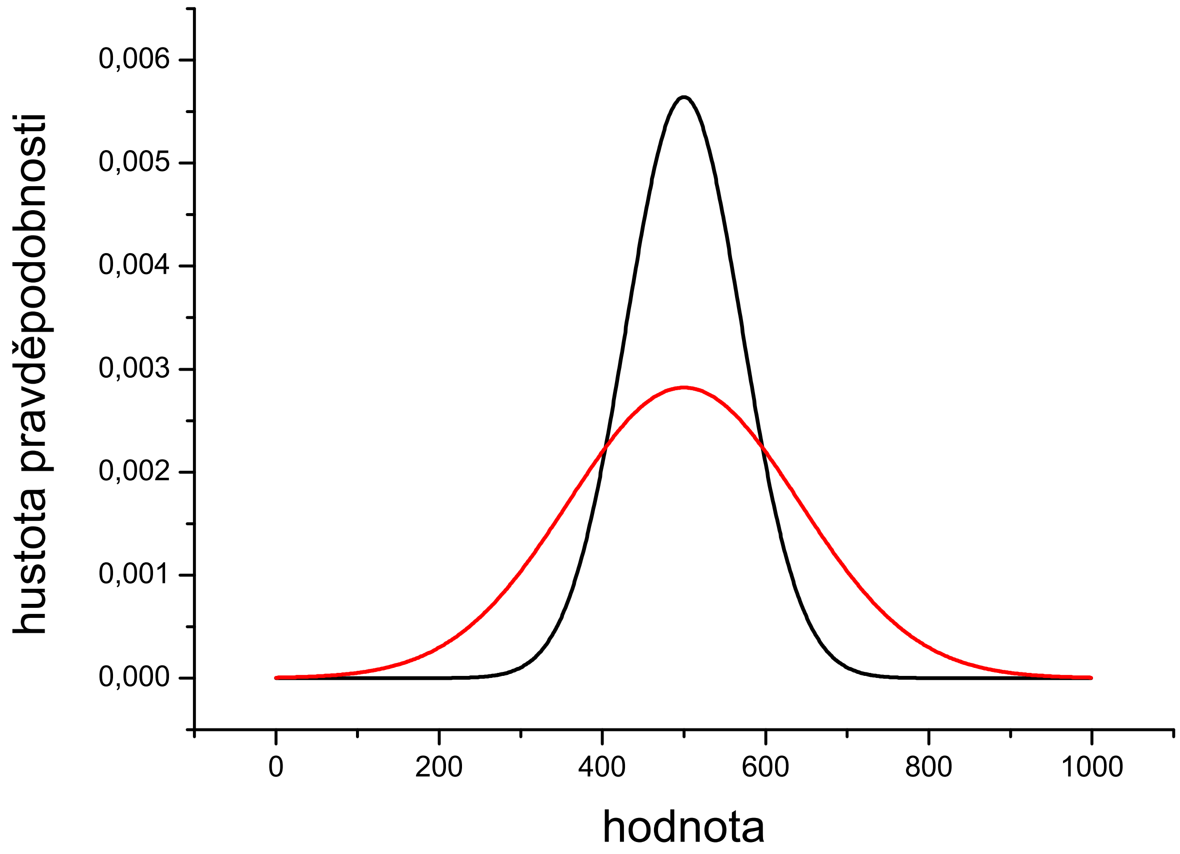


$$D = \sum_{i=1}^{n} P_{x_i} \cdot (x_i - \mu)^2$$

$$D = \int_D (x - \mu)^2 \cdot p(x)\, dx$$

43

Proč je červené rozdělení nižší než černé?



Střední hodnota určuje polohu rozdělení na ose x a disperze jeho šířku.

Disperze však nemůže být přímo jakkoliv definovanou šířkou – nemá vhodnou jednotku. Proto definujeme tzv. **směrodatnou odchylku** σ vztahem:

$$\sigma = \sqrt{D}$$

44

Nakreslete dvě rozdělení spojité náhodné proměnné:

Rozdělení A má větší střední hodnotu a menší směrodatnou odchylku než rozdělení B.

Normální (Gaussovo) rozdělení

Teoreticky odvozeno za těchto předpokladů:

- Na výslednou hodnotu náhodné proměnné má vliv velmi velký počet náhodných jevů
- Každý jev dá vniknout tzv. elementární chybě $\pm\varepsilon$
- Pravděpodobnosti vzniku chyb $+\varepsilon$ a $-\varepsilon$ jsou shodné

Galtonův experiment

Normální (Gaussovo) rozdělení

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

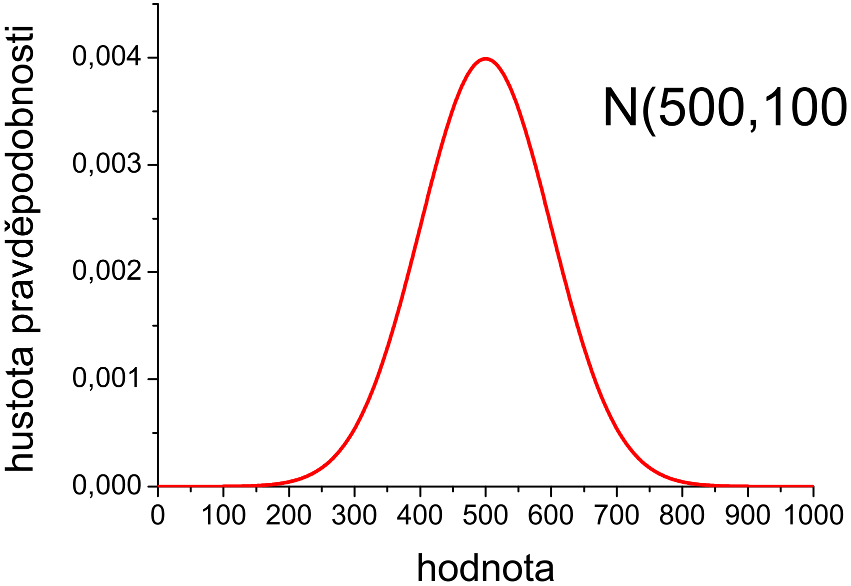
střední hodnota: μ

disperze: $D=\sigma^2$

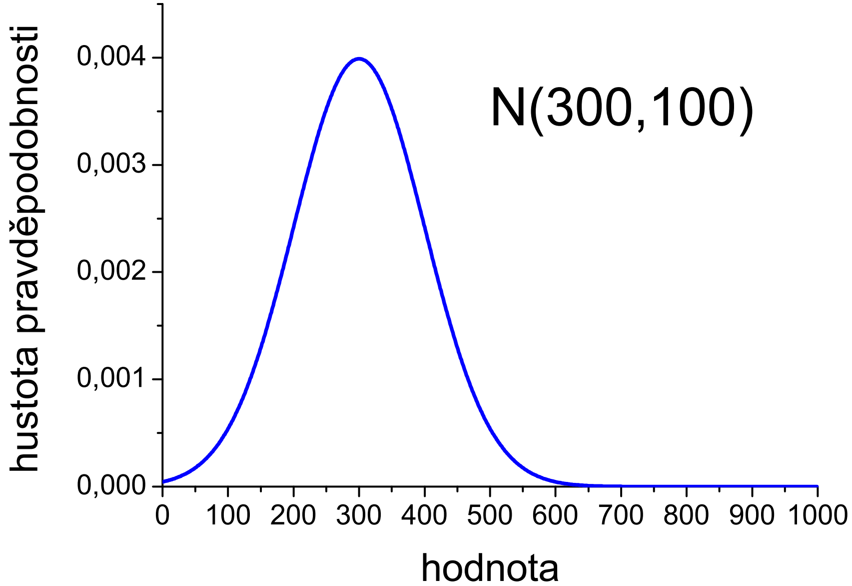
Značíme N(μ, σ)

veličina σ je **směrodatná odchylka**

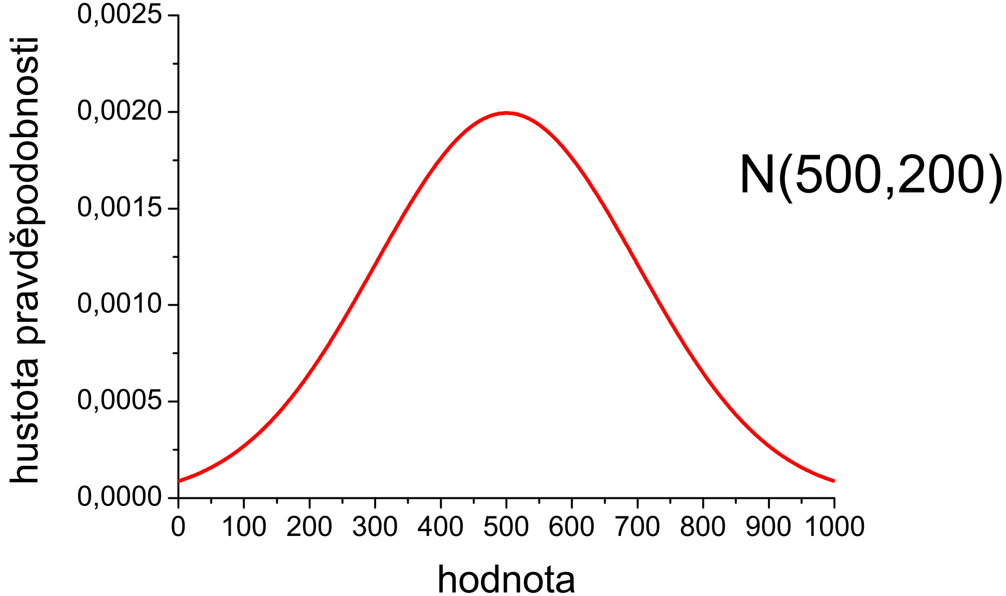
$\mu = 500 \qquad \sigma = 100$



$\mu = 300 \qquad \sigma = 100$

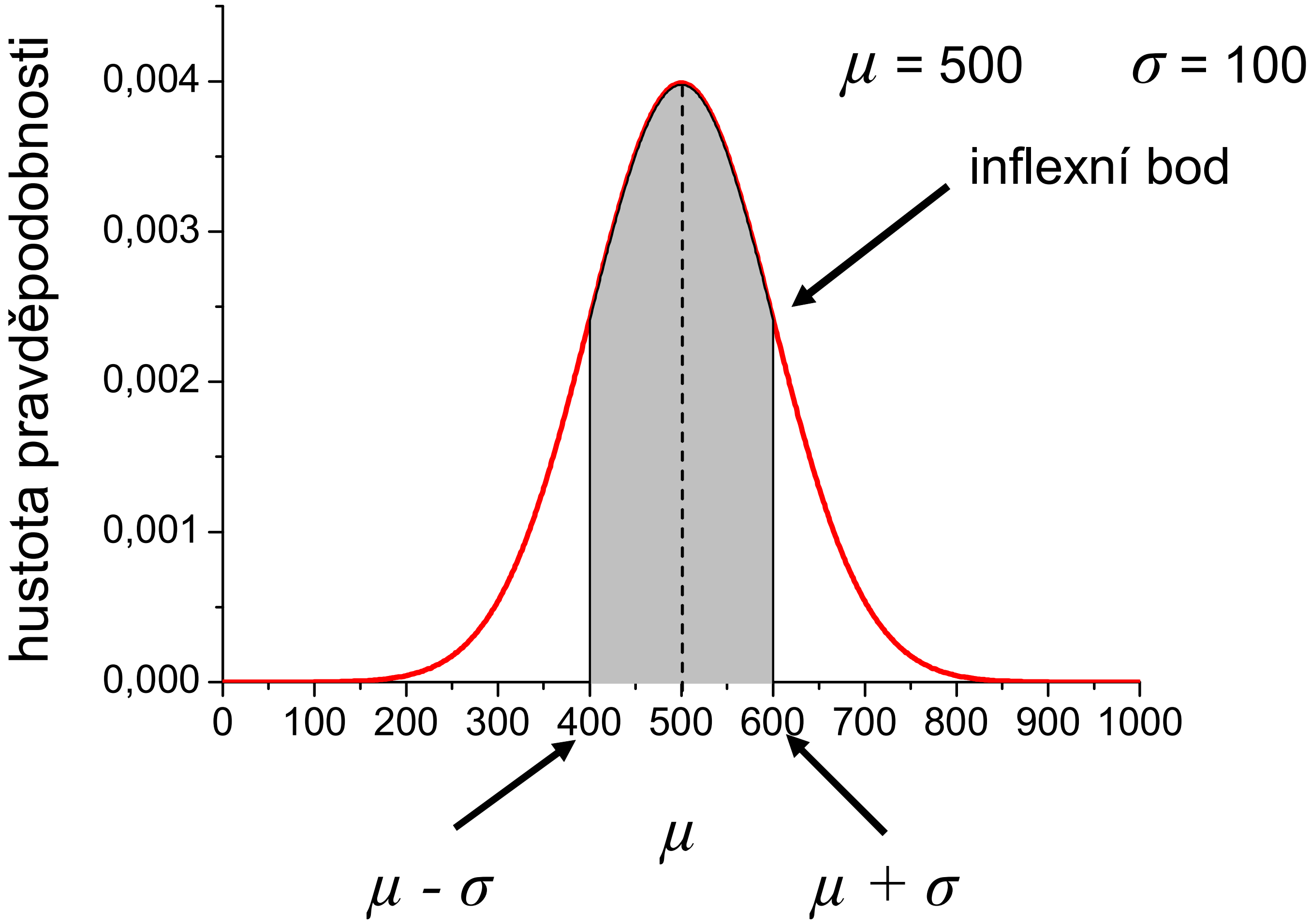


$\mu = 500 \qquad \sigma = 200$



45

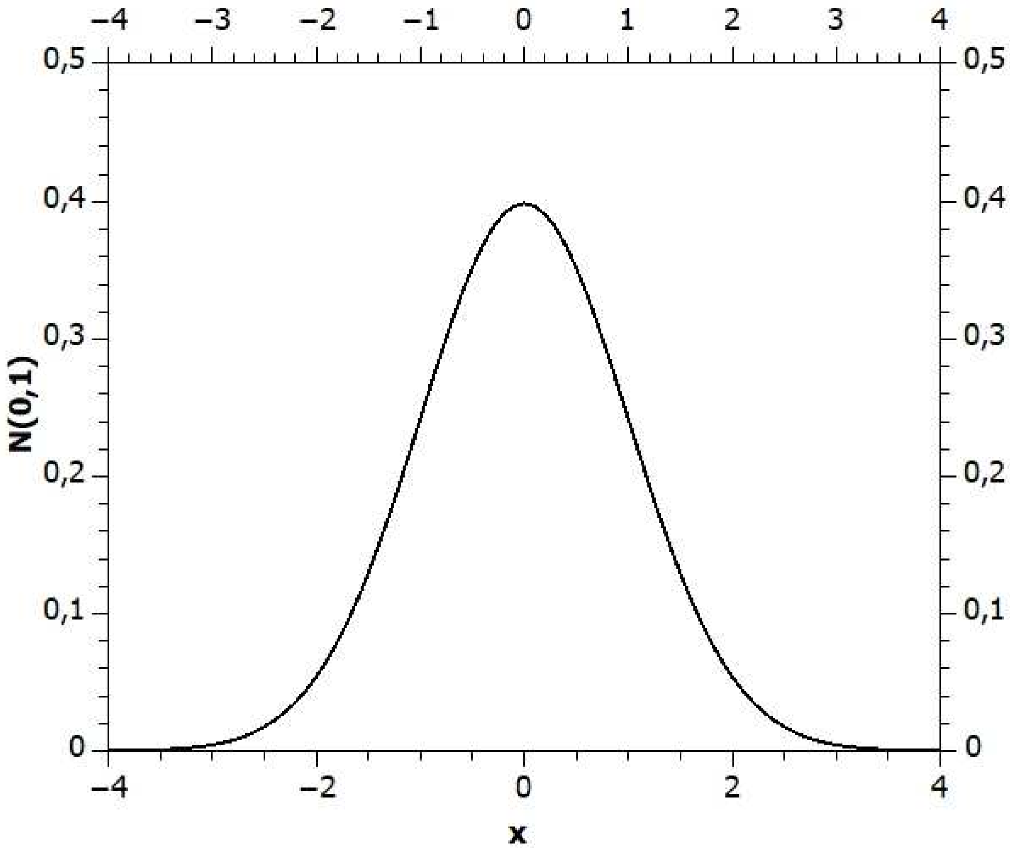
Nakreslete přibližně Gaussovo rozdělení se střední hodnotou 54 a směrodatnou odchylkou 10.



$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} p(x)\,dx = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 0{,}68$$

Každá veličina x s normálním rozdělením N(μ, σ) lze převést na tzv. standardní normální rozdělení N(0,1) transformací

$$X = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



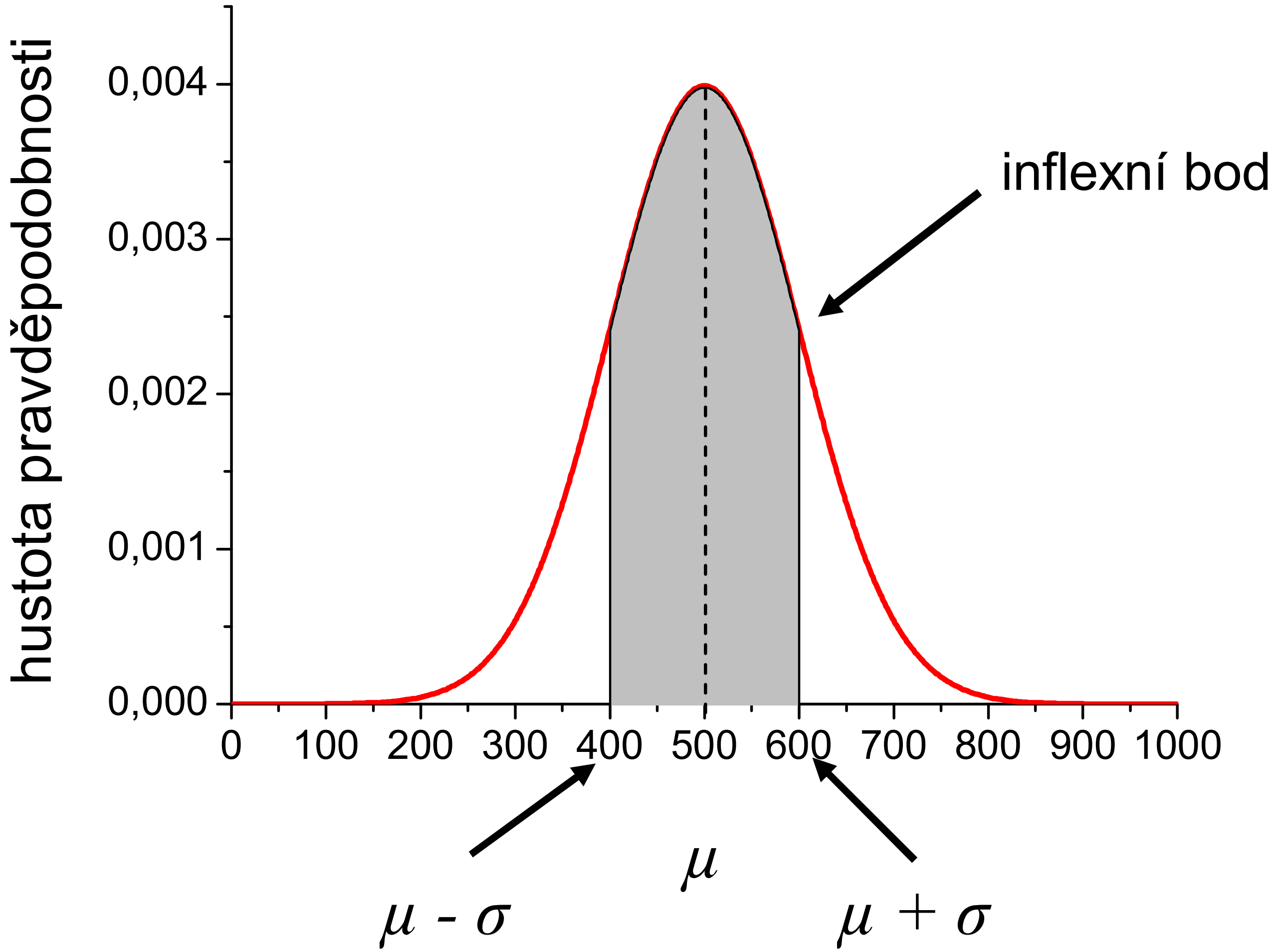
46

Měříme-li veličinu, která se řídí normálním rozdělením se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ, je pravděpodobnost toho, že při dalším měření naměříme hodnotu z intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ rovna 68%.

Jaká je pravděpodobnost, že při dalším měření naměříme hodnotu z intervalu $(\mu, \mu + \sigma)$?

47

Odhadněte, jaké je pravděpodobnost naměření hodnoty z intervalu $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.



Definujeme tzv. **krajní odchylku** vztahem:

$$\kappa = 3 \cdot \sigma$$

Pravděpodobnost naměření hodnoty v intervalu $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ je rovna

$$99,7\%$$

krajní odchylka = „jistota“

Odhad parametrů normálního rozdělení

Opakujeme n – krát měření za stejných podmínek, odhad střední hodnoty získáme jako:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

aritmetický průměr

a odhad směrodatné odchylky (nejistoty) jako

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

48

Při měření intenzity pozadí ionizujícího záření byly naměřeny následující hodnoty:

číslo měření	intenzita (imp/10s)
1	3
2	4
3	3
4	3
5	4

Vypočtěte odhad střední hodnoty a směrodatné odchylky.

$\bar{x}$= 3,4 imp/10s

σ_x=0,5 imp/10s

Další modelová rozdělení

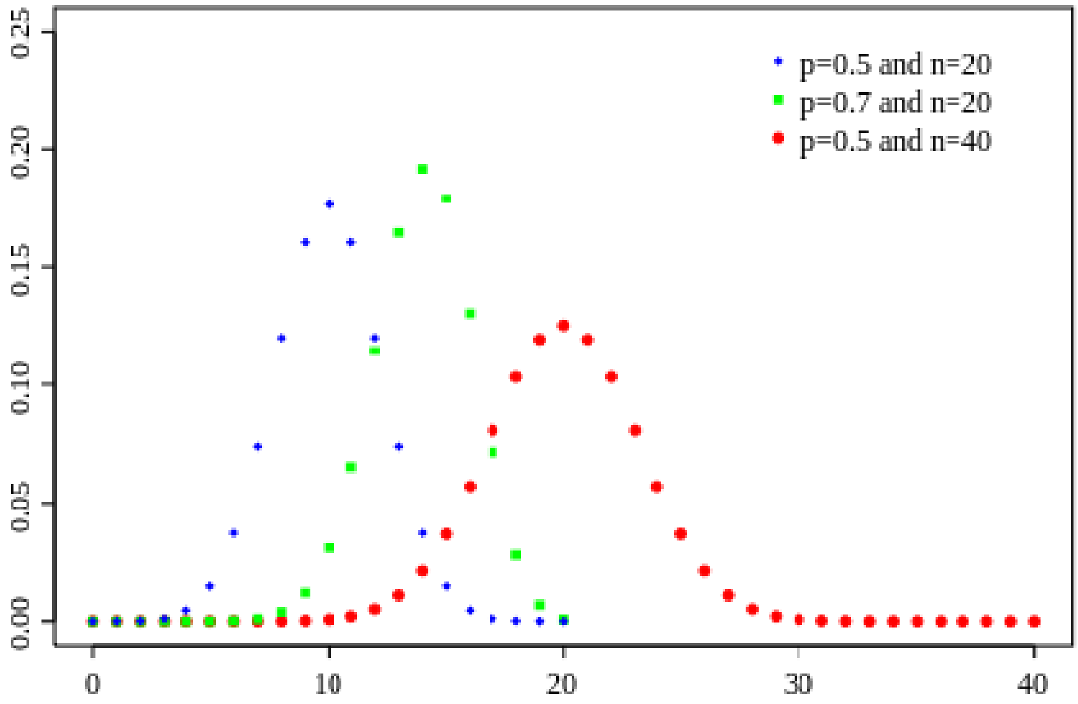
Binomické rozdělení

Nechť při jednom pokusu (měření) má daný jev (úspěch) pravděpodobnost p. Pak pravděpodobnost toho, že při n pokusech nastane r krát úspěch je dána binomickým rozdělením:

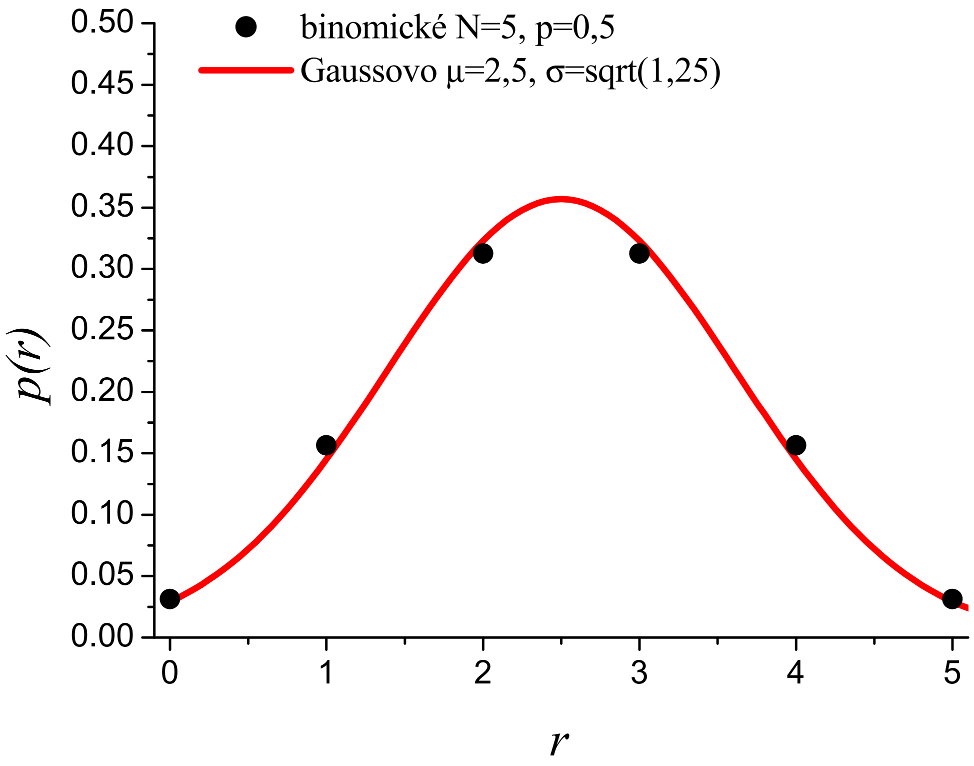
$$P_n(r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

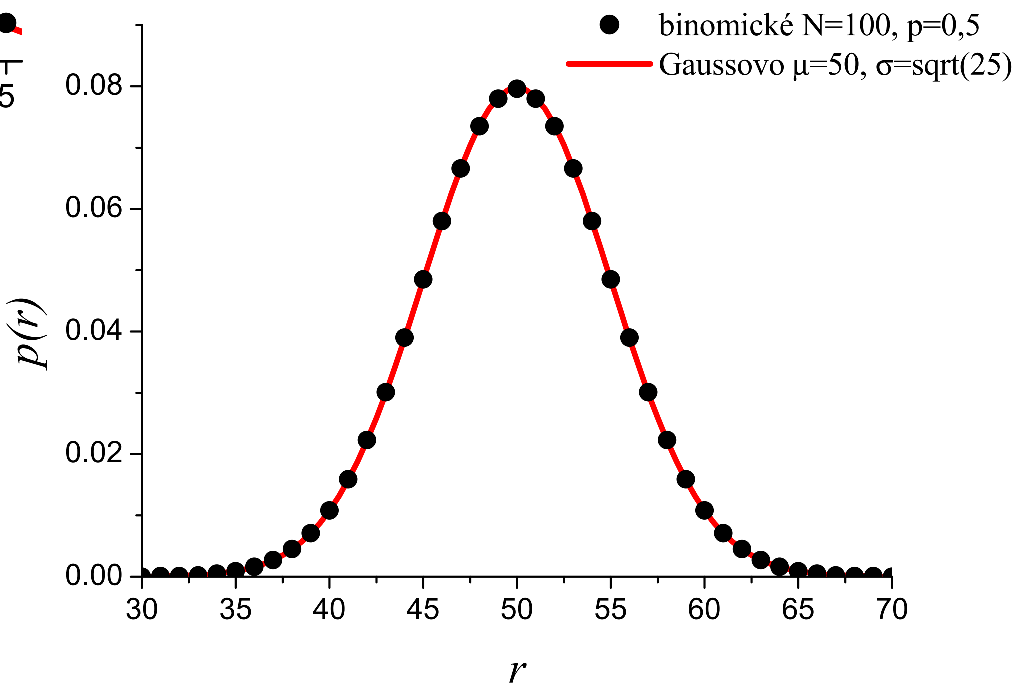
střední hodnota $\mu = np$

disperze $D = np(1-p)$



Pro velká n se binomické rozdělení blíží normálnímu (Gaussovu)





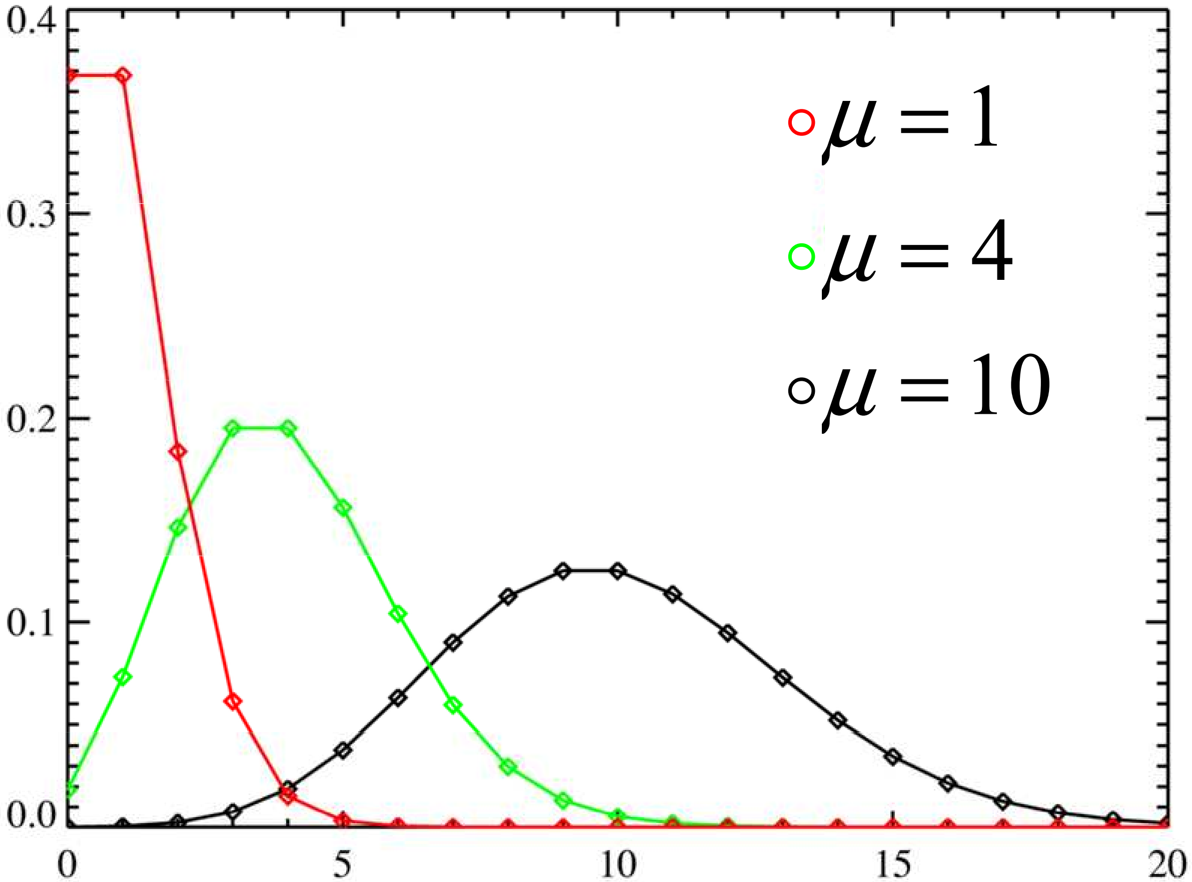
Poissonovo rozdělení

Nechť jistá náhodná událost nastává v časovém intervalu Δt se střední hodnotou μ. Pak pravděpodobnost, že v tomto časovém intervalu dojde k r událostem je dána Poissonovým rozdělením

$$P_\mu(r) = \frac{\mu^r e^{-\mu}}{r!}$$

střední hodnota $\mu = \mu$

disperze $D = \mu$



Pro velká n se Poissonovo rozdělení blíží normálnímu (Gaussovu)