Úvod do fyziky hvězd - řešené příklady

Andrea Bobalíková

Kapitola 1

1.1 Vypočtěte délku světelného roku a parseku podle jejich definice. S jakou přesností jsou tyto jednotky stanoveny? 1AU $= 1,495\ 978\ 706\ 6 \cdot 10^{11}$ m, $c = 2,997\ 924\ 58 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}. Najděte její převodní faktor.

- světelný rok: dráha, kterou urazí světlo ve vakuu za jeden juliánský rok

$$1 \text{ sv. rok} = 365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60s \cdot c = 9,460\ 730\ 473 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

- parsek: vzdálenost, ze které je vidět střední vzdálenost Země-Slunce (jedna AU) pod úhlem jedné obloukové vteřiny

$$1 \text{ pc} = \frac{\text{AU} \cdot 360 \cdot 3600}{2\pi} = 3,085\ 677\ 6 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

- převodní faktor:

$$\left(\frac{r}{1 \text{ pc}}\right) = \frac{15 \text{ AU}}{2\pi \cdot 365,25 \cdot c}\left(\frac{r}{1 \text{ ly}}\right) = 3,261\ 564\left(\frac{r}{1 \text{ ly}}\right)$$

1.2 Mikuláš Koperník soudil, že všechny hvězdy jsou od nás vzdáleny asi 40 milionů průměrů Země. Vypočtěte: a) vzdálenost hvězd v AU a pc. b) jakou by měly tyto hvězdy paralaxu. Byla by měřitelná bez dalekohledu?

a)
$$d = 40 \cdot 10^{6} D_Z = 40 \cdot 10^{6} \cdot 12\ 742 \text{ km} = 5,0968 \cdot 10^{14} \text{ m} = 3407 \text{ AU} = 0,0165 \text{ pc}$$

b)
$$\pi['']= \frac{1}{r\ [\text{pc}]} = \frac{1}{0,0165} = 60,5'' \simeq 1'$$

to by bylo na hranici měřitelnosti

1.3 Tycho Brahe pak měl zato, že jasné hvězdy mají úhlové průměry 2´. Vypočtěte pro koperníkovské vzdálenosti poloměr jasné hvězdy v poloměrech Slunce. Existují tak veliké hvězdy?

$R_\odot = 6,955 \cdot 10^{8}$ m, $\alpha = 1'$

$$\tan\alpha\ [^\circ] = \frac{R\ [\text{m}]}{d\ [\text{m}]}$$

nebo

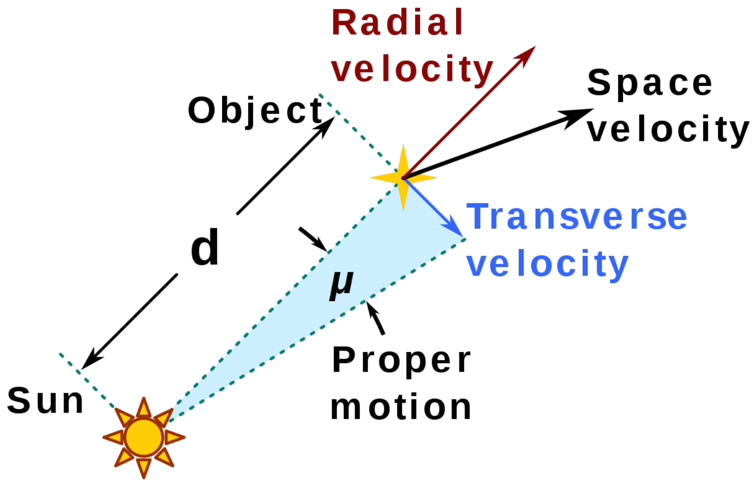
$$\alpha\ ['']= \frac{R\ [\text{AU}]}{d\ [\text{pc}]} \quad \rightarrow \quad R = \alpha \cdot d = 60 \cdot 0,0165 = 0,991 \text{ AU} = 1,4826\ \cdot 10^{11} \text{ m} = 213 \text{ R}_\odot$$

Ano, tak velké hvězdy jsou mezi obry a veleobry zcela běžné.

1.4 Vlastní pohyb hvězdy μ se zpravidla udává v úhlových vteřinách za rok. Znáte-li paralaxu hvězdy π vypočítejte vzdálenost hvězdy ve světelných rocích r a tečnou složku rychlosti v_t v km/s.

$$\tan\mu \approx \mu[\text{rad}] = \frac{v_t}{d} \quad \rightarrow \quad v_t = \mu \cdot d$$

$$v_t = \left(\frac{2\pi \cdot \text{pc}}{360 \cdot 3600 \cdot 365,2442 \cdot 86400}\frac{\mu}{1''/\text{rok}}\frac{r}{\text{pc}}\right) = 4,740470 \text{ km/s}\left(\frac{\mu}{1''/\text{rok}}\right)\left(\frac{r}{\text{pc}}\right)$$



Obrázek 1: vlastní pohyb

1.5 Barnardova hvězda je známa jako hvězda s největším známým vlastním pohybem, který činí 10,37“/rok. Objevil ji E. Barnard v roce 1916, když porovnával fotografické desky zachycující hvězdné pole v Hadonoši z let 1894 a 1916. Ze spektra hvězdy s vizuální hvězdnou velikostí $V = 9,54$ mag vyplývá mj., že jde o červeného trpaslíka typu M4 V, který se k nám blíží rychlostí $v_R = -106,8$ km/s. Hvězda je v současnosti druhým nejbližším hvězdným objektem, hned po trojhvězdě zvané Toliman (α Centauri). V databázi SIMBAD najdeme její paralaxu: $\pi = 0,5493(16)$”.
Vypočtěte: a) její vzdálenost ve světelných letech, b) vypočtěte hodnotu tečné složky její prostorové rychlosti vztažené ke Slunci, c) velikost vektoru prostorové rychlosti, d) absolutní vizuální hvězdnou velikost hvězdy, e) zkontrolujte, zda má pravdu jistý Burnham, když tvrdí, že se tato hvězda přiblíží ke Slunci na pouhé 4 sv. roky, a to už za 10000 let, a pak se bude od něj opět vzdalovat. V době největšího přiblížení prý vzroste vlastní pohyb hvězdy na 25“/rok a hvězdná velikost hvězdy dosáhne 8,6 mag.

a)
$$d = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0,5493} = 1,82 \text{ pc} = 5,94 \text{ ly}$$

b)
$$v_t = 4,74047 \text{ km/s} \left(\frac{\mu}{1\text{”/rok}}\right)\left(\frac{r}{\text{pc}}\right) = 4,740470 \cdot 10,37 \cdot 1,82 = 89,5 \text{ km/s}$$

c)
$$|v| = \sqrt{v_t^2 + v_R^2} = \sqrt{89,5^2 + 106,8^2} = 139,3 \text{ km/s}$$

d)
$$m - M = 5\log r - 5 = -5\log\pi - 5$$
$$M = m - 5\log r + 5 = 13,24 \text{ mag}$$

e) ano

1.6 Vypočítejte vlnovou délku fotonu, jehož hmotnost odpovídá klidové hmotnosti elektronu. Hmotnost vyjádřete v kg a eV.

hmotnost elektronu: $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, 1 eV = $1,602 \cdot 10^{-19}$ J, Planck: $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J.s

$$E_e = m_e \cdot c^2 = 8,19 \cdot 10^{-14}\ \text{J} = 0,511\ \text{MeV}$$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{hc}{E} = 2,43 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

1.7 O kolik kg své hmotnosti přichází denně Slunce vyzařováním fotonů?
$L_\odot = 3,844 \cdot 10^{26}$ W

$$E = mc^2 \quad \rightarrow \quad m = \frac{E}{c^2} = \frac{L_\odot \cdot 86400}{c^2} = 3,7 \cdot 10^{14}\text{kg}$$

1.8 Pomocí Planckova zákona odvoďte Stefanův zákon. Při odvození použijte vztahu:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}$$

Planckův vyzařovací zákon:

$$B_\nu(\nu, t) = 2\pi \frac{\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

$$L = S \int_0^\infty B_\nu(t)\ \mathrm{d}\nu = S\frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT) - 1}\ \mathrm{d}\nu = \left| x = \frac{h\nu}{kT},\ \mathrm{d}x = \frac{h}{kT}\mathrm{d}\nu \right| =$$
$$= S\frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\mathrm{d}x = S\frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15} = S\frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4 = S\sigma T^4$$

Stefanova-Boltzmannova konstanta:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5,67 \cdot 10^{-8}\ \text{W m}^{-2}\ \text{K}^{-4} \tag{1}$$

1.11 Kolikrát vyšší zářivý výkon má hvězda o teplotě $T_1 = 20000$ K, než stejně rozměrná hvězda o efektivní povrchové teplotě $T_2 = 5000$ K? Za předpokladu, že obě září jako absolutně černá tělesa, zjistěte, kde leží maximum vyzařované energie v jejich spektru?

- rozdíl zářivých výkonů:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{S\sigma T_1^4}{S\sigma T_2^4} = \frac{T_1^4}{T_2^4} = 256$$

- maximum vyzařované energie - Wienův posunovací zákon:

$$\lambda_{\max} T = 2,8977685 \cdot 10^{-3}\ \text{K} \cdot \text{m}$$

$$\lambda_{\max,1} = \frac{2,8977685 \cdot 10^{-3}}{T_1} = 145\ \text{nm (UV)}$$

$$\lambda_{\max,2} = \frac{2,8977685 \cdot 10^{-3}}{T_2} = 580\ \text{nm (oranzova)}$$

1.12 Sluneční záření o vlnových délkách mezi λ a ($\lambda + 1$ nm) nese maximální energii pro $\lambda = 480$ nm. Pomocí Wienova posunovacího zákona odhadněte teplotu Slunce. Srovnejte s efektivní teplotou a rozdíl diskutujte.

$$T = \frac{b}{\lambda_{\max}} = \frac{2,8977685 \cdot 10^{-3}}{480 \cdot 10^{-9}} = 6037\ \text{K}$$

$T_{ef} = 5779$ K - Slunce nezáří přesně jako absolutně černé těleso

1.13 Obří hvězda o výkonu $L = 1000$ L$_\odot$ je obklopena neprůhledným mrakem okolohvězdné látky o poloměru cca 10 AU. Za předpokladu, že tento stav trvá již poměrně dlouho a oblak září jako absolutně černé těleso, vypočtěte efektivní teplotu zámotku. Diskutujte, zda byste tuto hvězdu mohli spatřit pouhýma očima, jak byste ji pozorovali nejlépe?

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}},\ \mathrm{L}_\odot = 3,844 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W},\ 1\mathrm{AU} = 1,495\ 978\ 706\ 6 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$$

$$L = S\sigma T^4 = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad \rightarrow \quad T = \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma}\right)^{1/4} = 700\ \mathrm{K}$$

$\rightarrow$ mohli bychom ji spatřit, nejlépe pozorovatelná ale je v infračerveném oboru

1.17 Jistá kulová hvězdokupa o 250 000 členech se jeví jako objekt 4. velikosti. Jaká je průměrná hvězdná velikost člena hvězdokupy. Předpokládejte zde na okamžik, že hvězdná velikost všech hvězd hvězdokupy je stejná. Diskutujte, co se změní, není-li stejná.

$$m = -2,5 \log \frac{F}{F_0} \quad \rightarrow \quad F = F_0 \cdot 10^{-0,4m},$$

kde $F_0 = 2,553 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2}

$$m_{\mathrm{celk}} = -2,5 \log \frac{F_{\mathrm{celk}}}{F_0} = -2,5 \log \left(N \cdot 10^{-0,4 m_*}\right)$$
$$4 = -2,5 \log \left(250\ 000 \cdot 10^{-0,4 m_*}\right)$$
$$10^{-0,4 \cdot 4} = 250\ 000 \cdot 10^{-0,4 m_*}$$
$$\frac{10^{-0,4\cdot 4}}{250\ 000} = 10^{-0,4 m_*}$$
$$m_* = -2,5 \log \left(\frac{10^{-0,4 \cdot 4}}{250\ 000}\right) = 17,5\ \mathrm{mag}$$

nebo:

$$m_{\mathrm{celk}} - m_* = -2,5 \log \left(\frac{F_{\mathrm{celk}}}{F_*}\right) = -2,5 \log \left(\frac{N \cdot F_*}{F_*}\right) = -2,5 \log N$$
$$m_* = m_{\mathrm{celk}} + 2,5 \log n = 4 + 2,5 \log 250\,000 = 17,5\ \mathrm{mag}$$

1.18 Dvojhvězda Castor sestává ze dvou složek s hvězdnými velikostmi 2,0 a 2,9 mag. Jaká je pak hvězdná velikost Castoru při pozorování pouhým okem, jímž jednotlivé složky dvojhvězdy nerozlišíme.

$$m_{\mathrm{Castor}} = -2,5 \log \left(10^{-0,4 m_1} + 10^{-0,4 m_2}\right) = 1,6\ \mathrm{mag}$$

1.19 Porovnejte jasnost Siria o vizuální hvězdné velikosti $m_v = -1,47$ mag a nejslabších, okem viditelných hvězd. Kolik takových hvězd šesté velikosti ($m_* = 6$ mag) by se muselo spojit, aby se co do jasnosti Siriovi vyrovnalo?

$$m_S = -2,5 \log \left(N \cdot 10^{-0,4 m_*}\right)$$

$$10^{-0,4 \cdot m_S} = N \cdot 10^{-0,4 m_*}$$

$$N = \frac{10^{-0,4 \cdot m_S}}{10^{-0,4 m_*}} = \frac{10^{-0,4 \cdot (-1,47)}}{10^{-0,4 \cdot 6}} = 10^{0,4 \cdot 1,47 + 0,4 \cdot 6} = 973$$

nebo:

$$m_{\text{Sirius}} - m_* = -2,5 \log\left(\frac{F_{\text{Sirius}}}{F_*}\right) = -2,5 \log\left(\frac{N \cdot F_*}{F_*}\right) = -2,5 \log N$$

$$N = 10^{-0,4(m_{\text{Sirius}} - m_*)} = 973$$

1.21 Rotační energie současného Slunce činí $2,4 \cdot 10^{35}$ J. a) Na kolik let by tato energie dokázala krýt jeho zářivý výkon? b) Za předpokladu zachování momentu hybnosti vypočítejte jak by se změnila perioda rotace a rotační energie, kdyby se Slunce naráz zhroutilo na bílého trpaslíka s rozměry stokrát menšími než má dnes? c) Odkud se vzala energie rotace?

a) doba, na kterou dokáže rotační energie pokrýt zářivý výkon = rotační energie, která je k dispozici ÷ energie, která se vyzáří za sekundu:

$$t = \frac{E_{\text{rot}}}{\mathrm{L}_\odot} = \frac{2,4 \cdot 10^{35}}{3,844 \cdot 10^{26}} = 19,8 \text{ let}$$

b) zákon zachování momentu hybnosti:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

moment setrvačnosti koule je:

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

potom:

$$\frac{2}{5} \mathrm{M}_\odot R^2_{\odot,i} \omega_i = \frac{2}{5} \mathrm{M}_\odot R^2_{\odot,f} \omega_f$$

$$R^2_{\odot,i} \omega_i = R^2_{\odot,f} \omega_f$$

$$R^2_{\odot,i} \frac{2\pi}{T_i} = R^2_{\odot,f} \frac{2\pi}{T_f}$$

$$100^2 R^2_{\odot,f} \frac{2\pi}{T_i} = R^2_{\odot,f} \frac{2\pi}{T_f}$$

$$100^2 \frac{1}{T_i} = \frac{1}{T_f}$$

$$T_f = \frac{T_i}{10000}$$

rotační energie Slunce před zhroucením:

$$E_{\text{rot},i} = \frac{1}{2} I \omega_i^2 = \frac{1}{2} \frac{2}{5} \mathrm{M}_\odot R^2_{\odot,i} \left(\frac{2\pi}{T_i}\right)^2 = 2,4 \cdot 10^{35}$$

$$\rightarrow \quad T_i = 2\pi R_{\odot,i} \sqrt{\frac{1}{5} \frac{\mathrm{M}_\odot}{E_{\text{rot,i}}}} = 2\pi \cdot 6,96 \cdot 10^8 \sqrt{\frac{1}{5} \frac{1,99 \cdot 10^{30}}{2,4 \cdot 10^{35}}} = 5,63 \cdot 10^6 \text{ s} = 65,11 \text{ dne}$$

perioda rotace po zhroucení:

$$T_f = \frac{T_i}{10000} = \frac{5,63 \cdot 10^6}{10000} = 563 \text{ s} = 9,38 \text{ min}$$

rotační energie po zhroucení:

$$E_{\text{rot},f} = \frac{1}{2} I \omega_f^2 = \frac{1}{2} \frac{2}{5} \mathrm{M}_\odot R^2_{\odot,f} \left(\frac{2\pi}{T_f}\right)^2 = \frac{1}{5} \mathrm{M}_\odot \frac{R^2_{\odot,i}}{100^2} \left(\frac{2\pi}{T_f}\right)^2 = 2,4 \cdot 10^{39} \text{ J} = 10\,000 E_{\text{rot},i}$$

c) z potenciální energie uvolněné kolapsem

1.23 Odvoďte vztah mezi vzdáleností r v pc, pozorovanou a absolutní hvězdnou velikostí m a M.

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \frac{F_1}{F_2} = -2,5 \log \frac{\frac{L_1}{4\pi r_1^2}}{\frac{L_2}{4\pi r_2^2}}$$

$$m - M = -2,5 \log \frac{\frac{L}{4\pi r^2}}{\frac{L}{4\pi 10^2}} = -2,5 \log \frac{10^2}{r^2} = -5 \log \frac{10}{r} = 5 \log \frac{r}{10} = 5 \log r - 5 \log 10 = 5 \log r - 5$$

1.24. Najděte a vyčíslete vzájemné vztahy: a) mezi bolometrickou hvězdnou velikostí m_{bol} a hustotou toku F; b) absolutní bolometrickou hvězdnou velikostí M_{bol}, zářivým výkonem L v nominálních Sluncích, $L_\odot = 3,846 \cdot 10^{26}$ W; c) mezi absolutní bolometrickou hvězdnou velikostí, poloměrem hvězdy R v poloměrech Slunce ($R_\odot = 6,95508(26) \cdot 10^8$ m) a její efektivní teplotou T_{ef} v kelvinech; d) najděte vztah mezi pozorovanou bolometrickou hvězdnou velikostí, úhlovým poloměrem α vyjádřeným v úhlových vteřinách a efektivní teplotou T_{ef} v kelvinech.
Z definice fotometrických veličin přitom plyne, že hvězda 0. bolometrické velikosti způsobuje na hranici zemské atmosféry hustotu zářivého toku $F_0 = 2,553 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2}, hvězda s absolutní hvězdnou velikostí $M_{\mathrm{bol}} = 0$ mag vysílá do prostoru zářivý výkon $L_0 = 3,055 \cdot 10^{28}$ W. Stefanova Boltzmannova konstanta $\sigma = 5,670400 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}.

a)

$$m_{\mathrm{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{F}{F_0} \right) = 2,5 \log F_0 - 2,5 \log F = -18,9824 - 2,5 \log F$$

b)

$$M_{\mathrm{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_\odot} \frac{L_\odot}{L_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{L_\odot}{L_0} \right) - 2,5 \log \left(\frac{L}{L_\odot} \right)$$

$$M_{\mathrm{bol}} = 4,745 - 2,5 \log \left(\frac{L}{L_\odot} \right)$$

c)

$$M_{\mathrm{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{4\pi\sigma R^2 T_{\mathrm{ef}}^4}{L_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{4\pi\sigma R^2 T_{\mathrm{ef}}^4}{L_0} \frac{R_\odot^2}{R_\odot^2} \right)$$

$$M_{\mathrm{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{4\pi\sigma R_\odot^2}{L_0} \right) - 5 \log \left(\frac{R}{R_\odot} \right) - 10 \log T_{\mathrm{ef}} = 42,369 - 5 \log \left(\frac{R}{R_\odot} \right) - 10 \log T_{\mathrm{ef}}$$

d)

$$m_{\mathrm{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{F}{F_0} \right),$$

kam dosadíme

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{4\pi\sigma R^2 T_{\mathrm{ef}}^4}{4\pi r^2}$$

$$m_{\mathrm{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{4\pi\sigma R^2 T_{\mathrm{ef}}^4}{4\pi r^2 F_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{\sigma R^2 T_{\mathrm{ef}}^4}{r^2 F_0} \right)$$

úhlový poloměr:

$$\alpha \, [''] = \frac{360 \cdot 3600}{2\pi} \frac{R}{r} \quad \rightarrow \quad R = \frac{2\pi r \alpha}{360 \cdot 3600}$$

dosadíme do předchozího:

$$m_{\mathrm{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{4\pi^2 \alpha^2 \sigma T_{\mathrm{ef}}^4}{(360 \cdot 3600)^2 F_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{4\pi^2 \sigma}{(360 \cdot 3600)^2 F_0} \right) - 5 \log \alpha - 10 \log T_{\mathrm{ef}}$$

$$m_{\mathrm{bol}} = 25,706 - 5 \log \alpha - 10 \log T_{\mathrm{ef}}$$

1.25 Pomocí výše uvedených vztahů vypočtěte (a) úhlový a (b) lineární poloměr Vegy, víte-li, že $m_{\mathrm{bol}} = -0,40$ mag, paralaxa podle Hipparca $0,1289(6)$" a efektivní teplota ze spektra 9500 K.

a)

$$m_{\mathrm{bol}} = 25,706 - 5\log\alpha - 10\log T_{\mathrm{ef}}$$

$$5\log\alpha = 25,706 - m_{\mathrm{bol}} - 10\log T_{\mathrm{ef}}$$

$$\alpha = 10^{\frac{25,706+0,4-10\log 9500}{5}} = 0,00184"$$

b) např. pomocí vztahu z příkladu 1.22.:

$$\alpha\,["] = \frac{360\cdot 60\cdot 60}{2\pi}\frac{R}{r} = 0,0046\left(\frac{R}{R_\odot}\right)\pi["]$$

$$R = \frac{\alpha}{0,0046\pi}R_\odot = 3,08R_\odot$$

1.26. Moderní měření hustoty zářivého toku přicházejícího od Slunce, vedou k závěru, že hodnota sluneční konstanty K (hustota toku ve vzdálenosti 1 AU) činí $1367(3)$ W/m^2 , přičemž dlouhodobá měření poloměru slunečního kotouče se ustálila kolem hodnoty: $\alpha = 958,966(36)$". Za předpokladu, že Slunce izotropně vyzařuje, vypočtěte a) poloměr Slunce v m, b) hodnotu zářivého výkonu Slunce L ve W a nominálních Sluncích $L_\odot$, c) hodnotu pozorované sluneční bolometrické hvězdné velikosti a d) sluneční absolutní bolometrické hvězdné velikosti $\mathrm{M_{bol}}$ a e) efektivní teplotu Slunce v kelvinech. (Pozor, nezaměňujte skutečný a nominální zářivý výkon Slunce).

a) poloměr Slunce:

$$R_\odot = r\sin(\alpha) = 6,955\cdot 10^8\ \mathrm{m},$$

kde $r = 1$ AU $= 1,49598\cdot 10^{11}$ m.

b) zářivý výkon:

$$K = \frac{L}{4\pi r^2} \quad\rightarrow\quad L = K4\pi r^2 = 3,844\cdot 10^{26}\ \mathrm{W} = 0,996\ L_\odot$$

c) pozorovaná hvězdná velikost:

$$m_{\mathrm{bol}} = -2,5\log\left(\frac{F}{F_0}\right) = -2,5\log\left(\frac{K}{F_0}\right) = -2,5\log\left(\frac{1367}{2,553\cdot 10^{-8}}\right) = -26,82\ \mathrm{mag}$$

d) absolutní hvězdná velikost:

$$M_{\mathrm{bol}} = -2,5\log\left(\frac{L}{L_0}\right) = -2,5\log\left(\frac{3,844\cdot 10^{26}}{2,553\cdot 10^{28}}\right) = 4,75\ \mathrm{mag}$$

e) efektivní teplota:

$$M_{\mathrm{bol}} = -2,5\log\left(\frac{L}{L_0}\right) = -2,5\log\left(\frac{4\pi R_\odot^2\sigma T_{\mathrm{ef}}^4}{L_0}\right)$$

$$10^{-\frac{M_{\mathrm{bol}}}{2,5}} = \frac{4\pi R_\odot^2\sigma T_{\mathrm{ef}}^4}{L_0}$$

$$T_{\mathrm{ef}} = \left(10^{-0,4M_{\mathrm{bol}}}\frac{L_0}{4\pi R_\odot^2\sigma}\right)^{1/4} = 5779\ \mathrm{K}$$

případně pomocí vztahu z příkladu 1.24:

$$m_{\mathrm{bol}} = 25,706 - 5\log\alpha - 10\log T_{\mathrm{ef}}$$

$$T_{\mathrm{ef}} = 10^{\frac{25,706-m_{\mathrm{bol}}-5\log\alpha}{10}} = 5779\ \mathrm{K}$$

1.27 Je-li dosah dalekohledu 23 magnitudy, do jaké vzdálenosti jím lze zaznamenat: a) nejjasnější cefeidy s absolutní hvězdnou velikostí $M = -5$ mag, b) novy, dosahující v maximu svého lesku $M = -8$ mag, c) supernovy typu Ia $M = -19,5$ mag?

a) cefeidy:

$$m - M = 5 \log r - 5$$

$$r = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 10^{\frac{23-(-5)+5}{5}} = 10^{\frac{33}{5}} = 4 \text{ Mpc}$$

b) novy:

$$r = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 10^{\frac{23-(-8)+5}{5}} = 15,8 \text{ Mpc}$$

c) supernovy Ia:

$$r = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 10^{\frac{23-(-19,5)+5}{5}} = 3160 \text{ Mpc}$$

1.28. Dokažte, že pro rozdíl absolutní a pozorované hvězdné velikosti (libovolného typu) Slunce platí m – M = -31,572126 mag.

Modul vzdálenosti:

$$m - M = 5 \log(r) - 5$$

Vzdálenost Slunce je 1 AU $= 1/206264,8$ pc

$$m - M = 5 \log \left(\frac{1}{206264,8} \right) - 5 = -31,572126 \text{ mag}$$

1.29. Jistá dvojhvězda, která nechce být jmenována, sestává ze dvou složek o absolutní hvězdné velikosti $M_1 = 1,267$ mag a $M_2 = 1,875$ mag. Vypočtěte a) jejich zářivé výkony v jednotkách slunečních, b) celkový zářivý výkon soustavy a c) její celkovou absolutní bolometrickou hvězdnou velikost.

a) Vztah mezi absolutní hvězdnou velikostí a zářivým výkonem:

$$M = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_0} \right),$$

kde $L_0 = 3,055 \cdot 10^{28}$ W. Pokud chceme zjistit zářivé výkony v jednotkách slunečních, můžeme také využít znalosti absolutní hvězdné velikosti Slunce: $M_\odot = 4,75$ mag. Potom:

$$M_1 - M_\odot = -2,5 \log \left(\frac{L_1}{L_\odot} \right)$$

$$L_1 = 10^{-\frac{M_1 - M_\odot}{2,5}} L_\odot = 24,73 \; L_\odot$$

$$L_2 = 10^{-\frac{M_2 - M_\odot}{2,5}} L_\odot = 14,13 \; L_\odot$$

b) celkový zářivý výkon soustavy

$$L_{\text{celk}} = L_1 + L_2 = 38,86 \; L_\odot$$

c) celková absolutní bolometrická hvězdná velikost

$$M_{\text{celk}} = -2,5 \log \left(\frac{L_{\text{celk}}}{L_\odot} \right) + 4,75 = 0,776 \text{ mag}$$

1.30. Představte si, že by nám někdo zaměnil Slunce za a) Vegu ($m_v = 0,03$ mag, $\pi = 0,1289$"), b) Arkturus ($m_v = -0,04$ mag,$\pi = 0,0889$"), c) typickou hvězdu slunečního okolí (HD 155 876, $m_v = 9,35$ mag, $\pi = 0,158$"). Vypočtěte jejich vizuální hvězdnou velikost a úhlový průměr. Případné další potřebné údaje si můžete vyhledat v textu učebnice.

a) Vega:
Nejdřív zjistíme její absolutní hvězdnou velikost:

$$m - M = 5\log(r) - 5 = -5\log(\pi) - 5$$

$$M = 5\log(\pi) + 5 + m = 0,58 \text{ mag}$$

Pokud by se nacházela ve vzdálenosti Slunce ($r = 1$ AU $= 1,496 \cdot 10^{11}$ m $= \frac{1}{206265}$ pc), ze Země by měla pozorovanou hvězdnou velikost m_Z:

$$m_Z - M = 5\log(r) - 5$$

$$m_Z = 5\log\left(\frac{1}{206265}\right) - 5 + 0,58 = -30,99 \text{ mag}$$

Její úhlový průměr by potom byl (poloměr Vegy: $R_V = 1,74 \cdot 10^9$ m):

$$\alpha = 2\arctan\left(\frac{R_V}{r}\right) = 80'$$

b) Arcturus ($R_A = 25,7\ R_\odot$, $R_\odot = 6,955 \cdot 10^8$ m):

$$M = 5\log(\pi) + 5 + m = -0,295 \text{ mag}$$

$$m_Z = 5\log\left(\frac{1}{206265}\right) - 5 - 0,295 = -31,87 \text{ mag}$$

$$\alpha = 2\arctan\left(\frac{R_A}{r}\right) = 13,62^\circ$$

c) HD 155 876: ($R = 2/5\ R_\odot$)
$M = 10,34$ mag, $m_Z = -21,23$ mag, $\alpha = 12,79'$

1.31. Vypočtěte jakou hvězdnou velikost m_v by sama o sobě měla sluneční skvrna o teplotě 4200 K pokrývající asi 0,1 % plochy slunečního disku. Úhlový průměr Arkturu s toutéž teplotou je 0,022“, vizuální hvězdná velikost je 0,0 mag. Srovnejte s hvězdnou velikostí Měsíce v úplňku.

Hvězdnou velikost skvrny určíme pomocí vztahu:

$$m_{\text{skvrna}} = -2,5\log\left(\frac{F_{\text{skvrna}}}{F_0}\right),$$

kde $F_0 = 2,553 \cdot 10^{-8}$ W/m^2.

$$F_{\text{skvrna}} = \frac{L_{\text{skvrna}}}{4\pi r^2},$$

kde $r = 1$ AU. Zářivý výkon skvrny je

$$L_{\text{skvrna}} = S_{\text{skvrna}}\sigma T^4 = 0,001 S_\odot \sigma T^4 = 0,001(4\pi R_\odot^2)\sigma T^4 = 1,072 \cdot 10^{23} W,$$

kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4}. Potom

$$F_{\text{skvrna}} = \frac{L_{\text{skvrna}}}{4\pi r^2} = 0,381 \text{ W/m}^2,$$

Hvězdná velikost skvrny je tedy:

$$m_{\text{skvrna}} = -2,5\log\left(\frac{F_{\text{skvrna}}}{F_0}\right) = -17,9 \text{ mag}$$

Pro porovnání - hvězdná velikost Měsíce v úplňku je -12,7 mag.

1.32 Hvězda Pollux je zřejmě Slunci nejbližším obrem. Vizuální hvězdná velikost Polluxu činí 1,15 mag, paralaxa podle družice Hipparcos 0,0967“, efektivní teplota 4100 K a bolometrická korekce se odhaduje na +0,37 mag. Vypočtěte: a) vzdálenost Polluxu, b) jeho absolutní vizuální hvězdnou velikost, c) bolometrickou hvězdnou velikost, d) absolutní bolometrickou hvězdnou velikost hvězdy, e) zářivý výkon v jednotkách slunečních, f) poloměr hvězdy v poloměrech Slunce.

a) vzdálenost:

$$r = \frac{1}{\pi} = 10,34 \text{ pc}$$

b) absolutní vizuální hvězdná velikost

$$m_v - M_v = 5\log r - 5 = -5\log\pi - 5$$

$$M_v = 5\log\pi + 5 + m_v = 1,08 \text{ mag}$$

c) bolometrická hvězdná velikost - k vizuální hvězdné velikosti připočteme bolometrickou korekci (BC):

$$m_{\text{bol}} = m_v + BC = 1,15 + 0,37 = 1,52 \text{ mag}$$

d) absolutní bolometrická hvězdná velikost:

$$m_{\text{bol}} - M_{\text{bol}} = -5\log\pi - 5 \quad \rightarrow \quad M_{\text{bol}} = 1,45 \text{ mag}$$

e) zářivý výkon v jednotkách slunečních ($L_\odot = 3,846 \cdot 10^{26}$ W):

$$M_{\text{bol}} - M_\odot = -2,5\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right)$$

$$L = 10^{-\frac{M_{\text{bol}}-4,75}{2,5}} L_\odot = 21\ L_\odot$$

f) poloměr hvězdy v poloměrech Slunce

$$L = 4\pi R^2\sigma T_{\text{ef}}^4 \quad \rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T_{\text{ef}}^4}} = 6,3 \cdot 10^9 \text{ m} = 9,1\ R_\odot$$

1.33. Efektivní teplota Siria A je 9400 K, poloměr 1,8 $R_\odot$ ($\mathrm{R}_\odot = 6,955 \cdot 10^8$ m) a hmotnost 2,2 $M_\odot$ ($M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg). Určete: a) zářivý výkon hvězdy v jednotkách slunečních, b) její absolutní bolometrickou hvězdnou velikost, c) střední hustotu hvězdy.

a)

$$L = 4\pi R^2\sigma T_{\text{ef}}^4 = 8,77 \cdot 10^{27} \text{ W} = 22,7\ L_\odot$$

b)

$$M_{\text{bol}} = -2,5\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) + M_\odot = 1,36 \text{ mag}$$

c)

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3} = 533 \text{ kg/m}^3 = 0,38\ \rho_\odot$$

1.34. Jistý červený trpaslík spektrální třídy M5 V má hmotnost 0,2 $M_\odot$ a poloměr 0,31 $R_\odot$, absolutní bolometrická velikost hvězd činí 9,8 mag. Vypočtěte: a) zářivý výkon v jednotkách slunečních, b) efektivní povrchovou teplotu, c) střední hustotu hvězdy.

a)

$$M_{\text{bol}} - M_\odot = -2,5 \log\left(\frac{L}{L_\odot}\right)$$

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{-\frac{M_{\text{bol}}-M_\odot}{2,5}} \quad \rightarrow \quad L = 0,0095\ L_\odot$$

b)

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4 \quad \rightarrow \quad T = \left(\frac{L}{4\pi\sigma R^2}\right)^{1/4} = 3245\ \text{K}$$

c)

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} = 9480\ \text{kg/m}^3 = 6,7\ \rho_\odot$$

Kapitola 2

2.2 Představte si, že máte hvězdu složenou z ideálního plynu, který je ovšem zcela dokonale tepelně vodivý (izotermický). a) Jak by v nitru takové hvězdy závisel tlak na hustotě? b) Mohla by být taková hvězda stabilní?

a) stavová rovnice ideálního plynu:

$$p = nkT = \frac{\rho kT}{\mu_s m_H},$$

kde $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K je Boltzmannova konstanta, $m_H = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg je hmotnost vodíku a μ_s je střední molekulová hmotnost. Odtud plyne

$$p \sim \rho$$

b) Obecně platí $p = \rho^\gamma$. Systém je stabilní, pokud je $\gamma > \frac{4}{3}$. V našem případě $\gamma = 1 \rightarrow$ systém je nestabilní.

2.6 Dokažte, že při maximálním zploštění hvězdy způsobeném rotací je poměr polárního a rovníkového poloměru 2:3. Předpokládejte, že hmota hvězdy je v převážné míře koncentrovaná do jejího centra.

Pro poměr rovníkovéhor$_e$ a polárního poloměru r_p platí vztah:

$$\frac{r_e}{r_p} = 1 + \frac{r_e^3 \omega^2}{2GM} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a_{\mathrm{od}}}{g}\right)_e,$$

člen v závorce je podíl absolutních velikostí odstředivého zrychlení a_{od} a gravitačního zrychlení g na rovníku. Za předpokladu, že $a_{\mathrm{od}} = g$ (nejvyšší možná rotace):

$$\frac{r_e}{r_p} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

2.8 Jaká je střední kinetická energie atomů vodíku, atomů helia a volných elektronů ve sluneční atmosféře o teplotě 5780 K. Jaké jsou jejich střední kvadratické rychlosti? Stačí k úniku ze sluneční atmosféry?

kinetická energie:

$$E_k = \frac{3}{2}kT = 0,75 \text{ eV}$$

střední kvadratické rychlosti:

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

- atom vodíku ($m_{\mathrm{H}} = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg):

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\mathrm{H}}}} = 12 \text{ km/s}$$

- atom helia ($m_{\mathrm{He}} = 4 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg):

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\mathrm{He}}}} = 6 \text{ km/s}$$

- elektron ($m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg):

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\mathrm{e}}}} = 513 \text{ km/s}$$

2.9 Odhadněte počet částic v 1 m^3 látky ve sluneční fotosféře, víte-li, že její teplota je 5780 K a tlak 0,1 atmosféry. Porovnejte s koncentrací molekul v zemské atmosféře.

$$p = nkT \quad \rightarrow \quad n = \frac{p}{kT} = 1,3 \cdot 10^{23} \text{ castic/m}^3$$

Koncentrace ve fotosféře je 200krát menší než zemské atmosféře.

2.10 Za zjednodušujícího předpokladu, že Slunce je složeno ze 30 % z He a 70 % z H a jde o plně ionizovaný plyn, vypočtěte celkový počet a) volných elektronů, b) protonů, c) α částic ve hvězdě.

- počet protonů (= počet jader vodíku):

$$N_{\mathrm{H}} = \frac{0,7 \cdot M_{\odot}}{m_{\mathrm{H}}} = \frac{0,7 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1,66 \cdot 10^{-27}} = 8,39 \cdot 10^{56}$$

- počet alfa částic (= počet jader helia):

$$N_{\mathrm{He}} = \frac{0,3 \cdot M_{\odot}}{m_{\mathrm{He}}} = \frac{0,3 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{4 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}} = 8,99 \cdot 10^{55}$$

- počet volných elektronů:

$$N_e = N_{\mathrm{H}} + 2N_{\mathrm{He}} = 1,02 \cdot 10^{57}$$

2.11 Diskutujte, jak by se měnila střední atomová hmotnost slunečního materiálu μ, pokud by byl tento složen pouze z vodíku a helia: X = 0,70, Y = 0,30 při cestě od povrchu hvězdy k centru. Rozlište postupně tyto případy: a) oba plyny jsou neutrální, b) vodík je zcela ionizován, helium je však takřka neutrální, c) vodík i helium jsou právě jedenkrát ionizovány a d) oba plyny jsou úplně ionizovány.

Pro střední molekulovou hmotnost μ_s platí vztah

$$\frac{1}{\mu_s} = \sum_i \frac{X_i}{A_i},$$

kde X_i je hmotnostní zastoupení částic i-tého druhu a $A_i = \frac{m_i}{m_H}$ je jejich relativní atomová hmotnost.

V případě ionizovaného plynu platí vztah:

$$\frac{1}{\mu_s} = \sum_i (1 + Z_i) \frac{X_i}{A_i},$$

kde Z_i označuje stupeň ionizace i-tého druhu atomu.

a) oba plyny jsou neutrální:

$$\frac{1}{\mu_s} = \frac{0,7}{1} + \frac{0,3}{4} \quad \rightarrow \quad \mu_s = 1,29$$

b) vodík je zcela ionizován, helium je neutrální:

$$\frac{1}{\mu_s} = (1+1)\frac{0,7}{1} + \frac{0,3}{4} \quad \rightarrow \quad \mu_s = 0,678$$

c) vodík i helium jsou právě jedenkrát ionizovány:

$$\frac{1}{\mu_s} = (1+1)\frac{0,7}{1} + (1+1)\frac{0,3}{4} \quad \rightarrow \quad \mu_s = 0,645$$

d) oba plyny jsou úplně ionizovány:

$$\frac{1}{\mu_s} = (1+1)\frac{0,7}{1} + (1+2)\frac{0,3}{4} \quad \rightarrow \quad \mu_s = 0,615$$

2.13 Předpokládejte, že v určitém objemu vodíku o hustotě ρ a teplotě T proběhly jaderné reakce, při nichž se všechna jádra vodíku spojila v jádra helia. Jak se musí změnit součin teploty T' a hustoty ρ', aby v témže objemu ionizovaného helia panoval týž tlak jako před započetím jaderných reakcí. Vysvětlete tím, proč během stadia hvězdy hlavní posloupnosti teplota a hustota v centru monotónně rostou.

- stav na začátku:

$$p_i = \frac{\rho k T}{\mu_s m_{\mathrm{H}}},$$

  kde

$$\frac{1}{\mu_s} = (1+1)\frac{1}{1} \quad \rightarrow \mu_s = \frac{1}{2}$$

  (na začátku máme jen ionizovaný vodík)

- stav na konci:

$$p_f = \frac{\rho' k T'}{\mu_s' m_{\mathrm{H}}},$$

  kde

$$\frac{1}{\mu_s'} = (1+2)\frac{1}{4} \quad \rightarrow \mu_s' = \frac{4}{3}$$

  (na konci máme dvakrát ionizované helium)

- Musí platit $p_f = p_i$:

$$\frac{\rho' k T'}{\mu_s' m_{\mathrm{H}}} = \frac{\rho k T}{\mu_s m_{\mathrm{H}}}$$

$$\rho' T' = \frac{\mu_s'}{\mu_s}\rho T$$

$$\rho' T' = \frac{8}{3}\rho T$$

2.14 Porovnejte tlak působící v nitru bílého trpaslíka o hmotnosti 1 $\mathrm{M}_\odot$, poloměru 6000 km s tlakem ve slunečním nitru. Diskutujte s ohledem na chování látky, z níž jsou obě hvězdy tvořeny. Odhad centrálního tlaku:

$$P_c = 3G\frac{M^2}{R^4}$$

- Slunce:

$$P_c(\odot) = 3G\frac{\mathrm{M}_\odot^2}{\mathrm{R}_\odot^4} = 3G\frac{(2\cdot 10^{30})^2}{(6,96\cdot 10^8)^4} = 3,9\cdot 10^{15}\ \mathrm{Pa}$$

- bílý trpaslík:

$$P_c(BT) = 3G\frac{\mathrm{M}_\odot^2}{(6000\cdot 1000)^4} = 6,2\cdot 10^{23}\ \mathrm{Pa}$$

  tlak v centru BT je $2\cdot 10^8$krát větší, látka je ve stavu elektronově degenerovaného plynu

2.16 Na půl cesty mezi středem a povrchem Slunce vládne teplota $3,4\cdot 10^6$ K, tlak 10^6 Pa, hustota látky 1000 kg/m^3. Vypočtěte a) kolik látkových částic (volných elektronů, protonů, alfa částic, jader těžších prvků) obsahuje 1 m^3 látky látkových částic všeho druhu (předpokládejte standardní chemické složení a úplnou ionizaci všech atomů). b) Najděte střední vlnovou délku fotonů a stanovte o jaký typ záření tu jde, c) porovnejte se zářením vycházejícím z fotosféry. d) Jaká je koncentrace fotonů, porovnejte s počtem „látkových“ částic. Srovnáme-li charakteristiky tohoto plynu s charakteristikami rovnovážného fotonového plynu téže teploty, musíme dojít k závěru, že fotony jsou ve slunečním nitru dosti „vzácnými zvířaty“. e) Vypočtěte hustotu energie fotonového plynu a porovnejte s hustotou kinetické energie plynu. f) Porovnejte tlak záření s tlakem ideálního plynu. Z toho okamžitě plyne, že příspěvek fotonového plynu na celkovém tlaku je zanedbatelný – činí 1/1340 tlaku ideálního plynu. g) Vysvětlete, jak je potom možné, že se zde energie přenáší právě zářením?

a) počet látkových částic:
Pro střední molekulovou hmotnost zcela ionizované látky můžeme napsat:

$$\frac{1}{\mu_s} \cong 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z,$$

kde X je hmotnostní zastoupení vodíku, Y je hmotnostní zastoupení helia a Z je zastoupení těžších prvků. Pro Slunce: $X = 0,707, Y = 0,274, Z = 1 - X - Y = 0,019$. Potom:

$$\frac{1}{\mu_s} \cong 2 \cdot 0,707 + \frac{3}{4}0,274 + \frac{1}{2}0,019 \quad \rightarrow \quad \mu_s \cong 0,62$$

$$n = \frac{\rho}{\mu_s m_H} = 9,88 \cdot 10^{29} \text{ castic/m}^3$$

b) střední vlnová délka fotonů:

střední energie připadající na jeden foton:

$$\varepsilon_s = 2,7kT = 1,27 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

střední vlnová délka fotonů je potom:

$$\lambda_s = \frac{ch}{\varepsilon_s} = 1,6 \text{ nm}$$

→ měkké rentgenové záření

c) fotosféra ($T = 5780$ K):

$$\varepsilon_s = 2,7kT = 2,15 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\lambda_s = 924 \text{ nm}$$

→ zhruba 600x delší vlnová délka

d) koncentrace fotonů:

$$n_f = 2,029 \cdot 10^7 \cdot T^3 = 7,95 \cdot 10^{26} \text{ /m}^3$$

→ zhruba na 1200 částic připadá jeden foton

e) hustota energie fotonového plynu:

$$w_f = \frac{4\sigma}{c}T^4 = 1 \cdot 10^{11} \text{ J/m}^3$$

hustota kinetické energie plynu:

$$w = \frac{3}{2}nkT = 6,9 \cdot 10^{13} \text{ J/m}^3$$

→ hustota energie fotonového plynu je asi 690krát menší

f) tlak záření:

$$p_f = \frac{1}{3}w_f = frac4\sigma 3cT^4 = 3,37 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

tlak ideálního plynu:

$$p = nkT = 4,63 \cdot 10^{13} \text{ Pa}$$

g) fotony se pohybují rychlosti světla a mají o několik řádů delší střední volnou dráhu než ostatní částice

2.17 Předpokládejte, že se ve hvězdě o poloměru R a hmotnosti M hustota látky 1) vůbec nemění, 2) mění se nepřímo úměrně kvadrátu vzdálenosti od centra r. Vypočítejte pro oba případy: a) závislost této hustoty $\rho(r)$ vyjádřené pomocí střední hustoty hvězdy ρ_s, b) závislost té části hmotnosti hvězdy, která je pod poloměrem r M_r, c) průběh závislosti gravitačního zrychlení *g(r)* vyjádřeného v povrchovém gravitačním zrychlení *g(R)* a d) velikost potenciální (konfigurační) energie této hvězdy a rozdíly diskutujte.

1. hustota látky se nemění

   a) $\rho(r) = \rho_s$

   b)

$$M(r) = \int \rho \,\mathrm{d}V = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r')r'^2 \,\mathrm{d}r' \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 \,\mathrm{d}r' = \frac{4}{3}\pi\rho_s r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = M\left(\frac{r}{R}\right)^3 \qquad \rho_s = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

   c)

$$g(r) = -G\frac{M(r)}{r^2} = -G\frac{M\left(\frac{r}{R}\right)^3}{r^2} = -GM\frac{r}{R^3} = g(R)\frac{r}{R} \qquad g(R) = \frac{GM}{R^2}$$

   d)

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}m} = -\frac{GM}{r} \quad \rightarrow \quad \int \mathrm{d}E_p = -\int \frac{GM}{r}\,\mathrm{d}m \qquad \text{kde } \mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$$

$$E_p = -\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{GM}{r}\rho(r)r^2 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi = -4\pi \int_0^R \frac{GM}{r}\rho(r)r^2 \,\mathrm{d}r = -4\pi GM \int_0^R \rho(r)\, r \,\mathrm{d}r$$

$$E_p = -4\pi GM\rho_s \int_0^R r\,\mathrm{d}r = -4\pi GM \int_0^R r\frac{M(r)}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,\mathrm{d}r = -4\pi GM^2 \int_0^R r\frac{\left(\frac{r}{R}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{3GM^2}{R^6}\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r = -\frac{3GM^2}{R^6}\frac{1}{5}R^5 = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}$$

2. hustota se mění nepřímo úměrně kvadrátu vzdálenosti

   a) $\rho(r) = \rho_0/r^2$

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \,\mathrm{d}r = 4\pi \int_0^R \frac{\rho_0}{r^2} r^2 \,\mathrm{d}r = 4\pi\rho_0 \int_0^R \mathrm{d}r = 4\pi\rho_0 R$$

$$\rho_s = \frac{M}{V} = \frac{4\pi\rho_0 R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3\frac{\rho_0}{R^2} = 3\frac{\rho(r)r^2}{R^2}$$

$$\rho(r) = \frac{1}{3}\rho_s\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

   b)

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2\,\mathrm{d}r' = 4\pi\rho_0 \int_0^r \mathrm{d}\,r' = 4\pi\rho_0 r = 4\pi\frac{R^2}{3}\rho_s r = 4\pi r\frac{R^2}{3}\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = M\frac{r}{R}$$

   c)

$$g(r) = -G\frac{M(r)}{r^2} = -G\frac{M\frac{r}{R}}{r^2} = -\frac{GM}{rR} = g(R)\frac{R}{r}$$

d)

$$E_p = -4\pi GM \int_0^R \rho(r)\, r\, \mathrm{d}r = -4\pi GM \int_0^R \frac{\rho_0}{r^2} r\, \mathrm{d}r = -4\pi GM \frac{R^2}{3} \int_0^R \rho_s \frac{1}{r}\, \mathrm{d}r =$$

$$= -4\pi GM \frac{R^2}{3} \int_0^R \frac{1}{r} \frac{M\frac{r}{R}}{\frac{4}{3}\pi R^3}\, \mathrm{d}r = -\frac{GM^2}{R^2} \int_0^R \mathrm{d}r = -\frac{GM^2}{R}$$

2.21 Podle standardního slunečního modelu slunečního nitra má látka v centru hustotu $1,5 \cdot 10^5$ kg/m^3 a teplotu $1,5 \cdot 10^7$ K, hmotnostní zastoupení vodíku $X = 0,4$ a obsah helia $Y = 0,6$, příspěvek těžších prvků je možno v prvním přiblížení zanedbat. Vypočtěte tlak, který zde působí, za předpokladu, že vodík a helium jsou zde plně ionizovány a chovají se jako ideální plyn. Vypočtěte též tlak záření a oba tlaky porovnejte.

- tlak ideálního plynu:

$$P_g = nkT = \frac{\rho kT}{\mu_s m_H},$$

  kde $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K je Boltzmannova konstanta, $m_H = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg je hmotnost vodíku a μ_s je střední molekulová hmotnost, pro kterou platí:

$$\frac{1}{\mu_s} = \sum_i (1 + Z_i) \frac{X_i}{A_i},$$

  přičemž X_i představuje zastoupení daného prvku, $A_i = \frac{m_i}{m_H}$ relativní hmotnost daného prvku vůči vodíku a Z_i stupeň ionizace prvku. V našem případě:

$$\frac{1}{\mu_s} = (1+1)\frac{X}{\frac{m_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{H}}}} + (1+2)\frac{Y}{\frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{H}}}} = 2\frac{0,4}{1} + 3\frac{0,6}{4} = 1,25 \quad \rightarrow \quad \mu_s = 0,8$$

  Potom:

$$P_g = \frac{\rho kT}{\mu_s m_H} = 2,3 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$$

- tlak záření:

$$P_r = \frac{4\sigma}{3c} T^4 = 1,3 \cdot 10^{13} \text{ Pa},$$

  kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K $^{-4}$ Stefanova–Boltzmannova konstanta a rychlost světla $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

2.24. U hvězd hlavní posloupnosti je nejdůležitější charakteristikou celková hmotnost hvězdy M. V intervalu spektrálních typů M5 až B0 platí, že poloměr $R \sim M^{3/4}$, a zářivý výkon $L \sim M^{7/2}$. Najděte, jak potom na hmotnosti závisí: a) efektivní teplota hvězdy T_{ef}, b) střední hustota hvězdy ρ_s, c) gravitační zrychlení na povrchu hvězdy g a d) centrální teplota hvězdy T_c, e) centrální tlak P_c.

a) efektivní teplota

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{ef}}^4 \quad \rightarrow \quad T_{\mathrm{ef}}^4 \sim \frac{L}{R^2} = \frac{M^{7/2}}{M^{6/4}} = M^2 \quad \rightarrow \quad T_{\mathrm{ef}} \sim M^{1/2}$$

b) střední hustota

$$\rho_s = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \rightarrow \quad \rho_s \sim \frac{M}{R^3} = \frac{M}{M^{9/4}} = M^{-5/4}$$

c) gravitační zrychlení na povrchu hvězdy

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \rightarrow \quad g \sim \frac{M}{R^2} = \frac{M}{M^{6/4}} = M^{-1/2}$$

d) centrální teplota

$$T_c \sim \frac{M}{R} = \frac{M}{M^{3/4}} = M^{1/4}$$

e) centrální tlak

$$P_c = 3G\frac{M^2}{R^4} \quad \rightarrow \quad P_c \sim \frac{M^2}{R^4} = \frac{M^2}{M^{12/4}} = \frac{M^2}{M^3} = M^{-1}$$

2.25. Za předpokladu, že zářivý výkon hvězdy L závisí na hmotnosti hvězdy M tímto způsobem: $(L/L_\odot) = (M/M_\odot)^{7/2}$ vypočtěte, jak na hmotnosti hvězdy závisí poloměr dráhy r a perioda P hypotetické obyvatelné planety, na níž bychom naměřili touž hustotu zářivého toku, jakou nás oblažuje Slunce. Obě veličiny spočtěte pro případ hvězdy o hmotnosti a) 1,5 Slunce a b) 0,8 Slunce a c) 0,3 Slunce.

- hustota zářivého toku dopadající na Zemi:

$$F_Z = \frac{L_\odot}{4\pi r_z^2},$$

  kde $r_Z = 1\ \mathrm{AU} = 1,496 \cdot 10^{11}$ m

- za předpokladu, že na obyvatelné planetě by měla být stejná hustota zářivého toku, získáme vztah mezi hmotností hvězdy a poloměrem dráhy obyvatelné planety:

$$F_{\mathrm{obyv}} = F_Z \quad \rightarrow \quad \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{L_\odot}{4\pi r_z^2} \quad \rightarrow \quad \frac{L}{L_\odot} = \frac{r^2}{(1\ \mathrm{AU})^2}$$

$$\rightarrow \quad r = 1\ \mathrm{AU} \cdot \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{1/2} = 1\ \mathrm{AU} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{7/4}$$

- Pro získání periody oběhu takovéto planety použijeme 3. Keplerův zákon:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

$$\frac{P^2_{\mathrm{obyv}}}{P^2_z} = \frac{\frac{4\pi^2}{GM} r^3}{\frac{4\pi^2}{GM_\odot}(1\ \mathrm{AU})^3} = \frac{M_\odot}{M}\frac{r^3}{(1\ \mathrm{AU})^3}$$

  dosadíme vztah pro poloměr dráhy z přechozího bodu:

$$\frac{P^2_{\mathrm{obyv}}}{P^2_z} = \frac{M_\odot}{M}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{21/4}\frac{(1\ \mathrm{AU})^3}{(1\ \mathrm{AU})^3} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{17/4} \quad \rightarrow \quad P_{\mathrm{obyv}} = 1\ \mathrm{rok} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{17/8}$$

  Pro jednotlivé případy:

  a) $M_1 = 1,5\ M_\odot$:

$$r_1 = 1\ \mathrm{AU} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{7/4} = 1,5^{7/4} \cdot 1\ \mathrm{AU} = 2\ \mathrm{AU}$$

$$P_1 = 1\ \mathrm{rok} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{17/8} = 1\ \mathrm{rok} \cdot 1,5^{17/8} = 2,4\ \mathrm{roku}$$

  b) $M_2 = 0,8\ M_\odot$:

$$r_2 = 0,8^{7/4} \cdot 1\ \mathrm{AU} = 0,68\ \mathrm{AU}$$
$$P_2 = 0,8^{17/8} \cdot 1\ \mathrm{rok} = 0,62\ \mathrm{roku}$$

  c) $M_3 = 0,3\ M_\odot$:

$$r_3 = 0,3^{7/4} \cdot 1\ \mathrm{AU} = 0,12\ \mathrm{AU}$$
$$P_3 = 0,3^{17/8} \cdot 1\ \mathrm{rok} = 0,077\ \mathrm{roku}$$

2.26. Na jak dlouho by Slunci vydržela zásoba vodíkového paliva, kdyby bylo možné ve Slunci spálit veškerý vodík na helium beze zbytku a zářivý výkon Slunce by celou dobu odpovídal výkonu dnešního Slunce. (Předpokládejte, že Slunce obsahuje 70% H a 30% He).

- hmotnost vodíku: $m_{\mathrm{H}} = 1,00794 \cdot m_u$
- hmotnost helia: $m_{\mathrm{He}} = 4,002602 \cdot m_u$, kde $m_u = 1,66054 \cdot 10^{-27}$ kg je atomová hmotnostní konstanta
- při jedné reakci dojde k přeměně čtyř atomů vodíku na atom helia, uvolní se při tom energie:

$$E_{1r} = \Delta mc^2 = (4 \cdot 1,00794 - 4,002602) \cdot 1,66054 \cdot 10^{-27} \cdot c^2 = 4,358 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

- celkové množství vodíku ve Slunci: $M_{\mathrm{H}} = 0,7\ M_{\odot} = 1,39 \cdot 10^{30}$ kg
- počet reakcí, které mohou proběhnout:

$$N = \frac{M_{\mathrm{H}}}{m_{4\mathrm{H}}} = 2,08 \cdot 10^{56}$$

- celkové množství energie, které se při nich uvolní:

$$E_{\mathrm{celk}} = N \cdot E_{1r} = 9,06 \cdot 10^{44} \text{ J}$$

- toto množství energie by Slunci ($L_{\odot} = 3,846 \cdot 10^{26}$ W) vydrželo:

$$t = \frac{E_{\mathrm{celk}}}{L_{\odot}} = 2,36 \cdot 10^{18} \text{ s} = 76,9 \cdot 10^{9} \text{ let}$$

2.28. Určete o kolik kg se zmenšuje ročně hmotnost Slunce vyzařováním fotonů a jak dlouho by mohlo Slunce zářit svým současným výkonem, než by vyzářilo energii ekvivalentní své hmotnosti.

- Slunce každou vteřinu vyzařuje energii $E = 3,846 \cdot 10^{26}$ J
- k získání takového množství energie musí každou vteřinu proběhnout $N = \frac{E}{E_{1r}} = 8,8 \cdot 10^{37}$ reakcí
- při jedné reakci ubyde $\Delta m_{1\mathrm{reakce}} = 4 \cdot m_{\mathrm{H}} - m_{\mathrm{He}} = 4,8418 \cdot 10^{-29}$ kg
- za rok se hmotnost Slunce zmenší o

$$\Delta m = \Delta m_{1\mathrm{reakce}} \cdot N \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365,25 = 1,34 \cdot 10^{17} \text{ kg}$$

- než by Slunce vyzářilo energii ekvivalentní své hmotnosti, mohlo by zářit svým současným výkonem

$$t = \frac{M_{\odot}}{\Delta m} = 1,48 \cdot 10^{13} \text{ let}$$

Kapitola 3

3.1 Vypočítejte: a) Jakou minimální kinetickou energii a rychlost musí mít elektron (hmotnost elektronu vůči hmotnosti protonu zanedbejte), aby při nepružné srážce s atomem vodíku v základním stavu dokázal tento atom ionizovat.Porovnejte potřebnou rychlost se střední kvadratickou rychlostí elektronů v ideálním plynu teplém b) 6000 K, c) 9000 K a d) 12 000 K.

a) $E_i = 13,6$ eV, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg

$$E_i = \frac{1}{2}m_e v^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E_i}{m_e}} = 2187 \text{ km/s}$$

b)

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} = 522 \text{ km/s},$$

kde $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K

c) $v_k = 639,5$ km/s

d) $v_k = 738,5$ km/s

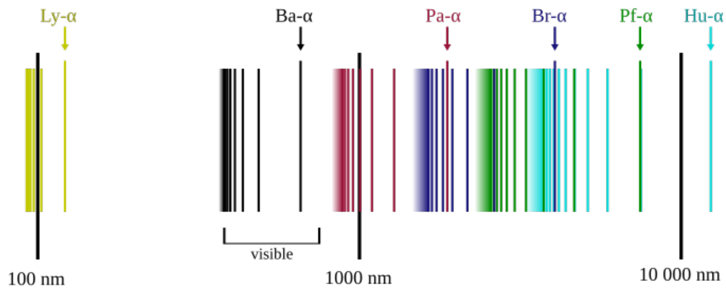
3.2 Je možné, aby se sousední spektrální série vodíku vzájemně překrývaly?

Frekvenci spektrální čáry lze spočítat pomocí vztahu:

$$h\nu = \Delta E = E_1 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2} \right),$$

kde $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J.s je Planckova konstanta, ν je frekvence, $E_1 = 13,6$ eV je energie základní hladiny vodíku, ΔE je energiový rozdíl mezi počátečním stavem (i), popsaným hlavním kvantový číslem n_i a výsledným stavem (j) charakterizovaným číslem n_j.

Spektrální série se budou překrývat, pokud hrana následující série bude mít kratší vlnovou délku (větší frekvenci) než α čára dané série (viz obr. 2)



Obrázek 2: Spektrální série vodíku.

Hrana série odpovídá přechodu z nekonečna, α čára dané série odpovídá přechodu z nejbližší vyšší hladiny. Potom můžeme zapsat:

$$\nu_{\infty \to n+1} > \nu_{n+1 \to n}$$

$$E_1 \frac{\frac{1}{\infty^2} - \frac{1}{(n+1)^2}}{h} > E_1 \frac{\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}}{h}$$

$$-\frac{1}{(n+1)^2} > \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2} > \frac{2}{(n+1)^2} \tag{2}$$

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} > 2$$

$$\frac{n+1}{n} > \sqrt{2}$$

Po dalších úpravách dojdeme ke vztahu: $n > 1 + \sqrt{2} \approx 2,4$, tzn. že už Paschenova série (n=3) se překrývá s Brackettovou sérií.

3.3 Jak mnoho energie se uvolní při rekombinaci 1 kg ionizovaného vodíku na vodík neutrální? Porovnejte s energií zkapalnění 1 kg vodní páry na vodu téže teploty při tlaku 10^5 Pa.

Ionizační energie: $E_i = 13,6$ eV ... na 1 atom
Počet atomů v 1 kg: $N = \frac{m}{m_H} = 6,02 \cdot 10^{26}$.
Celková uvolněná energie: $E = N \cdot E_i = 1,3 \cdot 10^9$ J
Měrné skupenské teplo varu vody: 2 256 kJ/kg $\rightarrow$ při rekombinaci se uvolní zhruba 580x více energie.

3.4 Atom vodíku s elektronem v základním energiovém stavu pohltil foton o vlnové délce 88 nm, což vedlo k jeho ionizaci. Vypočtěte rychlost elektronu, s níž opustí atom za zjednodušujícího předpokladu, že se kinetická energie jádra přitom nezmění.

Energie fotonu:

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} = 2,259 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 14,1 \text{ eV}$$

K ionizaci vodíku se spotřebovala energie $E_i = 13,6$ eV. Zbylá energie fotonu se přemění na kinetickou energii elektronu:

$$E_k = \Delta E = E_f - E_i = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad \rightarrow \quad v = 420 \text{ km/s}$$

3.5 Při velmi pomalé, avšak nepružné srážce dvou neutrálních atomů vodíku, z nichž jeden je v základním stavu a druhý je excitován do druhé energiové hladiny, dojde k deexcitaci druhého atomu bez emise fotonu. Vypočtěte rychlost, s níž se po srážce začnou atomy vzájemně vzdalovat. (Řešte v soustavě spojené s těžištěm).

$E_1 = -13,6$ eV, $E_2 = E_1/2^2 = -3,4$ eV
Energie uvolněná při deexcitaci: $\Delta E = E_2 - E_1 = 10,4 \text{ eV} = 1,634 \cdot 10^{-18}$ J.
Tato energie se přemění na kinetickou energii obou atomů:

$$\Delta E = 2E_k = 2 \cdot \frac{1}{2} m_H v^2,$$

kde $m_H = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg je hmotnost vodíku. Rychlost každého z atomů bude tedy:

$$v = \sqrt{\frac{\Delta E}{m_H}} = 31,37 \text{ km/s}$$

To znamená, že od sebe se budou vzdalovat rychlostí $2v = 62,7$ km/s.

3.7 Dokažte, že pro atom vodíku je stupeň degenerace g_n energetické hladiny, popsané hlavním kvantovým číslem n, dán vztahem: $g_n = 2n^2$.

hlavní kvantové číslo: $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$
vedlejší kvantové číslo: $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$
magnetické kvantové číslo: $m = -l \dots 0 \dots l$

spinové kvantové číslo: $s = \pm 1/2$

Degenerace energetické hladiny:

$$g_n = 2\sum_{0}^{n-1}(2l+1) = 2n^2$$

3.8 Zjistěte poměrné zastoupení atomů vodíku excitovaných do 2. a 3. energetické hladiny v termodynamické rovnováze při teplotě a) 6000 K, b) 12 000 K, c) 24 000 K, vztažené vůči koncentraci atomů vodíku v základním stavu. Koncentrace volných elektronů nechť činí$3,14159265 \cdot 10^{23}$/m3.

Poměry počtů atomů ve stavu m a n, N_m a N_n , popsaných statistickými vahami g_m a g_n, vyjadřujícími kolikrát je ona energiová hladina degenerovaná (pro vodík: $g_n = 2n^2$), a odpovídajícími energiemi E_m a E_n ve stavu termodynamické rovnováhy popisuje tzv. **Boltzmannova excitační rovnice**:

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{g_m}{g_n}\mathrm{e}^{-\frac{E_m-E_n}{kT}} \tag{3}$$

a)

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{2\cdot 2^2}{2\cdot 1^2}\mathrm{e}^{-\frac{(-3,4+13,6)\cdot 1,602\cdot 10^{-19}}{k\cdot 6000}} = 1,1\cdot 10^{-8}$$

$$\frac{N_3}{N_1} = \frac{2\cdot 3^2}{2\cdot 1^2}\mathrm{e}^{-\frac{(-1,51+13,6)\cdot 1,602\cdot 10^{-19}}{k\cdot 6000}} = 6,2\cdot 10^{-10}$$

b) $N_2/N_1 = 2,1\cdot 10^{-4}$, $N_3/N_1 = 7,5\cdot 10^{-5}$

c) $N_2/N_1 = 2,9\cdot 10^{-2}$, $N_3/N_1 = 2,6\cdot 10^{-2}$

3.9 Může za předpokladu termodynamické rovnováhy nastat taková situace, že

a) ve hvězdné atmosféře početně převládnou atomy nabuzené do druhé energetické hladiny nad atomy v základním stavu?

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1}\mathrm{e}^{-\frac{E_2-E_1}{kT}},$$

kde $E_n = -13,6/n^2$ eV: $E_1 = -13,6$ eV, $E_2 = -13,6/4 = -3,4$ eV. Po dosazení:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{8}{2}\mathrm{e}^{-\frac{(-3,4+13,6)\cdot 1,602\cdot 10^{-19}}{kT}}.$$

V případě, že bude obsazení 1. a 2. hladiny stejné: $N_2 = N_1 \quad\rightarrow\quad \frac{N_2}{N_1} = 1$:

$$1 = 4\mathrm{e}^{\frac{-10,2\cdot 1,602\cdot 10^{-19}}{kT}}$$

$$\ln(1/4) = -\frac{10,2\cdot 1,602\cdot 10^{-19}}{kT}$$

$$T = \frac{-10,2\cdot 1,602\cdot 10^{-19}}{k\ln(1,4)} = 85386\,\mathrm{K}$$

Může, ale teplota by musela být vyšší než 85 000 K, což je vyšší teplota než v běžných hvězdných atmosférách.

b) Jestliže ano, jaké budou mít relativní zastoupení atomy excitované do 3. hladiny? $E_3 = -13,6/9 = 1,51$

$$\frac{N_3}{N_1} = \frac{18}{2}\mathrm{e}^{-\frac{(-1,51+13,6)\cdot 1,602\cdot 10^{-19}}{kT}} = 1,74$$

c) Poroste-li teplota nade všechny meze, jaké bude obsazení i-té hladiny v poměru k obsazení základní hladiny? Může takové obsazení hladin reálně nastat?

$$\frac{N_i}{N_1} = \frac{g_i}{g_1} \mathrm{e}^{-\frac{E_i - E_1}{kT}}$$

pro $T \to \infty$: $\exp\left(-\frac{E_i - E_1}{kT}\right) \to 1$:

$$\frac{N_i}{N_1} = \frac{g_i}{g_1} = \frac{2i^2}{2} = i^2$$

3.12 Je vyšší ionizace a) atomů sodíku s ionizačním potenciálem $E_i = 5,14$ eV a $Z_1/Z_0 \cong 0,5$, b) atomů železa s $E_i = 7,87$ eV, $Z_1/Z_0 \cong 1,6$ v atmosféře červeného obra, kde předpokládáme efektivní teplotu 4 500 K a koncentraci volných koncentrací $N_e = 2,5 \cdot 10^{17}$ m^{-3} nebo v atmosféře hvězdy hlavní posloupnosti o teplotě 5 200 K s elektronovou koncentrací $N_e = 4,4 \cdot 10^{18}$ m^{-3} . Diskutujte.

Ve stavu termodynamické rovnováhy lze stanovit poměr počtu $(i+1)$krát ionizovaných atomů N_{i+1} k počtu i-krát ionizovaných atomů N_i pomocí tzv. **Sahovy ionizační rovnice**:

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2}{N_e} \frac{Z_{i+1}}{Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{E_i}{kT}}, \tag{4}$$

kde N_e koncentrace volných elektronů, Z_i je tzv. partiční funkce pro příslušný stupeň ionizace a E_i je energie příslušné ionizace.

a) sodík: $E_i = 5,14$ eV, $Z_1/Z_0 \cong 0,5$

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{2}{N_e} \frac{Z_1}{Z_0} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{E_i}{kT}}$$

obr: $N_1/N_0 = 5100$, hvězda hl. posloupnosti: $N_1/N_0 = 2100$

b) železo: $E_i = 7,87$ eV, $Z_1/Z_0 \cong 1,6$
obr: $N_1/N_0 = 14$, hvězda hl. posloupnosti: $N_1/N_0 = 16$

3.15 Logaritmováním Boltzmannovy a Sahovy rovnice uveďte tyto vztahy do tvaru, v němž je astrofyzikové vidí nejraději, energie v eV, teploty v kelvinech:
Boltzmannova rovnice:

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{g_m}{g_n} \mathrm{e}^{-\frac{E_m - E_n}{kT}}$$

$$\log\left(\frac{N_m}{N_n}\right) = \log\left(\frac{g_m}{g_n} \mathrm{e}^{-\frac{E_m - E_n}{kT}}\right)$$

$$\log\left(\frac{N_m}{N_n}\right) = \log\left(\frac{g_m}{g_n}\right) + \log\left(\mathrm{e}^{-\frac{E_m - E_n}{kT}}\right)$$

$$\log\left(\frac{N_m}{N_n}\right) = \log\left(\frac{g_m}{g_n}\right) - \frac{E_m - E_n}{kT} \log e$$

$$\log\left(\frac{N_m}{N_n}\right) = \log\left(\frac{g_m}{g_n}\right) - \frac{5040}{T}(E_m - E_n)$$

Sahova rovnice:

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2}{N_e} \frac{Z_{i+1}}{Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{E_i}{kT}}$$

$$\log\left(\frac{N_{i+1}}{N_i}\right) = \log 2 - \log N_e + \log\left(\frac{Z_{i+1}}{Z_i}\right) + \frac{3}{2} \log\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right) - \frac{E_i}{kT} \log e$$

$$\log\left(\frac{N_{i+1}}{N_i}\right) = \frac{3}{2}\log T - \frac{5040}{T}\frac{E_i}{\mathrm{eV}} - \log N_e + \log\left(\frac{Z_{i+1}}{Z_i}\right) + \log 2 + \frac{3}{2}\log\left(\frac{2\pi m_e k}{h^2}\right)$$

3.16 Obr spektrální třídy K má efektivní teplotu 4 300 K. Zjištěná hodnota mikroturbulentní rychlosti je 2 km/s. Stanovte šířku čáry Fe I o vlnové délce 553,93 nm. Lze mikroturbulenci zanedbat?
Rozšíření spektrální čáry:

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda v}{c}$$

Teplotní rozšíření čar způsobené neuspořádanými mikroskopickými tepelnými pohyby atomů či iontů:

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda v_{\mathrm{tepl}}}{c},$$

kde

$$v_{\mathrm{tepl}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Tuto rychlost získáme jako maximum Maxwellova rozdělení (= nejpravděpodobnější rychlost plynu):

$$f(v) = \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3} 4\pi v^2 \mathrm{e}^{\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{\mathrm{tepl}}$$

Potom

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}} = 0,002\,\mathrm{nm}.$$

Pokud připočítáme i mikroturbulenci:

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c}\left(\frac{2kT}{m} + v_{\mathrm{turb}}^2\right)^{1/2} = 0,008\,\mathrm{nm}.$$

$\rightarrow$ mikroturbulenci nelze zanedbat

3.17 Hvězda CQ UMa je chemicky pekuliární hvězdou typu SrCrEu, spektrální třídy A2 V, na jejímž povrchu se nacházejí rozsáhlé skvrny s odlišným rozložením energie ve spektru. Hvězda v důsledku rotace vykazuje fotometrické změny, které v barvě v dosahují až 0,096 mag. Perioda světelných změn činí 2,45 dne, není ovšem vyloučena ani perioda dvojnásobná. K rozhodnutí mezi nimi nám může pomoci spektroskopie. Z pološířky spektrální čáry Mg II totiž lze odhadnout projekci ekvatoreální rotační rychlosti: $V_e \sin i = 33$ km/s. Hvězdy hlavní posloupnosti téže spektrální třídy mají poloměr $R = 2,0R_\odot$. a) Odvoďte obecný vztah mezi velikost ekvatoreální rotační rychlosti V_e v km/s, poloměrem hvězdy v $R_\odot$ a periodou rotace P ve dnech. b) Co nyní soudíte o obou navržených periodách?

a)

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{v}{R}$$

odtud

$$v_e = 2\pi\frac{R}{P} = 2\pi\frac{\mathrm{km/s}}{86400}\left(\frac{\mathrm{den}}{P}\right)\left(\frac{R_\odot}{\mathrm{km}}\right)\left(\frac{R}{R_\odot}\right) = 50,5788\,\mathrm{km/s}\left(\frac{\mathrm{den}}{P}\right)\left(\frac{R}{R_\odot}\right) = 41,45\,\mathrm{km/s}$$

b) pro P = 2,45 dne:

$$\sin i = \frac{33}{v_e} = 0,796$$

pro $P_2 = 2P$: $v_e = 20,64$ km/s $\rightarrow \sin i = 1,6 \rightarrow P_2$ není správná perioda

3.18 Sestavte vztah pro tloušťku izotermické atmosféry H, v níž by vystupovaly základní charakteristiky hvězdy, tj. její hmotnost M, poloměr R a zářivý výkon L, vše v jednotkách slunečních, případně efektivní teplota T_{ef}. Předpokládejte, že i střední atomová hmotnost částic v atmosféře je stejná jako u Slunce. Aplikujte na některé známé případy hvězd.

tloušťka atmosféry:

$$H = \frac{kT}{g\mu_s m_H} = \frac{kT}{\mu_s m_H}\frac{R^2}{GM}$$

pro Slunce: $T = 5780$ K, $\mu_s = 1,3$:

$$H = 135\,\mathrm{km}\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2\left(\frac{M_\odot}{M}\right)\left(\frac{T}{5780\,\mathrm{K}}\right)$$

$L = 4\pi\sigma R^2 T^4 \quad \rightarrow \quad T \sim L^{1/4}/R^{1/2}$:

$$H = 135\,\mathrm{km}\left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{1/4}\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{3/2}\left(\frac{M_\odot}{M}\right)$$

3.19 Vypočítejte a porovnejte a) únikovou rychlost atomu vodíku ve sluneční koróně se b) střední kvadratickou atomu, za předpokladu, že nás zajímá situace ve vzdálenosti 2 poloměrů hvězdy od středu, kde kinetická teplota koróny dosahuje $1,6 \cdot 10^6$ K. Co z toho plyne?

a)

$$v_u = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{2R_\odot}} = 436,6\,\mathrm{km/s}$$

b)

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT \qquad \rightarrow \qquad v_{\mathrm{kv}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\mathrm{H}}}} = 199\,\mathrm{km/s}$$

Kapitola 4

4.1. V okolí Slunce připadá jedna hvězda na 8 pc^3. Je-li střední hmotnost hvězd $M = 0,35 M_\odot$, vypočtěte střední hustotu hmoty v okolí Slunce a porovnejte ji se střední hustotou mezihvězdné látky v rovině Galaxie (10^6 atomů/m^3).

- střední hustota hmoty v okolí Slunce:

$$\rho_{\text{okoli}} = \frac{M}{V} = \frac{0,35 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{8 \cdot (3,086 \cdot 10^{16})^3} = 2,98 \cdot 10^{-21} \text{ kg/m}^3$$

- střední hustota mezihvězdné látky v rovině Galaxie (za zjednodušeného předpokladu, že je tvořena vodíkem):

$$\rho_{\text{rov.gal}} = 10^6 \cdot m_H = 10^6 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} = 1,66 \cdot 10^{-21} \text{ kg/m}^3$$

$$\rightarrow \quad \frac{\rho_{\text{okoli}}}{\rho_{\text{rov.gal}}} = 1,8$$

4.4. kolik by se ročně změnil poloměr Slunce, pokud ve Slunci neprobíhaly termonukleární reakce a výkon Slunce byl hrazen pouze z energie uvolňované pozvolným smršťováním. Využijte viriálový teorém.

- Viriálový teorém:

$$2\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = 0,$$

  kde $\langle E_k \rangle$ je střední hodnota celkové vnitřní energie tělesa, převážně pak kinetické energie neuspořádaného tepelného pohybu, a $\langle E_p \rangle$ střední hodnota potenciální energie.

- V průběhu kolapsu klesá potenciální energie a roste vnitřní – kinetická energie. Současně se část energie dostává do prostoru v podobě záření - vyzářenou energii označíme E_{rad}. Ze zákona zachování energie pak plyne:

$$\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle + E_{\text{rad}} = 0$$

- Kombinací této rovnice s viriálovou větou dostaneme:

$$E_{\text{rad}} = \langle E_k \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_p \rangle$$

- potenciální energie:

$$E_p = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

- změna potenciální energie při smršťování:

$$\Delta E_p = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R^2} \Delta R$$

- Slunce za rok vyzáří množství energie odpovídající:

$$E_{\text{rad}} = L_\odot \cdot t,$$

  kde $L_\odot = 3,86 \cdot 10^{26}$, $t = 1$ rok $= 365,25 \cdot 24 \cdot 3600$ s

- tato energie musí být uvolněna postupným smršťováním:

$$L_\odot \cdot t = -\frac{1}{2} \Delta E_p = -\frac{3}{10} \frac{GM_\odot^2}{R_\odot^2} \Delta R_\odot,$$

  kde $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $R_\odot = 6,955 \cdot 10^8$ m, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3 kg $^{-1}$ s^{-2}

- Slunce se tedy každý rok zmenší o:

$$\Delta R_\odot = \frac{10}{3}\frac{L_\odot t R_\odot^2}{G M_\odot^2} = 74 \text{ m}$$

4.5. Jaká by byla na Zemi průměrná teplota na počátku vývoje sluneční soustavy za předpokladu, že by zemská atmosféra měla tytéž vlastnosti, jako v současnosti.

a) Na počátku vývoje sluneční soustavy:

- parametry Slunce v této době: $T_{\odot,1} = 5586$ K, $R_{\odot,1} = 0,9\ R_\odot$, přičemž $R_\odot = 6,955 \cdot 10^8$ m
- zářivý výkon tehdejšího Slunce:

$$L_{\odot,1} = 4\pi R_{\odot,1}^2 T_{\odot,1}^4 \sigma = 2,718 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

- zářivý tok dopadající na Zemi:

$$\Phi_1 = \frac{L_{\odot,1}}{4\pi r^2} \cdot \pi R_Z^2,$$

  kde $R_Z = 6371$ km je poloměr Země a $r = 1$ AU $= 1,495 \cdot 10^{11}$ m
- Země zpětně vyzáří:

$$L_{Z,1} = \alpha \cdot 4\pi R_Z^2 \sigma T_{Z,1}^4$$

  kde $T_{Z,1}$ je tehdejší teplota Země, koeficient $\alpha \simeq 0,7$ souvisí s jevy v atmosféře, díky kterým Země nevyzáří stejné množství energie, které přijme od Slunce
- s pomocí znalosti přijaté a vyzářené energie můžeme určit teplotu Země:

$$\frac{L_{\odot,1}}{4\pi r^2} \cdot \pi R_Z^2 = \alpha \cdot 4\pi R_Z^2 \sigma T_{Z,1}^4$$

$$\frac{4\pi R_{\odot,1}^2 \sigma T_{\odot,1}^4}{4\pi r^2} \cdot \pi R_Z^2 = \alpha \cdot 4\pi R_Z^2 \sigma T_{Z,1}^4 \quad \rightarrow \quad T_{Z,1}^4 = \frac{R_{\odot,1}^2 T_{\odot,1}^4}{4\alpha r^2}$$

$$T_{Z,1} = T_{\odot,1} \left(\frac{R_{\odot,1}}{2\sqrt{\alpha} r}\right)^{1/2} = 267 \text{ K} = -6°\text{C}$$

b) V současnosti: $T_\odot = 5780$ K

$$T_{Z,2} = T_\odot \left(\frac{R_\odot}{2\sqrt{\alpha} r}\right)^{1/2} = 291 \text{ K} = 18°\text{C}$$

4.6. Za předpokladu, že ve Slunci všude panuje jeho střední teplota, tedy 7 milionů kelvinů, vypočtěte počet fotonů v objemu Slunce a porovnejte s počtem nukleonů.

- počet fotonů v 1 m^3 Slunce:

$$n_f = 2,029 \cdot 10^7 T^3 = 6,96 \cdot 10^{27}$$

- celkový počet fotonů ve Slunci:

$$n_{\text{f,celk}} = n_f \cdot \frac{4}{3}\pi R_\odot^3 = 9,8 \cdot 10^{54}$$

- počet nukleonů:

$$n_{\text{nukl}} = \frac{2 \cdot 10^{30}}{1,66 \cdot 10^{-27}} = 1,2 \cdot 10^{57} \tag{5}$$

$$\rightarrow \quad \frac{n_{\text{f,celk}}}{n_{\text{nukl}}} = 0,008$$

4.7.Jestliže by ve Slunci byl zdrojem opacity jen k rozptyl, při němž se náhodně změní směr fotonu, a střední volná dráha l byla 1 mm, vypočtěte střední dobu τ, za níž by jeden takto trápený foton dokázal z centra doletět na povrch Slunce .

- situaci můžete chápat jako Brownův pohyb, kde platí, že střední vzdálenost od místa počátku cesty takové částice je rovna $l\sqrt{N}$, kde N je počet jednotlivých skoků:

$$R_\odot = l\sqrt{N} \quad \rightarrow \quad N = \frac{R_\odot^2}{l^2}$$

- celková dráha, kterou musí foton urazit, aby se dostal na povrch Slunce:

$$D = N \cdot l = \frac{R_\odot^2}{l^2} l = \frac{R_\odot^2}{l}$$

- čas, který k této cestě potřebuje:

$$t = \frac{D}{c} = \frac{R_\odot^2}{c \cdot l} = 1,61 \cdot 10^{12} \text{ s} = 51100 \text{ let},$$

ve skutečnosti je však doba „cesty jednoho kvanta“ řádově delší, neboť hlavním zdrojem opacity je fotoionizace, která je procesem mnohem zdlouhavějším.

4.8. Při rychlé fázi hvězdné kontrakce na počátku jejich vývoje pozorujeme víceméně volný pád částic do centra tíže.

a) Ukažte, že doba zhroucení kulového oblaku o hustotě ρ do bodu t_{ff} volným pádem, pokud by se síle gravitační nepostavila žádná jiná, je dána vztahem: $t_{ff} \cong \sqrt{3\pi/32G\rho}$.

- Dobu zhroucení oblaku můžeme odvodit pomocí 3. Keplerova zákona:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

- Představme si, že hmota oblaku o poloměru R padá radiálně ke středu. Radiální dráhu můžeme brát jako příklad degenerované elipsy o excentricitě 1 a hlavní poloose $a = R/2$. Potom čas potřebný ke zhroucení oblaku je roven polovině periody pohybu po kruhové dráze o poloměru $R/2$:

$$t_{ff} = \frac{P_{\text{orbit}}}{2} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = \pi\sqrt{\frac{R^3}{8GM}}$$

- za hmotnost oblaku dosadíme $M = \rho \cdot V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$:

$$t_{ff} = \pi\sqrt{\frac{R^3}{8G}\frac{3}{4\pi R^3 \rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}$$

b) Za jakou dobu by se za těchto podmínek zhroutilo do bodu naše Slunce s hustotou $\rho_\odot = 1400$ kg m^{-3}.

$$t_{ff,\odot} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_\odot}} = 30 \text{ min}$$

c) Za jak dlouho se zhroutí oblak s typickou koncentrací cca 10^4 molekul vodíku v cm ^{3}.

- hustota takového oblaku ($n = 10^4/\text{cm}^3 = 10^{10}/\text{m}^3$):

$$\rho = n \cdot m_{\text{H}_2} = 10^{10} \cdot 2 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} = 3,32 \cdot 10^{-17} \text{ kg/m}^3$$

- zhroutí se za dobu

$$t_{ff} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}} = 1,15 \cdot 10^{13} \text{ s} = 365000 \text{ let}$$

d) Porovnejte tento čas s celkovou dobou aktivního života hvězdy (cca 10^{10} let).

$$\frac{t_{ff}}{t_{\rm aktiv}} = \frac{365000}{10^{10}} = 3,65 \cdot 10^{-5} \quad \rightarrow \quad t_{ff} \simeq \frac{1}{30000} t_{\rm aktiv} \tag{6}$$

4.9. Během pomalé fáze hvězdné kontrakce je výkon hvězdy zhruba konstantní, zhruba takový, jaký hvězda má, „dosedne-li“ na hlavní posloupnost: $L \sim M^{3,5}$. Víte-li, že u hvězd hlavní posloupnosti závisí poloměr hvězdy R na hmotnosti takto: $R \sim M^{3/4}$, vypočtěte jak závisí délka trvání pomalé fáze hvězdné kontrakce τ na hmotnosti hvězdy. Vyjděte přitom z předpokladu, že τ se u hvězd sluneční hmotnosti odhaduje na 30 milionů let.

- Celkovou dobu, kterou hvězda stráví v průběhu této pomalé kontrakce zhruba vyjadřuje tzv. Kelvinova-Helmhotzova škála $\tau_{\rm KH}$. Ta je definována jako podíl celkového objemu energie vyzářené během kolapsu $E_{\rm rad}$ a středního zářivého výkonu hvězdy L:

$$\tau_{\rm KH} = \frac{E_{\rm rad}}{L}$$

- Energii vyzářenou během kolapsu získáme kombinací viriálového teorému

$$2\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = 0,$$

a zákona zachování energie

$$\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle + E_{\rm rad} = 0$$

$$\rightarrow E_{\rm rad} = \langle E_k \rangle = -\frac{1}{2}\langle E_p \rangle$$

- Potenciální energii lze určit pomocí vztahu:

$$E_p = -\alpha \frac{GM^2}{R},$$

kde koeficient α závisí na rozložení hmoty (běžně lze brát $\alpha \approx 1,7$).

- Pro celkovou vyzářenou energii během pomalé fáze smršťování potom dostaneme vztah:

$$E_{\rm rad} = -\frac{1}{2}\langle E_p \rangle = \frac{\alpha}{2}\frac{GM^2}{R}$$

- Potom můžeme odhadnout Kelvinovu-Helmholtzovu škálu:

$$\tau_{\rm KH} = \frac{E_{\rm rad}}{L} = \frac{\alpha}{2}\frac{GM^2}{RL}$$

- Za předpokladu, že platí $L \sim M^{3,5}$, $R \sim M^{3/4}$:

$$\tau_{\rm KH} = \frac{\alpha}{2}\frac{GM^2}{M^{3/4} \cdot M^{3,5}} = \frac{\alpha}{2} GM^{-9/4} \approx 3 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-9/4} \text{ let}$$

4.10. Jaká je minimální počáteční hmotnost hvězdy, která již prošla nebo právě prochází stadiem obra.

- Dobu $\tau_{\rm HP}$, kterou hvězda stráví na hlavní posloupnosti lze odhadnout jako poměr jejího celkového množství zásob jaderné energie E a střední hodnoty zářivého výkonu během stadia hvězdy na hlavní posloupnosti $\bar{L}$:

$$\tau_{\rm HP} \cong \frac{E}{\bar{L}} \cong 7,3 \cdot 10^{10} \text{ let} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) q(M) \left(\frac{L_\odot}{\bar{L}}\right) \approx 10^{10} \text{ let} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2,6},$$

kde $q(M)$ je poměrná část vodíku, která se ve stadiu hvězdy hlavní posloupnosti přemění na helium.

- Pokud vezmeme v úvahu stáří vesmíru $13,7 \cdot 10^9$ let jako maximální možnou dobu, kterou mohla hvězda strávit na hlavní posloupnosti:

$$13,7 \cdot 10^9 = 10^{10} \left(\frac{M_{\min}}{M_\odot} \right)^{-2,6}$$

$$M_{\min} = 1,37^{-1/2,6} M_\odot = 0,89 M_\odot$$

4.11. Jak starý by musel být vesmír, aby se v něm objevil první heliový bílý trpaslík vzniklý jako výsledek vývoje osamělé hvězdy.

$$\tau_{\mathrm{HP}} = 10^{10} \left(\frac{M_{\min}}{M_\odot} \right)^{-2,6} \quad \text{let}$$

Aby se hvězda o hmotnosti $M = 0,5\ M_\odot$ dostala do stadia heliového bílého trpaslíka, vesmír by musel být starý

$$t = 10^{10}\,(0,5)^{-2,6} \approx 60 \cdot 10^9 \text{ let} \tag{7}$$

4.12. Za předpokladu, že stavová rovnice elektronově degenerované látky, z níž je složena hvězda nebo její část, váže tlak a hustotu takto: $P \sim \rho^{5/3}$ a pro střední hodnotu tlaku ve hvězdě lze též psát $P \sim M^2 R^{-4}$, odvoďte závislost a) poloměru, b) střední hustoty degenerované hvězdy c) vazebné energie E_P a d) vnitřní teploty T na hmotnosti M.

a)

$$\frac{M^2}{R^4} = \rho^{5/3} = \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right)^{5/3} \quad \rightarrow \quad R \sim M^{-1/3}$$

b)

$$\rho^{5/3} = \frac{M^2}{R^4} = \quad \rightarrow \quad \rho \sim M^2$$

c)

$$E_p \sim \frac{M^2}{R} = \frac{M^2}{M^{-1/3}} = M^{7/3}$$

d)

$$p = \frac{\rho k T}{\mu_s m_H} \sim \frac{M^2}{R^4},\ \rho \sim \frac{M}{R^3}$$

$$\rightarrow \quad T \sim \frac{1}{\rho} \frac{M^2}{R^4} = \frac{R^3}{M} \frac{M^2}{R^4} = \frac{M}{R}$$

$$T \sim \frac{M}{R} = \frac{M}{M^{-1/3}} = M^{4/3}$$

Kapitola 5

5.1 Kolik energie by se uvolnilo při jaderné přeměně uhlíku o hmotnosti 1,4 $M_\odot$ na železo. Porovnejte tuto energii s potenciální energií bílého trpaslíka o téže hmotnosti a poloměru odpovídajícímu poloměru 4 500 km. Je pravda, že by touto termonukleární detonací bylo možné zmíněného bílého trpaslíka rozmetat do prostoru?

a) energie uvolněná při přemně uhlíku o hmotnosti $M = 1,4M_\odot$ na železo:

- energie uvolněná při jedné reakci:

$$5\,{}^{12}_{6}\mathrm{C} \;\rightarrow\; {}^{56}\mathrm{Fe} + \Delta mc^2$$

$$E = \Delta mc^2 = (5 \cdot 12 - 56)m_u \cdot c^2 = 5,98 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J},$$

  kde $m_u = 1,6605 \cdot 10^{-27}$ kg je atomová hmotnostní konstanta

- počet reakcí, které mohou proběhnout:

$$N = \frac{M}{5 \cdot m_{\mathrm{C}}} = \frac{M}{5 \cdot 12 \cdot m_u} = 2,8 \cdot 10^{55}$$

- celková uvolněná energie:

$$E_{\mathrm{celk}} = N \cdot E = 1,68 \cdot 10^{46}\ \mathrm{J}$$

b) potenciální energie bílého trpaslíka o hmotnosti $M = 1,4M_\odot$ a poloměru $R = 4500$ km:

$$E_{\mathrm{pot}} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = -6,97 \cdot 10^{43}\mathrm{J},$$

kde $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$
$\rightarrow$ vyhození do povětří je možné

5.3 . Odvoďte vztah mezi únikovou rychlostí v_u z povrchu bílého trpaslíka a pozorovanou hodnotou gravitačního rudého posuvu vyjádřeného a) v bezrozměrných jednotkách z nebo b) ve formě „nadbytečné rychlosti“ V_n. c) Pro střední hodnotu $V_n = 54$ km/s vypočtěte hodnotu únikové rychlosti.

a) v bezrozměrných jednotkách z:

- gravitační rudý posuv:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2R} \tag{8}$$

- úniková rychlost:

$$v_u = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

- vztah mezi gravitačním rudým posuvem a únikovou rychlostí:

$$z = \frac{1}{c^2}\frac{GM}{R} = \frac{v_u^2}{2}\frac{1}{c^2} \quad\rightarrow\quad v_u = \sqrt{2zc^2} = \sqrt{2z}c$$

b) ve formě „nadbytečné rychlosti“ V_n:

$$V_n = z \cdot c \quad\rightarrow\quad v_u = \sqrt{2zc^2} = \sqrt{2V_nc}$$

c) $V_n = 54$ km/s

$$v_u = \sqrt{2V_nc} = 5700\ \mathrm{km/s}$$

5.7 Jakou maximální rychlost může mít elektron po β-rozpadu neutronu. Jaká může být maximální energie uvolněného neutrina?

- β rozpad neutronu:

$$n^0 \to p^+ + e^- + \nu_e$$

- maximální energie neutrina - za předpokladu, že veškerá uvolněná energie při reakci přešla do energie neutrina:

$$E = \Delta mc^2 = \left[m_{n^0} - (m_{p^+} + m_{e^-})\right] \cdot c^2 = 1,251 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J},$$

  kde $m_{p^+} = 1,6726 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_{n^0} = 1,6749 \cdot 10^{-27}$ kg, $m_{e^-} = 9,1094 \cdot 10^{-31}$ kg

- maximální rychlost elektronu - za předpokladu, že neutrino nevzniklo a veškerá uvolněná energie přešla do rychlosti elektronu:

$$E_k = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$E_k = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_e c^2$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} E_k = m_e c^2 - m_e c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$(E_k + m_e c^2)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_e c^2$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_e c^2}{E_k + m_e c^2}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{m_e c^2}{E_k + m_e c^2}\right)^2$$

$$v^2 = c^2 - c^2\left(\frac{m_e c^2}{E_k + m_e c^2}\right)^2$$

$$v = c\left[1 - \left(\frac{m_e c^2}{E_k + m_e c^2}\right)^2\right]^{1/2} = 0,919c$$

5.9 Neutronová hvězda je výsledkem kolapsu elektronově degenerovaného jádra hmotné hvězdy. Předpokládejte, že se při zhroucení poloměr objektu zmenší 400krát. Víte-li že neutronová hvězda se při vzniku otočí 100krát za sekundu a má magnetické pole o indukci 10^8 teslů, odhadněte minimální hodnoty těchto veličin v objektu, z něhož neutronová hvězda vznikla.

- magnetický tok $\Phi = B \cdot S$ zůstává při kolapsu zachován ($R_1 = 400\ R_2$, $B_2 = 10^8$ T):

$$B_1 S_1 = B_2 S_2$$

$$B_1 = B_2 \frac{S_2}{S_1} = B_2 \frac{R_2^2}{R_1^2} = B_2 \frac{R_2^2}{(400R_2)^2} = \frac{B_2}{400^2} = 625\ \mathrm{T}$$

- periodu otáčení původní hvězdy T_1 získáme ze zákona zachování momentu hybnosti:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2,$$

  kde moment setrvačnosti koule o hmotnosti M a poloměru R je $I = \frac{2}{5}MR^2$, $\omega_2 = 100$ otáček/s $\to T_2 = 1/100$ s

$$\frac{2}{5}MR_1^1\omega_1 = \frac{2}{5}MR_2^1\omega_2$$

$$\frac{2}{5}MR_1^2\left(\frac{2\pi}{T_1}\right) = \frac{2}{5}MR_2^2\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)$$

$$400^2 R_2^2\left(\frac{2\pi}{T_1}\right) = R_2^2\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)$$

$$T_1 = 400^2 T_2 = 400^2\frac{1}{100} = 1600\ \mathrm{s} = 26,7\ \mathrm{min}$$