Úvod do fyziky hvězd - řešené příklady

Andrea Bobalíková

Kapitola 1

1.1 Vypočtěte délku světelného roku a parseku podle jejich definice. S jakou přesností jsou tyto jednotky stanoveny? 1AU $= 1,495\ 978\ 706\ 6 \cdot 10^{11}$ m, $c = 2,997\ 924\ 58 \cdot 10^8$ m s^{-1}. Najděte její převodní faktor.

- světelný rok: dráha, kterou urazí světlo ve vakuu za jeden juliánský rok

$$1 \text{ sv. rok} = 365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 s \cdot c = 9,460\ 730\ 473 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

- parsek: vzdálenost, ze které je vidět střední vzdálenost Země-Slunce (jedna AU) pod úhlem jedné obloukové vteřiny

$$1 \text{ pc} = \frac{\text{AU} \cdot 360 \cdot 3600}{2\pi} = 3,085\ 677\ 6 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

- převodní faktor:

$$\left(\frac{r}{1 \text{ pc}}\right) = \frac{15 \text{ AU}}{2\pi \cdot 365,25 \cdot c}\left(\frac{r}{1 \text{ ly}}\right) = 3,261\ 564\left(\frac{r}{1 \text{ ly}}\right)$$

1.2 Mikuláš Koperník soudil, že všechny hvězdy jsou od nás vzdáleny asi 40 milionů průměrů Země. Vypočtěte: a) vzdálenost hvězd v AU a pc. b) jakou by měly tyto hvězdy paralaxu. Byla by měřitelná bez dalekohledu?

a)

$$d = 40 \cdot 10^6 D_Z = 40 \cdot 10^6 \cdot 12\ 742 \text{ km} = 5,0968 \cdot 10^{14} \text{ m} = 3407 \text{ AU} = 0,0165 \text{ pc}$$

b)

$$\pi[''] = \frac{1}{r\ [\text{pc}]} = \frac{1}{0,0165} = 60,5'' \simeq 1'$$

to by bylo na hranici měřitelnosti

1.3 Tycho Brahe pak měl zato, že jasné hvězdy mají úhlové průměry 2´. Vypočtěte pro koperníkovské vzdálenosti poloměr jasné hvězdy v poloměrech Slunce. Existují tak veliké hvězdy?

$R_\odot = 6,955 \cdot 10^8$ m, $\alpha = 1'$

$$\tan\alpha\ [^\circ] = \frac{R\ [\text{m}]}{d\ [\text{m}]}$$

nebo

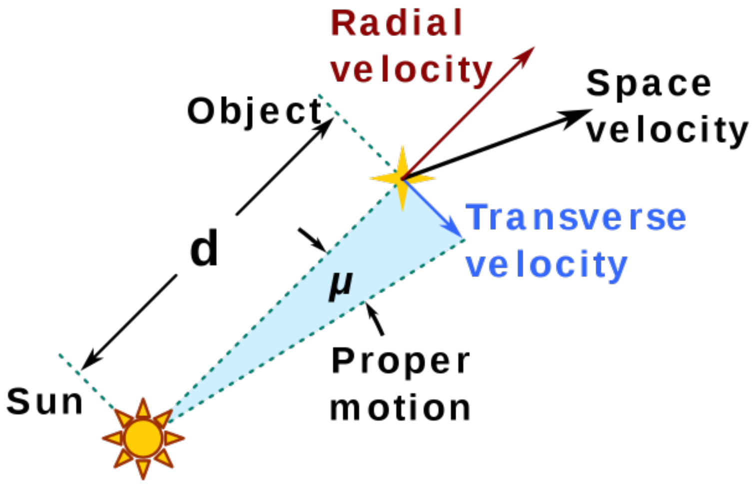
$$\alpha\ [''] = \frac{R\ [\text{AU}]}{d\ [\text{pc}]} \quad \rightarrow \quad R = \alpha \cdot d = 60 \cdot 0,0165 = 0,991 \text{ AU} = 1,4826\ \cdot 10^{11} \text{ m} = 213 \text{ R}_\odot$$

Ano, tak velké hvězdy jsou mezi obry a veleobry zcela běžné.

1.4 Vlastní pohyb hvězdy μ se zpravidla udává v úhlových vteřinách za rok. Znáte-li paralaxu hvězdy π vypočítejte vzdálenost hvězdy ve světelných rocích r a tečnou složku rychlosti v_t v km/s.

$$\tan\mu \approx \mu[\text{rad}] = \frac{v_t}{d} \quad \rightarrow \quad v_t = \mu \cdot d$$

$$v_t = \left(\frac{2\pi \cdot \text{pc}}{360 \cdot 3600 \cdot 365,2442 \cdot 86400}\frac{\mu}{1''/\text{rok}}\frac{r}{\text{pc}}\right) = 4,740470 \text{ km/s}\left(\frac{\mu}{1''/\text{rok}}\right)\left(\frac{r}{\text{pc}}\right)$$



Obrázek 1: vlastní pohyb

1.5 Barnardova hvězda je známa jako hvězda s největším známým vlastním pohybem, který činí 10,37“/rok. Objevil ji E. Barnard v roce 1916, když porovnával fotografické desky zachycující hvězdné pole v Hadonoši z let 1894 a 1916. Ze spektra hvězdy s vizuální hvězdnou velikostí $V = 9,54$ mag vyplývá mj., že jde o červeného trpaslíka typu M4 V, který se k nám blíží rychlostí $v_R = -106,8$ km/s. Hvězda je v současnosti druhým nejbližším hvězdným objektem, hned po trojhvězdě zvané Toliman (α Centauri). V databázi SIMBAD najdeme její paralaxu: $\pi = 0,5493(16)$”.
Vypočtěte: a) její vzdálenost ve světelných letech, b) vypočtěte hodnotu tečné složky její prostorové rychlosti vztažené ke Slunci, c) velikost vektoru prostorové rychlosti, d) absolutní vizuální hvězdnou velikost hvězdy, e) zkontrolujte, zda má pravdu jistý Burnham, když tvrdí, že se tato hvězda přibližuje ke Slunci na pouhé 4 sv. roky, a to už za 10000 let, a pak se bude od něj opět vzdalovat. V době největšího přiblížení prý vzroste vlastní pohyb hvězdy na 25“/rok a hvězdná velikost hvězdy dosáhne 8,6 mag.

a)
$$d = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0,5493} = 1,82 \text{ pc} = 5,94 \text{ ly}$$

b)
$$v_t = 4,74047 \text{ km/s} \left(\frac{\mu}{1\text{”/rok}}\right)\left(\frac{r}{\text{pc}}\right) = 4,740470 \cdot 10,37 \cdot 1,82 = 89,5 \text{ km/s}$$

c)
$$|v| = \sqrt{v_t^2 + v_R^2} = \sqrt{89,5^2 + 106,8^2} = 139,3 \text{ km/s}$$

d)
$$m - M = 5\log r - 5 = -5\log\pi - 5$$
$$M = m - 5\log r + 5 = 13,24 \text{ mag}$$

e) ano

1.6 Vypočítejte vlnovou délku fotonu, jehož hmotnost odpovídá klidové hmotnosti elektronu. Hmotnost vyjádřete v kg a eV.

hmotnost elektronu: $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, 1 eV $= 1,602 \cdot 10^{-19}$ J, Planck: $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J.s

$$E_e = m_e \cdot c^2 = 8,19 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 0,511 \text{ MeV}$$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{hc}{E} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

1.7 O kolik kg své hmotnosti přichází denně Slunce vyzařováním fotonů?
$\mathrm{L}_\odot = 3,844 \cdot 10^{26}$ W

$$E = mc^2 \quad \rightarrow \quad m = \frac{E}{c^2} = \frac{\mathrm{L}_\odot \cdot 86400}{c^2} = 3,7 \cdot 10^{14} \text{kg}$$

1.8 Pomocí Planckova zákona odvoďte Stefanův zákon. Při odvození použijte vztahu:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}$$

Planckův vyzařovací zákon:

$$B_\nu(\nu, t) = 2\pi \frac{\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

$$L = S \int_0^\infty B_\nu(t)\ \mathrm{d}\nu = S \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT) - 1}\ \mathrm{d}\nu = \left| x = \frac{h\nu}{kT},\ \mathrm{d}x = \frac{h}{kT} \mathrm{d}\nu \right| =$$

$$= S \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \mathrm{d}x = S \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \frac{\pi^4}{15} = S \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4 = S\sigma T^4$$

Stefanova-Boltzmannova konstanta:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \tag{1}$$

1.11 Kolikrát vyšší zářivý výkon má hvězda o teplotě $T_1 = 20000$ K, než stejně rozměrná hvězda o efektivní povrchové teplotě $T_2 = 5000$ K? Za předpokladu, že obě září jako absolutně černá tělesa, zjistěte, kde leží maximum vyzařované energie v jejich spektru?

- rozdíl zářivých výkonů:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{S\sigma T_1^4}{S\sigma T_2^4} = \frac{T_1^4}{T_2^4} = 256$$

- maximum vyzařované energie - Wienův posunovací zákon:

$$\lambda_{\max} T = 2,8977685 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$$

$$\lambda_{\max,1} = \frac{2,8977685 \cdot 10^{-3}}{T_1} = 145 \text{ nm (UV)}$$

$$\lambda_{\max,2} = \frac{2,8977685 \cdot 10^{-3}}{T_2} = 580 \text{ nm (oranzova)}$$

1.12 Sluneční záření o vlnových délkách mezi λ a $(\lambda + 1 \text{ nm})$ nese maximální energii pro $\lambda = 480$ nm. Pomocí Wienova posunovacího zákona odhadněte teplotu Slunce. Srovnejte s efektivní teplotou a rozdíl diskutujte.

$$T = \frac{b}{\lambda_{\max}} = \frac{2,8977685 \cdot 10^{-3}}{480 \cdot 10^{-9}} = 6037 \text{ K}$$

$T_{ef} = 5779$ K - Slunce nezáří přesně jako absolutně černé těleso

1.13 Obří hvězda o výkonu $L = 1000\ \mathrm{L}_\odot$ je obklopena neprůhledným mrakem okolohvězdné látky o poloměru cca 10 AU. Za předpokladu, že tento stav trvá již poměrně dlouho a oblak září jako absolutně černé těleso, vypočtěte efektivní teplotu zámotku. Diskutujte, zda byste tuto hvězdu mohli spatřit pouhýma očima, jak byste ji pozorovali nejlépe?

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}},\ \mathrm{L}_\odot = 3,844 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W},\ 1\mathrm{AU} = 1,495\ 978\ 706\ 6 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$$

$$L = S\sigma T^4 = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad \rightarrow \quad T = \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma}\right)^{1/4} = 700\ \mathrm{K}$$

$\rightarrow$ mohli bychom ji spatřit, nejlépe pozorovatelná ale je v infračerveném oboru

1.17 Jistá kulová hvězdokupa o 250 000 členech se jeví jako objekt 4. velikosti. Jaká je průměrná hvězdná velikost člena hvězdokupy. Předpokládejte zde na okamžik, že hvězdná velikost všech hvězd hvězdokupy je stejná. Diskutujte, co se změní, není-li stejná.

$$m = -2,5 \log \frac{F}{F_0} \quad \rightarrow \quad F = F_0 \cdot 10^{-0,4m},$$

kde $F_0 = 2,553 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\ m^{-2}}$

$$m_{\mathrm{celk}} = -2,5 \log \frac{F_{\mathrm{celk}}}{F_0} = -2,5 \log \left(N \cdot 10^{-0,4m_*}\right)$$
$$4 = -2,5 \log \left(250\ 000 \cdot 10^{-0,4m_*}\right)$$
$$10^{-0,4\cdot 4} = 250\ 000 \cdot 10^{-0,4m_*}$$
$$\frac{10^{-0,4\cdot 4}}{250\ 000} = 10^{-0,4m_*}$$
$$m_* = -2,5 \log \left(\frac{10^{-0,4\cdot 4}}{250\ 000}\right) = 17,5\ \mathrm{mag}$$

nebo:

$$m_{\mathrm{celk}} - m_* = -2,5 \log \left(\frac{F_{\mathrm{celk}}}{F_*}\right) = -2,5 \log \left(\frac{N \cdot F_*}{F_*}\right) = -2,5 \log N$$
$$m_* = m_{\mathrm{celk}} + 2,5 \log n = 4 + 2,5 \log 250\,000 = 17,5\ \mathrm{mag}$$

1.18 Dvojhvězda Castor sestává ze dvou složek s hvězdnými velikostmi 2,0 a 2,9 mag. Jaká je pak hvězdná velikost Castoru při pozorování pouhým okem, jímž jednotlivé složky dvojhvězdy nerozlišíme.

$$m_{\mathrm{Castor}} = -2,5 \log \left(10^{-0,4m_1} + 10^{-0,4m_2}\right) = 1,6\ \mathrm{mag}$$

1.19 Porovnejte jasnost Siria o vizuální hvězdné velikosti $m_v = -1,47$ mag a nejslabších, okem viditelných hvězd. Kolik takových hvězd šesté velikosti ($m_* = 6$ mag) by se muselo spojit, aby se co do jasnosti Siriovi vyrovnalo?

$$m_S = -2,5 \log \left(N \cdot 10^{-0,4m_*}\right)$$

$$10^{-0,4\cdot m_S} = N \cdot 10^{-0,4m_*}$$

$$N = \frac{10^{-0,4\cdot m_S}}{10^{-0,4m_*}} = \frac{10^{-0,4\cdot(-1,47)}}{10^{-0,4\cdot 6}} = 10^{0,4\cdot 1,47 + 0,4\cdot 6} = 973$$

nebo:

$$m_{\text{Sirius}} - m_* = -2,5\log\left(\frac{F_{\text{Sirius}}}{F_*}\right) = -2,5\log\left(\frac{N\cdot F_*}{F_*}\right) = -2,5\log N$$

$$N = 10^{-0,4(m_{\text{Sirius}}-m_*)} = 973$$

1.21 Rotační energie současného Slunce činí $2,4\cdot 10^{35}$ J. a) Na kolik let by tato energie dokázala krýt jeho zářivý výkon? b) Za předpokladu zachování momentu hybnosti vypočítejte jak by se změnila perioda rotace a rotační energie, kdyby se Slunce naráz zhroutilo na bílého trpaslíka s rozměry stokrát menšími než má dnes? c) Odkud se vzala energie rotace?

a) doba, na kterou dokáže rotační energie pokrýt zářivý výkon = rotační energie, která je k dispozici ÷ energie, která se vyzáří za sekundu:

$$t = \frac{E_{\text{rot}}}{\mathrm{L}_\odot} = \frac{2,4\cdot 10^{35}}{3,844\cdot 10^{26}} = 19,8\ \text{let}$$

b) zákon zachování momentu hybnosti:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

moment setrvačnosti koule je:

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

potom:

$$\frac{2}{5}\mathrm{M}_\odot R^2_{\odot,i}\omega_i = \frac{2}{5}\mathrm{M}_\odot R^2_{\odot,f}\omega_f$$

$$R^2_{\odot,i}\omega_i = R^2_{\odot,f}\omega_f$$

$$R^2_{\odot,i}\frac{2\pi}{T_i} = R^2_{\odot,f}\frac{2\pi}{T_f}$$

$$100^2 R^2_{\odot,f}\frac{2\pi}{T_i} = R^2_{\odot,f}\frac{2\pi}{T_f}$$

$$100^2\frac{1}{T_i} = \frac{1}{T_f}$$

$$T_f = \frac{T_i}{10000}$$

rotační energie Slunce před zhroucením:

$$E_{\text{rot},i} = \frac{1}{2}I\omega_i^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{5}\mathrm{M}_\odot R^2_{\odot,i}\left(\frac{2\pi}{T_i}\right)^2 = 2,4\cdot 10^{35}$$

$$\rightarrow\quad T_i = 2\pi R_{\odot,i}\sqrt{\frac{1}{5}\frac{\mathrm{M}_\odot}{E_{\text{rot,i}}}} = 2\pi\cdot 6,96\cdot 10^8\sqrt{\frac{1}{5}\frac{1,99\cdot 10^{30}}{2,4\cdot 10^{35}}} = 5,63\cdot 10^6\ \text{s} = 65,11\ \text{dne}$$

perioda rotace po zhroucení:

$$T_f = \frac{T_i}{10000} = \frac{5,63\cdot 10^6}{10000} = 563\ \text{s} = 9,38\ \text{min}$$

rotační energie po zhroucení:

$$E_{\text{rot},f} = \frac{1}{2}I\omega_f^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{5}\mathrm{M}_\odot R^2_{\odot,f}\left(\frac{2\pi}{T_f}\right)^2 = \frac{1}{5}\mathrm{M}_\odot\frac{R^2_{\odot,i}}{100^2}\left(\frac{2\pi}{T_f}\right)^2 = 2,4\cdot 10^{39}\ \text{J} = 10\,000E_{\text{rot},i}$$

c) z potenciální energie uvolněné kolapsem

1.23 Odvoďte vztah mezi vzdáleností r v pc, pozorovanou a absolutní hvězdnou velikostí m a M.

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \frac{F_1}{F_2} = -2,5 \log \frac{\frac{L_1}{4\pi r_1^2}}{\frac{L_2}{4\pi r_2^2}}$$

$$m - M = -2,5 \log \frac{\frac{L}{4\pi r^2}}{\frac{L}{4\pi 10^2}} = -2,5 \log \frac{10^2}{r^2} = -5 \log \frac{10}{r} = 5 \log \frac{r}{10} = 5 \log r - 5 \log 10 = 5 \log r - 5$$

1.24. Najděte a vyčíslete vzájemné vztahy: a) mezi bolometrickou hvězdnou velikostí m_{bol} a hustotou toku F; b) absolutní bolometrickou hvězdnou velikostí M_{bol}, zářivým výkonem L v nominálních Sluncích, $L_\odot = 3,846 \cdot 10^{26}$ W; c) mezi absolutní bolometrickou hvězdnou velikostí, poloměrem hvězdy R v poloměrech Slunce ($R_\odot = 6,95508(26) \cdot 10^8$ m) a její efektivní teplotou T_{ef} v kelvinech; d) najděte vztah mezi pozorovanou bolometrickou hvězdnou velikostí, úhlovým poloměrem α vyjádřeným v úhlových vteřinách a efektivní teplotou T_{ef} v kelvinech.
Z definice fotometrických veličin přitom plyne, že hvězda 0. bolometrické velikosti způsobuje na hranici zemské atmosféry hustotu zářivého toku $F_0 = 2,553 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2}, hvězda s absolutní hvězdnou velikostí $M_{\mathrm{bol}} = 0$ mag vysílá do prostoru zářivý výkon $L_0 = 3,055 \cdot 10^{28}$ W. Stefanova Boltzmannova konstanta $\sigma = 5,670400 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}.

a)

$$m_{\mathrm{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{F}{F_0} \right) = 2,5 \log F_0 - 2,5 \log F = -18,9824 - 2,5 \log F$$

b)

$$M_{\mathrm{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_\odot} \frac{L_\odot}{L_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{L_\odot}{L_0} \right) - 2,5 \log \left(\frac{L}{L_\odot} \right)$$

$$M_{\mathrm{bol}} = 4,745 - 2,5 \log \left(\frac{L}{L_\odot} \right)$$

c)

$$M_{\mathrm{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{4\pi\sigma R^2 T_{\mathrm{ef}}^4}{L_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{4\pi\sigma R^2 T_{\mathrm{ef}}^4}{L_0} \frac{R_\odot^2}{R_\odot^2} \right)$$

$$M_{\mathrm{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{4\pi\sigma R_\odot^2}{L_0} \right) - 5 \log \left(\frac{R}{R_\odot} \right) - 10 \log T_{\mathrm{ef}} = 42,369 - 5 \log \left(\frac{R}{R_\odot} \right) - 10 \log T_{\mathrm{ef}}$$

d)

$$m_{\mathrm{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{F}{F_0} \right),$$

kam dosadíme

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{4\pi\sigma R^2 T_{\mathrm{ef}}^4}{4\pi r^2}$$

$$m_{\mathrm{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{4\pi\sigma R^2 T_{\mathrm{ef}}^4}{4\pi r^2 F_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{\sigma R^2 T_{\mathrm{ef}}^4}{r^2 F_0} \right)$$

úhlový poloměr:

$$\alpha\ ['']= \frac{360 \cdot 3600}{2\pi} \frac{R}{r} \quad \rightarrow \quad R = \frac{2\pi r \alpha}{360 \cdot 3600}$$

dosadíme do předchozího:

$$m_{\mathrm{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{4\pi^2 \alpha^2 \sigma T_{\mathrm{ef}}^4}{(360 \cdot 3600)^2 F_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{4\pi^2 \sigma}{(360 \cdot 3600)^2 F_0} \right) - 5 \log \alpha - 10 \log T_{\mathrm{ef}}$$

$$m_{\mathrm{bol}} = 25,706 - 5 \log \alpha - 10 \log T_{\mathrm{ef}}$$

1.25 Pomocí výše uvedených vztahů vypočtěte (a) úhlový a (b) lineární poloměr Vegy, víte-li, že $m_{\text{bol}} = -0,40$ mag, paralaxa podle Hipparca $0,1289(6)$" a efektivní teplota ze spektra 9500 K.

a)

$$m_{\text{bol}} = 25,706 - 5\log\alpha - 10\log T_{\text{ef}}$$
$$5\log\alpha = 25,706 - m_{\text{bol}} - 10\log T_{\text{ef}}$$
$$\alpha = 10^{\frac{25,706+0,4-10\log 9500}{5}} = 0,00184\text{"}$$

b) např. pomocí vztahu z příkladu 1.22.:

$$\alpha\ [\text{"}] = \frac{360\cdot 60\cdot 60}{2\pi}\frac{R}{r} = 0,0046\left(\frac{R}{R_\odot}\right)\pi[\text{"}]$$
$$R = \frac{\alpha}{0,0046\pi}R_\odot = 3,08R_\odot$$

1.26. Moderní měření hustoty zářivého toku přicházejícího od Slunce, vedou k závěru, že hodnota sluneční konstanty K (hustota toku ve vzdálenosti 1 AU) činí 1367(3) W/m^2 , přičemž dlouhodobá měření poloměru slunečního kotouče se ustálila kolem hodnoty: $\alpha = 958,966(36)$". Za předpokladu, že Slunce izotropně vyzařuje, vypočtěte a) poloměr Slunce v m, b) hodnotu zářivého výkonu Slunce L ve W a nominálních Sluncích $L_\odot$, c) hodnotu pozorované sluneční bolometrické hvězdné velikosti a d) sluneční absolutní bolometrické hvězdné velikosti M_{bol} a e) efektivní teplotu Slunce v kelvinech. (Pozor, nezaměňujte skutečný a nominální zářivý výkon Slunce).

a) poloměr Slunce:

$$R_\odot = r\sin(\alpha) = 6,955\cdot 10^8\ \text{m},$$

kde $r = 1$ AU $= 1,49598\cdot 10^{11}$ m.

b) zářivý výkon:

$$K = \frac{L}{4\pi r^2} \quad \rightarrow \quad L = K4\pi r^2 = 3,844\cdot 10^{26}\ \text{W} = 0,996\ L_\odot$$

c) pozorovaná hvězdná velikost:

$$m_{\text{bol}} = -2,5\log\left(\frac{F}{F_0}\right) = -2,5\log\left(\frac{K}{F_0}\right) = -2,5\log\left(\frac{1367}{2,553\cdot 10^{-8}}\right) = -26,82\ \text{mag}$$

d) absolutní hvězdná velikost:

$$M_{\text{bol}} = -2,5\log\left(\frac{L}{L_0}\right) = -2,5\log\left(\frac{3,844\cdot 10^{26}}{2,553\cdot 10^{28}}\right) = 4,75\ \text{mag}$$

e) efektivní teplota:

$$M_{\text{bol}} = -2,5\log\left(\frac{L}{L_0}\right) = -2,5\log\left(\frac{4\pi R_\odot^2\sigma T_{\text{ef}}^4}{L_0}\right)$$
$$10^{-\frac{M_{\text{bol}}}{2,5}} = \frac{4\pi R_\odot^2\sigma T_{\text{ef}}^4}{L_0}$$
$$T_{\text{ef}} = \left(10^{-0,4M_{\text{bol}}}\frac{L_0}{4\pi R_\odot^2\sigma}\right)^{1/4} = 5779\ \text{K}$$

případně pomocí vztahu z příkladu 1.24:

$$m_{\text{bol}} = 25,706 - 5\log\alpha - 10\log T_{\text{ef}}$$
$$T_{\text{ef}} = 10^{\frac{25,706-m_{\text{bol}}-5\log\alpha}{10}} = 5779\ \text{K}$$

1.27 Je-li dosah dalekohledu 23 magnitudy, do jaké vzdálenosti jím lze zaznamenat: a) nejjasnější cefeidy s absolutní hvězdnou velikostí $M = -5$ mag, b) novy, dosahující v maximu svého lesku $M = -8$ mag, c) supernovy typu Ia $M = -19,5$ mag?

a) cefeidy:

$$m - M = 5 \log r - 5$$

$$r = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 10^{\frac{23-(-5)+5}{5}} = 10^{\frac{33}{5}} = 4 \text{ Mpc}$$

b) novy:

$$r = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 10^{\frac{23-(-8)+5}{5}} = 15,8 \text{ Mpc}$$

c) supernovy Ia:

$$r = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 10^{\frac{23-(-19,5)+5}{5}} = 3160 \text{ Mpc}$$

1.28. Dokažte, že pro rozdíl absolutní a pozorované hvězdné velikosti (libovolného typu) Slunce platí m – M = -31,572126 mag.

Modul vzdálenosti:

$$m - M = 5 \log(r) - 5$$

Vzdálenost Slunce je 1 AU = 1/206264, 8 pc

$$m - M = 5 \log \left(\frac{1}{206264,8} \right) - 5 = -31,572126 \text{ mag}$$

1.29. Jistá dvojhvězda, která nechce být jmenována, sestává ze dvou složek o absolutní hvězdné velikosti $M_1 = 1,267$ mag a $M_2 = 1,875$ mag. Vypočtěte a) jejich zářivé výkony v jednotkách slunečních, b) celkový zářivý výkon soustavy a c) její celkovou absolutní bolometrickou hvězdnou velikost.

a) Vztah mezi absolutní hvězdnou velikostí a zářivým výkonem:

$$M = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_0} \right),$$

kde $L_0 = 3,055{\cdot}10^{28}$ W. Pokud chceme zjistit zářivé výkony v jednotkách slunečních, můžeme také využít znalosti absolutní hvězdné velikosti Slunce: $M_\odot = 4,75$ mag. Potom:

$$M_1 - M_\odot = -2,5 \log \left(\frac{L_1}{L_\odot} \right)$$

$$L_1 = 10^{-\frac{M_1 - M_\odot}{2,5}} L_\odot = 24,73 \ L_\odot$$

$$L_2 = 10^{-\frac{M_2 - M_\odot}{2,5}} L_\odot = 14,13 \ L_\odot$$

b) celkový zářivý výkon soustavy

$$L_{\text{celk}} = L_1 + L_2 = 38,86 \ L_\odot$$

c) celková absolutní bolometrická hvězdná velikost

$$M_{\text{celk}} = -2,5 \log \left(\frac{L_{\text{celk}}}{L_\odot} \right) + 4,75 = 0,776 \text{ mag}$$

1.30. Představte si, že by nám někdo zaměnil Slunce za a) Vegu ($m_v = 0,03$ mag, $\pi = 0,1289$"), b) Arkturus ($m_v = -0,04$ mag,$\pi = 0,0889$"), c) typickou hvězdu slunečního okolí (HD 155 876, $m_v = 9,35$ mag, $\pi = 0,158$"). Vypočtěte jejich vizuální hvězdnou velikost a úhlový průměr. Případné další potřebné údaje si můžete vyhledat v textu učebnice.

a) Vega:
Nejdřív zjistíme její absolutní hvězdnou velikost:

$$m - M = 5\log(r) - 5 = -5\log(\pi) - 5$$

$$M = 5\log(\pi) + 5 + m = 0,58 \text{ mag}$$

Pokud by se nacházela ve vzdálenosti Slunce ($r = 1$ AU $= 1,496 \cdot 10^{11}$ m $= \frac{1}{206265}$ pc), ze Země by měla pozorovanou hvězdnou velikost m_Z:

$$m_Z - M = 5\log(r) - 5$$

$$m_Z = 5\log\left(\frac{1}{206265}\right) - 5 + 0,58 = -30,99 \text{ mag}$$

Její úhlový průměr by potom byl (poloměr Vegy: $R_V = 1,74 \cdot 10^9$ m):

$$\alpha = 2\arctan\left(\frac{R_V}{r}\right) = 80'$$

b) Arcturus ($R_A = 25,7\ R_\odot$, $R_\odot = 6,955 \cdot 10^8$ m):

$$M = 5\log(\pi) + 5 + m = -0,295 \text{ mag}$$

$$m_Z = 5\log\left(\frac{1}{206265}\right) - 5 - 0,295 = -31,87 \text{ mag}$$

$$\alpha = 2\arctan\left(\frac{R_A}{r}\right) = 13,62^\circ$$

c) HD 155 876: ($R = 2/5\ R_\odot$)
$M = 10,34$ mag, $m_Z = -21,23$ mag, $\alpha = 12,79'$

1.31. Vypočtěte jakou hvězdnou velikost m_v by sama o sobě měla sluneční skvrna o teplotě 4200 K pokrývající asi 0,1 % plochy slunečního disku. Úhlový průměr Arkturu s toutéž teplotou je 0,022“, vizuální hvězdná velikost je 0,0 mag. Srovnejte s hvězdnou velikostí Měsíce v úplňku.

Hvězdnou velikost skvrny určíme pomocí vztahu:

$$m_{\text{skvrna}} = -2,5\log\left(\frac{F_{\text{skvrna}}}{F_0}\right),$$

kde $F_0 = 2,553 \cdot 10^{-8}$ W/m^2.

$$F_{\text{skvrna}} = \frac{L_{\text{skvrna}}}{4\pi r^2},$$

kde $r = 1$ AU. Zářivý výkon skvrny je

$$L_{\text{skvrna}} = S_{\text{skvrna}}\sigma T^4 = 0,001 S_\odot \sigma T^4 = 0,001(4\pi R_\odot^2)\sigma T^4 = 1,072 \cdot 10^{23} W,$$

kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4}. Potom

$$F_{\text{skvrna}} = \frac{L_{\text{skvrna}}}{4\pi r^2} = 0,381 \text{ W/m}^2,$$

Hvězdná velikost skvrny je tedy:

$$m_{\text{skvrna}} = -2,5\log\left(\frac{F_{\text{skvrna}}}{F_0}\right) = -17,9 \text{ mag}$$

Pro porovnání - hvězdná velikost Měsíce v úplňku je -12,7 mag.

1.32 Hvězda Pollux je zřejmě Slunci nejbližším obrem. Vizuální hvězdná velikost Polluxu činí 1,15 mag, paralaxa podle družice Hipparcos 0,0967“, efektivní teplota 4100 K a bolometrická korekce se odhaduje na +0,37 mag. Vypočtěte: a) vzdálenost Polluxu, b) jeho absolutní vizuální hvězdnou velikost, c) bolometrickou hvězdnou velikost, d) absolutní bolometrickou hvězdnou velikost hvězdy, e) zářivý výkon v jednotkách slunečních, f) poloměr hvězdy v poloměrech Slunce.

a) vzdálenost:

$$r = \frac{1}{\pi} = 10,34 \text{ pc}$$

b) absolutní vizuální hvězdná velikost

$$m_v - M_v = 5 \log r - 5 = -5 \log \pi - 5$$

$$M_v = 5 \log \pi + 5 + m_v = 1,08 \text{ mag}$$

c) bolometrická hvězdná velikost - k vizuální hvězdné velikosti připočteme bolometrickou korekci (BC):

$$m_{\text{bol}} = m_v + BC = 1,15 + 0,37 = 1,52 \text{ mag}$$

d) absolutní bolometrická hvězdná velikost:

$$m_{\text{bol}} - M_{\text{bol}} = -5 \log \pi - 5 \quad \rightarrow \quad M_{\text{bol}} = 1,45 \text{ mag}$$

e) zářivý výkon v jednotkách slunečních ($L_\odot = 3,846 \cdot 10^{26}$ W):

$$M_{\text{bol}} - M_\odot = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_\odot} \right)$$

$$L = 10^{-\frac{M_{\text{bol}} - 4,75}{2,5}} L_\odot = 21 \ L_\odot$$

f) poloměr hvězdy v poloměrech Slunce

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4 \quad \rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T_{\text{ef}}^4}} = 6,3 \cdot 10^9 \text{ m} = 9,1 \ R_\odot$$

1.33. Efektivní teplota Siria A je 9400 K, poloměr 1,8 $R_\odot$ ($\mathrm{R}_\odot = 6,955 \cdot 10^8$ m) a hmotnost 2,2 $M_\odot$ ($M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg). Určete: a) zářivý výkon hvězdy v jednotkách slunečních, b) její absolutní bolometrickou hvězdnou velikost, c) střední hustotu hvězdy.

a)

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4 = 8,77 \cdot 10^{27} \text{ W} = 22,7 \ L_\odot$$

b)

$$M_{\text{bol}} = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_\odot} \right) + M_\odot = 1,36 \text{ mag}$$

c)

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3} = 533 \text{ kg/m}^3 = 0,38 \ \rho_\odot$$

1.34. Jistý červený trpaslík spektrální třídy M5 V má hmotnost 0,2 $M_\odot$ a poloměr 0,31 $R_\odot$, absolutní bolometrická velikost hvězd činí 9,8 mag. Vypočtěte: a) zářivý výkon v jednotkách slunečních, b) efektivní povrchovou teplotu, c) střední hustotu hvězdy.

a)

$$M_{\text{bol}} - M_{\odot} = -2,5 \log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right)$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 10^{-\frac{M_{\text{bol}}-M_{\odot}}{2,5}} \quad \rightarrow \quad L = 0,0095\ L_{\odot}$$

b)

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4 \quad \rightarrow \quad T = \left(\frac{L}{4\pi\sigma R^2}\right)^{1/4} = 3245\ \text{K}$$

c)

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} = 9480\ \text{kg/m}^3 = 6,7\ \rho_{\odot}$$

Kapitola 2

2.2 Představte si, že máte hvězdu složenou z ideálního plynu, který je ovšem zcela dokonale tepelně vodivý (izotermický). a) Jak by v nitru takové hvězdy závisel tlak na hustotě? b) Mohla by být taková hvězda stabilní?

a) stavová rovnice ideálního plynu:

$$p = nkT = \frac{\rho kT}{\mu_s m_H},$$

kde $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K je Boltzmannova konstanta, $m_H = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg je hmotnost vodíku a μ_s je střední molekulová hmotnost. Odtud plyne

$$p \sim \rho$$

b) Obecně platí $p = \rho^\gamma$. Systém je stabilní, pokud je $\gamma > \frac{4}{3}$. V našem případě $\gamma = 1 \rightarrow$ systém je nestabilní.

2.6 Dokažte, že při maximálním zploštění hvězdy způsobeném rotací je poměr polárního a rovníkového poloměru 2:3. Předpokládejte, že hmota hvězdy je v převážné míře koncentrovaná do jejího centra.

Pro poměr rovníkovéhor$_e$ a polárního poloměru r_p platí vztah:

$$\frac{r_e}{r_p} = 1 + \frac{r_e^3 \omega^2}{2GM} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a_{\mathrm{od}}}{g}\right)_e,$$

člen v závorce je podíl absolutních velikostí odstředivého zrychlení a_{od} a gravitačního zrychlení g na rovníku. Za předpokladu, že $a_{\mathrm{od}} = g$ (nejvyšší možná rotace):

$$\frac{r_e}{r_p} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

2.8 Jaká je střední kinetická energie atomů vodíku, atomů helia a volných elektronů ve sluneční atmosféře o teplotě 5780 K. Jaké jsou jejich střední kvadratické rychlosti? Stačí k úniku ze sluneční atmosféry?

kinetická energie:

$$E_k = \frac{3}{2}kT = 0,75 \text{ eV}$$

střední kvadratické rychlosti:

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

- atom vodíku ($m_{\mathrm{H}} = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg):

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\mathrm{H}}}} = 12 \text{ km/s}$$

- atom helia ($m_{\mathrm{He}} = 4 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg):

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\mathrm{He}}}} = 6 \text{ km/s}$$

- elektron ($m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg):

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\mathrm{e}}}} = 513 \text{ km/s}$$

2.9 Odhadněte počet částic v 1 m^3 látky ve sluneční fotosféře, víte-li, že její teplota je 5780 K a tlak 0,1 atmosféry. Porovnejte s koncentrací molekul v zemské atmosféře.

$$p = nkT \quad \rightarrow \quad n = \frac{p}{kT} = 1,3 \cdot 10^{23} \text{ castic/m}^3$$

Koncentrace ve fotosféře je 200krát menší než zemské atmosféře.

2.10 Za zjednodušujícího předpokladu, že Slunce je složeno ze 30 % z He a 70 % z H a jde o plně ionizovaný plyn, vypočtěte celkový počet a) volných elektronů, b) protonů, c) α částic ve hvězdě.

- počet protonů (= počet jader vodíku):

$$N_{\mathrm{H}} = \frac{0,7 \cdot M_{\odot}}{m_{\mathrm{H}}} = \frac{0,7 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1,66 \cdot 10^{-27}} = 8,39 \cdot 10^{56}$$

- počet alfa částic (= počet jader helia):

$$N_{\mathrm{He}} = \frac{0,3 \cdot M_{\odot}}{m_{\mathrm{He}}} = \frac{0,3 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{4 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}} = 8,99 \cdot 10^{55}$$

- počet volných elektronů:

$$N_e = N_{\mathrm{H}} + 2N_{\mathrm{He}} = 1,02 \cdot 10^{57}$$

2.11 Diskutujte, jak by se měnila střední atomová hmotnost slunečního materiálu μ, pokud by byl tento složen pouze z vodíku a helia: X = 0,70, Y = 0,30 při cestě od povrchu hvězdy k centru. Rozlište postupně tyto případy: a) oba plyny jsou neutrální, b) vodík je zcela ionizován, helium je však takřka neutrální, c) vodík i helium jsou právě jedenkrát ionizovány a d) oba plyny jsou úplně ionizovány.

Pro střední molekulovou hmotnost μ_s platí vztah

$$\frac{1}{\mu_s} = \sum_i \frac{X_i}{A_i},$$

kde X_i je hmotnostní zastoupení částic i-tého druhu a $A_i = \frac{m_i}{m_H}$ je jejich relativní atomová hmotnost.

V případě ionizovaného plynu platí vztah:

$$\frac{1}{\mu_s} = \sum_i (1 + Z_i) \frac{X_i}{A_i},$$

kde Z_i označuje stupeň ionizace i-tého druhu atomu.

a) oba plyny jsou neutrální:

$$\frac{1}{\mu_s} = \frac{0,7}{1} + \frac{0,3}{4} \quad \rightarrow \quad \mu_s = 1,29$$

b) vodík je zcela ionizován, helium je neutrální:

$$\frac{1}{\mu_s} = (1+1)\frac{0,7}{1} + \frac{0,3}{4} \quad \rightarrow \quad \mu_s = 0,678$$

c) vodík i helium jsou právě jedenkrát ionizovány:

$$\frac{1}{\mu_s} = (1+1)\frac{0,7}{1} + (1+1)\frac{0,3}{4} \quad \rightarrow \quad \mu_s = 0,645$$

d) oba plyny jsou úplně ionizovány:

$$\frac{1}{\mu_s} = (1+1)\frac{0,7}{1} + (1+2)\frac{0,3}{4} \quad \rightarrow \quad \mu_s = 0,615$$

2.13 Předpokládejte, že v určitém objemu vodíku o hustotě ρ a teplotě T proběhly jaderné reakce, při nichž se všechna jádra vodíku spojila v jádra helia. Jak se musí změnit součin teploty T' a hustoty ρ', aby v témže objemu ionizovaného helia panoval týž tlak jako před započetím jaderných reakcí. Vysvětlete tím, proč během stadia hvězdy hlavní posloupnosti teplota a hustota v centru monotónně rostou.

- stav na začátku:

$$p_i = \frac{\rho k T}{\mu_s m_\mathrm{H}},$$

kde

$$\frac{1}{\mu_s} = (1+1)\frac{1}{1} \quad \rightarrow \mu_s = \frac{1}{2}$$

(na začátku máme jen ionizovaný vodík)

- stav na konci:

$$p_f = \frac{\rho' k T'}{\mu_s' m_\mathrm{H}},$$

kde

$$\frac{1}{\mu_s'} = (1+2)\frac{1}{4} \quad \rightarrow \mu_s' = \frac{4}{3}$$

(na konci máme dvakrát ionizované helium)

- Musí platit $p_f = p_i$:

$$\frac{\rho' k T'}{\mu_s' m_\mathrm{H}} = \frac{\rho k T}{\mu_s m_\mathrm{H}}$$

$$\rho' T' = \frac{\mu_s'}{\mu_s}\rho T$$

$$\rho' T' = \frac{8}{3}\rho T$$

2.14 Porovnejte tlak působící v nitru bílého trpaslíka o hmotnosti 1 $\mathrm{M}_\odot$, poloměru 6000 km s tlakem ve slunečním nitru. Diskutujte s ohledem na chování látky, z níž jsou obě hvězdy tvořeny. Odhad centrálního tlaku:

$$P_c = 3G\frac{M^2}{R^4}$$

- Slunce:

$$P_c(\odot) = 3G\frac{\mathrm{M}_\odot^2}{\mathrm{R}_\odot^4} = 3G\frac{(2\cdot 10^{30})^2}{(6,96\cdot 10^8)^4} = 3,9\cdot 10^{15}\ \mathrm{Pa}$$

- bílý trpaslík:

$$P_c(BT) = 3G\frac{\mathrm{M}_\odot^2}{(6000\cdot 1000)^4} = 6,2\cdot 10^{23}\ \mathrm{Pa}$$

tlak v centru BT je $2\cdot 10^8$krát větší, látka je ve stavu elektronově degenerovaného plynu

2.16 Na půl cesty mezi středem a povrchem Slunce vládne teplota $3,4\cdot 10^6$ K, tlak 10^6 Pa, hustota látky 1000 kg/m^3. Vypočtěte a) kolik látkových částic (volných elektronů, protonů, alfa částic, jader těžších prvků) obsahuje 1 m^3 látky látkových částic všeho druhu (předpokládejte standardní chemické složení a úplnou ionizaci všech atomů). b) Najděte střední vlnovou délku fotonů a stanovte o jaký typ záření tu jde, c) porovnejte se zářením vycházejícím z fotosféry. d) Jaká je koncentrace fotonů, porovnejte s počtem „látkových“ částic. Srovnáme-li charakteristiky tohoto plynu s charakteristikami rovnovážného fotonového plynu téže teploty, musíme dojít k závěru, že fotony jsou ve slunečním nitru dosti „vzácnými zvířaty“. e) Vypočtěte hustotu energie fotonového plynu a porovnejte s hustotou kinetické energie plynu. f) Porovnejte tlak záření s tlakem ideálního plynu. Z toho okamžitě plyne, že příspěvek fotonového plynu na celkovém tlaku je zanedbatelný – činí 1/1340 tlaku ideálního plynu. g) Vysvětlete, jak je potom možné, že se zde energie přenáší právě zářením?

a) počet látkových částic:
Pro střední molekulovou hmotnost zcela ionizované látky můžeme napsat:

$$\frac{1}{\mu_s} \cong 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z,$$

kde X je hmotnostní zastoupení vodíku, Y je hmotnostní zastoupení helia a Z je zastoupení těžších prvků. Pro Slunce: $X = 0,707, Y = 0,274, Z = 1 - X - Y = 0,019$. Potom:

$$\frac{1}{\mu_s} \cong 2 \cdot 0,707 + \frac{3}{4}0,274 + \frac{1}{2}0,019 \quad \rightarrow \quad \mu_s \cong 0,62$$

$$n = \frac{\rho}{\mu_s m_H} = 9,88 \cdot 10^{29} \text{ castic/m}^3$$

b) střední vlnová délka fotonů:

střední energie připadající na jeden foton:

$$\varepsilon_s = 2,7kT = 1,27 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

střední vlnová délka fotonů je potom:

$$\lambda_s = \frac{ch}{\varepsilon_s} = 1,6 \text{ nm}$$

→ měkké rentgenové záření

c) fotosféra ($T = 5780$ K):

$$\varepsilon_s = 2,7kT = 2,15 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\lambda_s = 924 \text{ nm}$$

→ zhruba 600x delší vlnová délka

d) koncentrace fotonů:

$$n_f = 2,029 \cdot 10^7 \cdot T^3 = 7,95 \cdot 10^{26} \text{ /m}^3$$

→ zhruba na 1200 částic připadá jeden foton

e) hustota energie fotonového plynu:

$$w_f = \frac{4\sigma}{c}T^4 = 1 \cdot 10^{11} \text{ J/m}^3$$

hustota kinetické energie plynu:

$$w = \frac{3}{2}nkT = 6,9 \cdot 10^{13} \text{ J/m}^3$$

→ hustota energie fotonového plynu je asi 690krát menší

f) tlak záření:

$$p_f = \frac{1}{3}w_f = frac4\sigma 3cT^4 = 3,37 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

tlak ideálního plynu:

$$p = nkT = 4,63 \cdot 10^{13} \text{ Pa}$$

g) fotony se pohybují rychlosti světla a mají o několik řádů delší střední volnou dráhu než ostatní částice

2.17 Předpokládejte, že se ve hvězdě o poloměru R a hmotnosti M hustota látky 1) vůbec nemění, 2) mění se nepřímo úměrně kvadrátu vzdálenosti od centra r. Vypočítejte pro oba případy: a) závislost této hustoty $\rho(r)$ vyjádřené pomocí střední hustoty hvězdy ρ_s, b) závislost té části hmotnosti hvězdy, která je pod poloměrem r M_r, c) průběh závislosti gravitačního zrychlení *g(r)* vyjádřeného v povrchovém gravitačním zrychlení *g(R)* a d) velikost potenciální (konfigurační) energie této hvězdy a rozdíly diskutujte.

1. hustota látky se nemění

   a) $\rho(r) = \rho_s$

   b)

$$M(r) = \int \rho\,\mathrm{d}V = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r')r'^2\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2\,\mathrm{d}r' = \frac{4}{3}\pi\rho_s r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = M\left(\frac{r}{R}\right)^3 \qquad \rho_s = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

   c)

$$g(r) = -G\frac{M(r)}{r^2} = -G\frac{M\left(\frac{r}{R}\right)^3}{r^2} = -GM\frac{r}{R^3} = g(R)\frac{r}{R} \qquad g(R) = \frac{GM}{R^2}$$

   d)

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}m} = -\frac{GM}{r} \quad \rightarrow \quad \int \mathrm{d}E_p = -\int \frac{GM}{r}\,\mathrm{d}m \qquad \text{kde } \mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$$

$$E_p = -\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{GM}{r}\rho(r)r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = -4\pi \int_0^R \frac{GM}{r}\rho(r)r^2\,\mathrm{d}r = -4\pi GM \int_0^R \rho(r)\,r\,\mathrm{d}r$$

$$E_p = -4\pi GM\rho_s \int_0^R r\,\mathrm{d}r = -4\pi GM \int_0^R r\frac{M(r)}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,\mathrm{d}r = -4\pi GM^2 \int_0^R r\frac{\left(\frac{r}{R}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{3GM^2}{R^6}\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r = -\frac{3GM^2}{R^6}\frac{1}{5}R^5 = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}$$

2. hustota se mění nepřímo úměrně kvadrátu vzdálenosti

   a) $\rho(r) = \rho_0/r^2$

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^R 4\pi r^2\rho\,\mathrm{d}r = 4\pi \int_0^R \frac{\rho_0}{r^2}r^2\,\mathrm{d}r = 4\pi\rho_0 \int_0^R \mathrm{d}r = 4\pi\rho_0 R$$

$$\rho_s = \frac{M}{V} = \frac{4\pi\rho_0 R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3\frac{\rho_0}{R^2} = 3\frac{\rho(r)r^2}{R^2}$$

$$\rho(r) = \frac{1}{3}\rho_s\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

   b)

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2\,\mathrm{d}r' = 4\pi\rho_0 \int_0^r \mathrm{d}\,r' = 4\pi\rho_0 r = 4\pi\frac{R^2}{3}\rho_s r = 4\pi r\frac{R^2}{3}\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = M\frac{r}{R}$$

   c)

$$g(r) = -G\frac{M(r)}{r^2} = -G\frac{M\frac{r}{R}}{r^2} = -\frac{GM}{rR} = g(R)\frac{R}{r}$$

d)

$$E_p = -4\pi GM \int_0^R \rho(r)\, r \,\mathrm{d}r = -4\pi GM \int_0^R \frac{\rho_0}{r^2} r \,\mathrm{d}r = -4\pi GM \frac{R^2}{3} \int_0^R \rho_s \frac{1}{r} \,\mathrm{d}r =$$

$$= -4\pi GM \frac{R^2}{3} \int_0^R \frac{1}{r} \frac{M \frac{r}{R}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \,\mathrm{d}r = -\frac{GM^2}{R^2} \int_0^R \mathrm{d}r = -\frac{GM^2}{R}$$

2.21 Podle standardního slunečního modelu slunečního nitra má látka v centru hustotu $1,5 \cdot 10^5$ kg/m^3 a teplotu $1,5 \cdot 10^7$ K, hmotnostní zastoupení vodíku $X = 0,4$ a obsah helia $Y = 0,6$, příspěvek těžších prvků je možno v prvním přiblížení zanedbat. Vypočtěte tlak, který zde působí, za předpokladu, že vodík a helium jsou zde plně ionizovány a chovají se jako ideální plyn. Vypočtěte též tlak záření a oba tlaky porovnejte.

- tlak ideálního plynu:

$$P_g = nkT = \frac{\rho k T}{\mu_s m_H},$$

kde $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K je Boltzmannova konstanta, $m_H = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg je hmotnost vodíku a μ_s je střední molekulová hmotnost, pro kterou platí:

$$\frac{1}{\mu_s} = \sum_i (1 + Z_i) \frac{X_i}{A_i},$$

přičemž X_i představuje zastoupení daného prvku, $A_i = \frac{m_i}{m_H}$ relativní hmotnost daného prvku vůči vodíku a Z_i stupeň ionizace prvku. V našem případě:

$$\frac{1}{\mu_s} = (1+1)\frac{X}{\frac{m_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{H}}}} + (1+2)\frac{Y}{\frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{H}}}} = 2\frac{0,4}{1} + 3\frac{0,6}{4} = 1,25 \quad \rightarrow \quad \mu_s = 0,8$$

Potom:

$$P_g = \frac{\rho k T}{\mu_s m_H} = 2,3 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$$

- tlak záření:

$$P_r = \frac{4\sigma}{3c} T^4 = 1,3 \cdot 10^{13} \text{ Pa},$$

kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K $^{-4}$ Stefanova–Boltzmannova konstanta a rychlost světla $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

2.24. U hvězd hlavní posloupnosti je nejdůležitější charakteristikou celková hmotnost hvězdy M. V intervalu spektrálních typů M5 až B0 platí, že poloměr $R \sim M^{3/4}$, a zářivý výkon $L \sim M^{7/2}$. Najděte, jak potom na hmotnosti závisí: a) efektivní teplota hvězdy T_{ef}, b) střední hustota hvězdy ρ_s, c) gravitační zrychlení na povrchu hvězdy g a d) centrální teplota hvězdy T_c, e) centrální tlak P_c.

a) efektivní teplota

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{ef}}^4 \quad \rightarrow \quad T_{\mathrm{ef}}^4 \sim \frac{L}{R^2} = \frac{M^{7/2}}{M^{6/4}} = M^2 \quad \rightarrow \quad T_{\mathrm{ef}} \sim M^{1/2}$$

b) střední hustota

$$\rho_s = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \rightarrow \quad \rho_s \sim \frac{M}{R^3} = \frac{M}{M^{9/4}} = M^{-5/4}$$

c) gravitační zrychlení na povrchu hvězdy

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \rightarrow \quad g \sim \frac{M}{R^2} = \frac{M}{M^{6/4}} = M^{-1/2}$$

d) centrální teplota

$$T_c \sim \frac{M}{R} = \frac{M}{M^{3/4}} = M^{1/4}$$

e) centrální tlak

$$P_c = 3G\frac{M^2}{R^4} \quad \rightarrow \quad P_c \sim \frac{M^2}{R^4} = \frac{M^2}{M^{12/4}} = \frac{M^2}{M^3} = M^{-1}$$

2.25. Za předpokladu, že zářivý výkon hvězdy L závisí na hmotnosti hvězdy M tímto způsobem: $(L/L_\odot) = (M/M_\odot)^{7/2}$ vypočtěte, jak na hmotnosti hvězdy závisí poloměr dráhy r a perioda P hypotetické obyvatelné planety, na níž bychom naměřili touž hustotu zářivého toku, jakou nás oblažuje Slunce. Obě veličiny spočtěte pro případ hvězdy o hmotnosti a) 1,5 Slunce a b) 0,8 Slunce a c) 0,3 Slunce.

- hustota zářivého toku dopadající na Zemi:

$$F_Z = \frac{L_\odot}{4\pi r_z^2},$$

kde $r_Z = 1\ \mathrm{AU} = 1,496 \cdot 10^{11}$ m

- za předpokladu, že na obyvatelné planetě by měla být stejná hustota zářivého toku, získáme vztah mezi hmotností hvězdy a poloměrem dráhy obyvatelné planety:

$$F_{\mathrm{obyv}} = F_Z \quad \rightarrow \quad \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{L_\odot}{4\pi r_z^2} \quad \rightarrow \quad \frac{L}{L_\odot} = \frac{r^2}{(1\ \mathrm{AU})^2}$$

$$\rightarrow \quad r = 1\ \mathrm{AU} \cdot \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{1/2} = 1\ \mathrm{AU} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{7/4}$$

- Pro získání periody oběhu takovéto planety použijeme 3. Keplerův zákon:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

$$\frac{P_{\mathrm{obyv}}^2}{P_z^2} = \frac{\frac{4\pi^2}{GM} r^3}{\frac{4\pi^2}{GM_\odot}(1\ \mathrm{AU})^3} = \frac{M_\odot}{M}\frac{r^3}{(1\ \mathrm{AU})^3}$$

dosadíme vztah pro poloměr dráhy z přechozího bodu:

$$\frac{P_{\mathrm{obyv}}^2}{P_z^2} = \frac{M_\odot}{M}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{21/4}\frac{(1\ \mathrm{AU})^3}{(1\ \mathrm{AU})^3} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{17/4} \quad \rightarrow \quad P_{\mathrm{obyv}} = 1\ \mathrm{rok} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{17/8}$$

Pro jednotlivé případy:

a) $M_1 = 1,5\ M_\odot$:

$$r_1 = 1\ \mathrm{AU} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{7/4} = 1,5^{7/4} \cdot 1\ \mathrm{AU} = 2\ \mathrm{AU}$$

$$P_1 = 1\ \mathrm{rok} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{17/8} = 1\ \mathrm{rok} \cdot 1,5^{17/8} = 2,4\ \mathrm{roku}$$

b) $M_2 = 0,8\ M_\odot$:

$$r_2 = 0,8^{7/4} \cdot 1\ \mathrm{AU} = 0,68\ \mathrm{AU}$$
$$P_2 = 0,8^{17/8} \cdot 1\ \mathrm{rok} = 0,62\ \mathrm{roku}$$

c) $M_3 = 0,3\ M_\odot$:

$$r_3 = 0,3^{7/4} \cdot 1\ \mathrm{AU} = 0,12\ \mathrm{AU}$$
$$P_3 = 0,3^{17/8} \cdot 1\ \mathrm{rok} = 0,077\ \mathrm{roku}$$

2.26. Na jak dlouho by Slunci vydržela zásoba vodíkového paliva, kdyby bylo možné ve Slunci spálit veškerý vodík na helium beze zbytku a zářivý výkon Slunce by celou dobu odpovídal výkonu dnešního Slunce. (Předpokládejte, že Slunce obsahuje 70% H a 30% He).

- hmotnost vodíku: $m_{\mathrm{H}} = 1,00794 \cdot m_u$
- hmotnost helia: $m_{\mathrm{He}} = 4,002602 \cdot m_u$, kde $m_u = 1,66054 \cdot 10^{-27}$ kg je atomová hmotnostní konstanta
- při jedné reakci dojde k přeměně čtyř atomů vodíku na atom helia, uvolní se při tom energie:

$$E_{1r} = \Delta mc^2 = (4 \cdot 1,00794 - 4,002602) \cdot 1,66054 \cdot 10^{-27} \cdot c^2 = 4,358 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

- celkové množství vodíku ve Slunci: $M_{\mathrm{H}} = 0,7\ M_{\odot} = 1,39 \cdot 10^{30}$ kg
- počet reakcí, které mohou proběhnout:

$$N = \frac{M_{\mathrm{H}}}{m_{4\mathrm{H}}} = 2,08 \cdot 10^{56}$$

- celkové množství energie, které se při nich uvolní:

$$E_{\mathrm{celk}} = N \cdot E_{1r} = 9,06 \cdot 10^{44} \text{ J}$$

- toto množství energie by Slunci ($L_{\odot} = 3,846 \cdot 10^{26}$ W) vydrželo:

$$t = \frac{E_{\mathrm{celk}}}{L_{\odot}} = 2,36 \cdot 10^{18} \text{ s} = 76,9 \cdot 10^{9} \text{ let}$$

2.28. Určete o kolik kg se zmenšuje ročně hmotnost Slunce vyzařováním fotonů a jak dlouho by mohlo Slunce zářit svým současným výkonem, než by vyzářilo energii ekvivalentní své hmotnosti.

- Slunce každou vteřinu vyzařuje energii $E = 3,846 \cdot 10^{26}$ J
- k získání takového množství energie musí každou vteřinu proběhnout $N = \frac{E}{E_{1r}} = 8,8 \cdot 10^{37}$ reakcí
- při jedné reakci ubyde $\Delta m_{1\mathrm{reakce}} = 4 \cdot m_{\mathrm{H}} - m_{\mathrm{He}} = 4,8418 \cdot 10^{-29}$ kg
- za rok se hmotnost Slunce zmenší o

$$\Delta m = \Delta m_{1\mathrm{reakce}} \cdot N \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365,25 = 1,34 \cdot 10^{17} \text{ kg}$$

- než by Slunce vyzářilo energii ekvivalentní své hmotnosti, mohlo by zářit svým současným výkonem

$$t = \frac{M_{\odot}}{\Delta m} = 1,48 \cdot 10^{13} \text{ let}$$