

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Petr Kurfürst

POČETNÍ PRAKTIKUM

Skripta

Aktualizovaná rozšířená verze elektronické publikace:
“Početní praktikum” (2. vydání), Elportál, Brno, Masarykova univerzita.

Brno 2017

Obsah

Úvod

Kapitola 1	Diferenciální a integrální počet	1
1.1	Derivace funkcí jedné proměnné	1
1.2	Neurčité integrály funkcí jedné proměnné	7
1.3	Určité integrály funkcí jedné proměnné	12
1.4	Geometrické a fyzikální aplikace integrace funkce jedné proměnné	14
Kapitola 2	Základy vektorové a tenzorové algebry	19
2.1	Vektory a matice	19
2.2	Báze a jejich transformace	25
2.3	Úvod do tenzorového počtu	31
2.4	Kovariantní a kontravariantní transformace: ★	39
Kapitola 3	Obyčejné diferenciální rovnice	47
3.1	Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu	47
3.1.1	Rovnice separovatelné a homogenní	47
3.1.2	Lineární nehomogenní rovnice	51
3.1.3	Bernoulliova rovnice	52
3.1.4	Diferenciální rovnice exaktní	53
3.1.5	Riccatiova rovnice ★	54
3.2	Lineární obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu	55
3.2.1	Rovnice s konstantními koeficienty	55
3.2.2	Rovnice s nekonstantními koeficienty ★	60
3.3	Řešení lineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého a vyšších řádů převodem na soustavu lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu	61
3.3.1	Homogenní soustavy s konstantními koeficienty	62
3.3.2	Nehomogenní soustavy s konstantními koeficienty	64
Kapitola 4	Úvod do křivočarých souřadnic	69
4.1	Kartézské souřadnice	69
4.2	Válcové (cylindrické) souřadnice	70
4.3	Kulové (sférické) souřadnice	72
Kapitola 5	Skalární a vektorové funkce více proměnných	75
5.1	Parciální a směrové derivace, úplný diferenciál	75
5.2	Kmenová funkce	79
5.3	Diferenciální operátory	82

Kapitola 6	Křivkový integrál	87
6.1	Křivkový integrál 1. druhu	87
6.2	Křivkový integrál 2. druhu	92
Kapitola 7	Dvojný a trojný integrál	95
7.1	Plošný integrál 1. druhu	97
7.2	Plošný integrál 2. druhu	103
7.3	Objemový integrál	106
7.4	Geometrické a fyzikální charakteristiky útvarů	106
Kapitola 8	Integrální věty	113
8.1	Greenova věta	113
8.2	Stokesova věta	115
8.3	Gaussova věta	118
Kapitola 9	Taylorův rozvoj	123
9.1	Rozvoj funkce jedné proměnné	123
9.2	Rozvoj funkce více proměnných	127
Kapitola 10	Fourierovy řady	131
10.1	Fourierovy řady	134
10.2	Fourierova analýza ★	136
Kapitola 11	Úvod do komplexní analýzy	139
11.1	Komplexní čísla	139
11.2	Funkce komplexní proměnné	142
Kapitola 12	Kombinatorika, počet pravděpodobnosti a základy statistiky	149
12.1	Kombinatorika	149
12.2	Počet pravděpodobnosti a základy statistiky	154
Příloha A	Laplaceova transformace ★	163
A.1	Definice a přehled elementárních transformací	163
A.2	„Skoková“ funkce	165
A.3	Diracova delta funkce	167
A.4	Obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, s okrajovými podmínkami	167
A.5	Obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s nekonstantními koeficienty, s okrajovými podmínkami	171
A.6	Užití konvoluce v Laplaceově transformaci	173
Příloha B	Křivočaré souřadnice ★	175
B.1	Kartézská soustava	175
B.1.1	Diferenciální operátory	176
B.1.2	Plochy, objemy	178
B.1.3	Vektory polohy, rychlosti a zrychlení	179
B.2	Válcová soustava	179
B.2.1	Diferenciální operátory	180
B.2.2	Plochy, objemy	182
B.2.3	Vektory polohy, rychlosti a zrychlení	182

B.3	Kulová soustava	183
B.3.1	Diferenciální operátory	185
B.3.2	Plochy, objemy	186
B.3.3	Vektory polohy, rychlosti a zrychlení	187
B.4	Eliptická soustava	188
B.5	Parabolická soustava	190
B.6	„Anuloidová“ soustava	192
B.7	Příklady neortogonálních soustav	193
B.7.1	„Kuželová“ soustava	193
B.7.2	„Disková“ soustava	199
Příloha C	Stručný úvod do parciálních diferenciálních rovnic ★	207
C.1	Parciální diferenciální rovnice 1. řádu	207
C.1.1	Homogenní parciální diferenciální rovnice 1. řádu	207
C.1.2	Nehomogenní parciální diferenciální rovnice 1. řádu	209
C.2	Parciální diferenciální rovnice 2. řádu	212
C.2.1	Klasifikace parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu	212
C.2.2	Metoda fundamentálního řešení (metoda Greenovy funkce)	213
C.2.3	Řešení parabolických parciálních diferenciálních rovnic Fourierovou metodou (metodou separace proměnných)	215
C.2.4	Jednoduché příklady prostorových úloh	220
C.2.5	Řešení hyperbolických parciálních diferenciálních rovnic Fourierovou metodou	222
C.2.6	Ukázka možných způsobů řešení jednoduchých eliptických parciálních diferenciálních rovnic	225
Příloha D	Praktické základy numerických výpočtů ★	229
D.1	Numerické metody lineární algebry	229
D.2	Interpolace	231
D.2.1	Kubický interpolační splajn	232
D.2.2	Bilineární interpolace	235
D.2.3	Bikubická interpolace	240
D.3	Regrese	245
D.3.1	Lineární regrese metodou nejmenších čtverců	245
D.3.2	Polynomiální regrese metodou nejmenších čtverců	247
D.3.3	Robustní regrese	249
D.3.4	Kubický vyhlazovací splajn	250
D.4	Numerické metody výpočtů funkcí jedné proměnné	252
D.4.1	Hledání kořene funkce jedné proměnné - Newtonova metoda	252
D.4.2	Numerické derivování	254
D.4.3	Numerické integrování	254
D.4.4	Jednoduché numerické metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic	258
D.5	Numerické metody výpočtů funkcí více proměnných - řešení parciálních diferenciálních rovnic	264
D.5.1	Hledání kořenů soustavy funkcí více proměnných Newtonova-Raphsonova metoda	264
D.5.2	Principy konečných diferencí	267
D.5.3	von Neumannova analýza stability	269
D.5.4	Laxova metoda	270

D.5.5	Metoda zpětného kroku (Upwind method)	271
D.5.6	Laxova-Wendroffova metoda	271
D.5.7	Implicitní schéma	272
D.5.8	Příklad pokročilejšího numerického schématu	272
D.5.9	Příklady modelování reálných fyzikálních procesů	276
D.6	Paralelizace výpočetních algoritmů	278
Reference		281

Úvod

Protože matematika je nejdůležitějším pracovním nástrojem a zároveň vyjadřovacím jazykem fyziky, patří znalost základních matematických postupů, uváděných v této sbírce, k neodmyslitelné výbavě každého, kdo se chce fyzikou hlouběji zabývat. Souhrnný předmět [Početní praktikum 1](#), [Početní praktikum 2](#) představuje praktický kurz, určený studentům bakalářského studia, bezprostředně navazující na předměty [Základní matematické metody ve fyzice 1](#), [Základní matematické metody ve fyzice 2](#). Smysl početního praktika, jak už samotný název napovídá, spočívá především v praktickém počítání a v detailním procvičování znalostí, získaných ve výše uvedených přednáškách. Předpokladem je zde rovněž úplná a bezpečná znalost všech okruhů středoškolské matematiky, které se zde již nepřipomínají.

Tato sbírka představuje souborný studijní materiál, usnadňující výběr příkladů, souvisejících s danými tématy. Je členěná do dvanácti základních kapitol, řazených pouze zhruba podle časové posloupnosti přednášené problematiky, doplněných třemi přílohami, určenými zájemcům o širší znalost základů některých důležitých okruhů matematiky, potenciálně využitelných v dalším studiu i ve fyzikální praxi. Jednotlivé kapitoly jsou vždy uvedeny stručným teoretickým shrnutím daného tématu, které si neklade za cíl podávat matematicky přesný a vyčerpávající výklad (doplněný větami, důkazy, atd.), nýbrž pokud možno jednoduchým a přehledným způsobem zrekapitulovat hlavní zásady pro praktické počítání příslušného problému. Pokud je někde výklad zjednodušen do té míry, že například opomíjí některé předpoklady nebo některá řešení uvedené rovnice, je to v textu uvedeno. Jádro každé kapitoly tvoří potom soubor příkladů, které v dostatečném rozsahu pokrývají danou problematiku. U každého příkladu je také uvedený výsledek, který podle mého názoru studentům, kteří se s danou látkou teprve seznamují, umožní správnou orientaci při počítání. Odstavce a příklady, využívající pokročilejší matematiku, které jsou primárně určeny pro studenty vyšších ročníků bakalářského studia, jsou označeny ★. Pro jednodušší zacházení je celá sbírka vybavena modře zvýrazněnými hypertextovými odkazy, umožňujícími v elektronické verzi se kliknutím ihned přesunout na odkazované místo a stejně zvýrazněnými odkazy URL, které po kliknutí automaticky otevřou uvedenou webovou stránku.

Ani sebelepší studijní materiál nenahradí vlastní píli a odhodlání těch, kteří o získání znalostí a dovedností usilují, může jim pouze více nebo méně práci usnadnit. Velmi proto uvítám, pokud ti, kteří budou s touto sbírkou pracovat, mně sdělí svoje případné názory, podněty nebo výhrady např. ke srozumitelnosti výkladu nebo obtížnosti příkladů a zároveň mě kdykoli upozorní na jakoukoli nepřesnost nebo nedostatek, který v příkladech nebo v textu odhalí.

Děkuji rovněž Mgr. Lence Czudkové, Ph.D. a Mgr. Pavlu Kočimu, Ph.D. za podnětné rady a cenné připomínky.

Petr Kurfürst

Kapitola 1

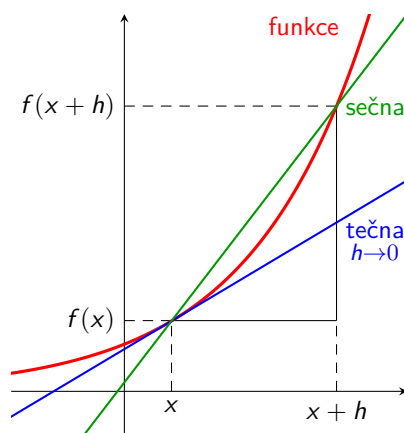
Diferenciální a integrální počet¹

1.1 Derivace funkcí jedné proměnné

- *Derivace* je jedním ze základních pojmů diferenciálního počtu a matematické analýzy vůbec. Pomocí předem definovaného pojmu limita je derivace funkce jedné proměnné definovaná jako (viz obrázek 1.1)

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (1.1)$$

kde $h = \Delta x$ je přírůstek nezávisle proměnné x .



Obrázek 1.1: Schematické vyobrazení geometrického významu derivace funkce jedné proměnné, ilustrující vzorec (1.1). Graf funkce je vyobrazen červenou křivkou. Zelenou barvou je znázorněna sečna této funkce, procházející body $[x, f(x)]$ a $[x+h, f(x+h)]$, jejíž směrnice (tangens úhlu, který tato sečna svírá s vodorovnou osou x) je dána podílem $[f(x+h) - f(x)]/h$. Budeme-li h zmenšovat, bude se druhý průsečík sečny s danou funkcí přibližovat prvnímu, až pro $h \rightarrow 0$ se sečna stane (modře vyznačenou) tečnou, jejíž směrnice (derivace dané funkce $f(x)$ v bodě x) je dána vzorcem (1.1).

Pokud bychom tedy chtěli vyjádřit derivace elementárních funkcí přímo z definice (1.1), můžeme například v případě mocninné funkce s přirozeným exponentem, $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, psát

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \dots - x^n}{h} = nx^{n-1}, \quad (1.2)$$

¹Doporučená literatura k této kapitole: Jarník (1974), Jarník (1984), Děmidovič (2003), Kvasnica (2004), Bartsch (2008), Rektorys (2009), Zemánek & Hasil (2012).

kde výraz s tečkami pokrývá členy s vyššími mocninami h . Obdobně můžeme derivaci exponenciální funkce $y = e^x$ definovat jako

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x+h)} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \quad (1.3)$$

a derivaci goniometrické funkce $y = \sin x$ (s použitím relace $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$ a věty o limitě součinu funkcí: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$) jako

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x. \quad (1.4)$$

Derivaci mocninné funkce s reálným exponentem, $y = x^n$, $n \in \mathbb{R}$, můžeme definovat pomocí derivace exponenciály (1.3) a pravidla pro derivování složené funkce (1.31),

$$y' = (x^n)' = \left(e^{n \ln x}\right)' = x^n \frac{n}{x} = nx^{n-1}. \quad (1.5)$$

Derivace elementárních *inverzních* funkcí lze snadno definovat pomocí derivací jejich původních vzorů, například pro funkci $y = \ln x$ platí $e^y = x$ a tedy $e^y y' = 1$, nebo pro funkci $y = \arcsin x$ platí $\sin y = x$ a tedy $\cos y y' = 1$. Pro tyto dva případy tak postupně dostáváme

$$y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (1.6)$$

Některým z uvedených způsobů můžeme definovat i derivace ostatních elementárních funkcí jedné proměnné.

- Následující výčet shrnuje derivace elementárních funkcí jedné proměnné:

$$(Cx^n)' = Cnx^{n-1}, \text{ kde } C \in \mathbb{R} \text{ je konstanta, } n \in \mathbb{R} \text{ je konstanta,} \quad (1.7)$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (1.8)$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = a^x \ln a, \text{ kde } a > 0 \text{ je konstanta,} \quad (1.9)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0, \quad (1.10)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0, \text{ kde } a > 0, a \neq 1 \text{ je konstanta,} \quad (1.11)$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (1.12)$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (1.13)$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.14)$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.15)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad (1.16)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad (1.17)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (1.18)$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (1.19)$$

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x, \quad (1.20)$$

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (1.21)$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x, \quad (1.22)$$

$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x, \quad x \neq 0. \quad (1.23)$$

Z rovnice (1.20) lze odvodit následující identity pro hyperbolometrické funkce (funkce inverzní k hyperbolickým funkcím):

$$\operatorname{argsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad \text{a tedy} \quad (\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad (1.24)$$

$$\operatorname{argcosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad \text{a tedy} \quad (\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1, \quad (1.25)$$

$$\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad \text{a tedy} \quad (\operatorname{argtanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad -1 < x < 1 \quad (1.26)$$

$$\operatorname{argcoth} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad \text{a tedy} \quad (\operatorname{argcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1. \quad (1.27)$$

- Pravidla pro derivování součtu, součinu a podílu funkcí jedné proměnné:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad \text{pro libovolné funkce } f \text{ a } g \text{ a konstanty } \alpha \text{ a } \beta, \quad (1.28)$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{pro libovolné funkce } f \text{ a } g, \quad (1.29)$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \left[f \left(\frac{1}{g} \right) \right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{pro libovolné funkce } f \text{ a } g, \quad g \neq 0. \quad (1.30)$$

- Pravidlo pro derivování složené funkce $f(\phi(x))$, kde f je vnější a ϕ je vnitřní funkce proměnné x (tzv. řetězové pravidlo pro derivace):

$$[f(\phi)]' = \frac{df}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} = \frac{df}{d\phi} \phi'. \quad (1.31)$$

Důkazy pro uvedená pravidla (1.28) - (1.31) lze provést poměrně jednoduše pomocí definice derivace (1.1), zájemce o hlubší porozumění uvedeným principům odkazují na níže uvedenou odbornou literaturu.

- Pro hlubší prostudování nejen diferenciálního a integrálního počtu, ale širší matematické analýzy, pokrývající významnou část látky obsažené v tomto skriptu, doporučuji zejména sbírku [Děmidovič \(2003\)](#).

Pro budoucí praktické počítání (a to nejen derivací, ale víceméně ve všech oblastech matematiky), případně pro kontrolu správnosti mechanických výpočtů, lze využít analytické programové balíčky, například Wolfram Alpha: Computational Knowledge Engine <https://www.wolframalpha.com/>, jehož základní aplikace jsou volně dostupné, velmi pokročilý je také program Sage (SageMath) <http://www.sagemath.org/>, atd. V žádném případě to ovšem nenahrazuje vlastní dovednosti, pouze je doplňuje a pomáhá rychle a bezchybně zvládat, zjednodušovat a kontrolovat i velmi rozsáhlé, na mechanické počítání pracné výrazy.

• **Příklady:**

Vypočítejte derivace uvedených funkcí a výsledky zjednodušte. V případě, že D_f je pouze podmnožinou \mathbb{R} , určete průnik definičních oborů zadaných i vypočítaných funkcí. **Výsledek je u každého příkladu uveden červenou barvou.**

$$1.1 \quad (2 - x^2)(1 - x^2 + x^3) \qquad -6x + 6x^2 + 4x^3 - 5x^4$$

$$1.2 \quad \frac{1 - x}{1 + x} \qquad -\frac{2}{(1 + x)^2}$$

$$1.3 \quad (5x^2 + 1)^3 \qquad 30x(5x^2 + 1)^2$$

$$1.4 \quad \sin(x^2 + 2x) \qquad \cos(x^2 + 2x)(2x + 2)$$

$$1.5 \quad \frac{\sin x}{1 - \cos x} \qquad \frac{1}{\cos x - 1}$$

$$1.6 \quad 6e^{2x} + 10x^2 \ln x \qquad 12e^{2x} + 10x(2 \ln x + 1)$$

$$1.7 \quad \frac{3e^x}{5e^{3x} + 1} \qquad \frac{3(e^x - 10e^{4x})}{(5e^{3x} + 1)^2}$$

$$1.8 \quad \ln(1 - 7x)^3 \qquad \frac{21}{7x - 1}$$

$$1.9 \quad 3 \log_7[(x^2 + 1)^3] \qquad \frac{18x}{(x^2 + 1) \ln 7}$$

$$1.10 \quad \ln \left[\sin(3x^2) \sqrt{x^2 + 1} \right] \qquad 6x \cotg(3x^2) + \frac{x}{x^2 + 1}$$

1.11 Součet dvou neznámých čísel je 12. Nalezněte taková dvě čísla

(a) aby součet jejich druhých mocnin byl minimální,

(b) aby součin jednoho čísla s druhou mocninou druhého čísla byl maximální.

(a) 6; 6

(b) 4; 8

1.12 Nalezněte takové kladné číslo, pro něž je součet šestnáctinásobku tohoto čísla a převrácené hodnoty druhé mocniny tohoto čísla minimální.

$$\frac{1}{2}$$

1.13 Jak vysoko vyletí barevná světlice, vystřelená ze země svisle vzhůru počáteční rychlostí $v_0 = 40 \text{ m s}^{-1}$ (odpor vzduchu a jiné vedlejší vlivy zanedbejte) ? Za jak dlouho této maximální výšky dosáhne ? Pro jednoduchost uvažujte hodnotu gravitačního zrychlení $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

80 m, 4 s

1.14 Jakou počáteční rychlostí musí být vystřelená stejná světlice, pokud má dosáhnout stejné výšky jako v příkladu 1.13 při elevačním úhlu výstřelu $\alpha = 45^\circ$? Za jak dlouho dosáhne

maximální výšky v tomto případě? Jak daleko od místa výstřelu světlice dopadne na zem? Uvažujte vodorovný terén a hodnotu gravitačního zrychlení $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

$$v_0 \approx 57 \text{ m s}^{-1}, 4 \text{ s, cca } 325 \text{ m}$$

- 1.15 Určete rozměry bazénu s požadovaným objemem 972 m^3 a s požadovaným poměrem délek stran $a : b = 1 : 2$ (jeho hloubku označíme h), pokud chceme minimalizovat plochu obkladu jeho stěn a dna.

$$a = 9 \text{ m}, b = 18 \text{ m}, h = 6 \text{ m}$$

- 1.16 Ocelová válcová nádrž má objem 64 m^3 . Nalezněte její rozměry (poloměr podstavy R a výšku H), při nichž bude spotřeba oceli na její výrobu minimální.

$$R = \frac{4}{\sqrt[3]{2\pi}} \text{ m}, H = \frac{8}{\sqrt[3]{2\pi}} \text{ m}$$

- 1.17 Farmář chce oplotit svoje obdélníkové pole tak, že je oplotí po obvodu a ještě je plotem, vedoucím rovnoběžně s jednou stranou, rozdělí na dvě poloviny. Jakou maximální plochu takto oplotí, pokud má k dispozici 1200 m plotového drátěného pletiva?

$$300 \text{ m} \times 200 \text{ m} = 60\,000 \text{ m}^2.$$

- 1.18 Při silném kašli se profil průdušnice zúží, aby se docílilo vyšší rychlosti exhalovaného vzduchu. Jaké je optimální zmenšení poloměru průdušnice, aby rychlost byla maximální? Vzorec, udávající vztah mezi rychlostí exhalace v a momentálním poloměrem průdušnice r , má tvar $v = c(r_0 - r)r^2$, kde c je kladná konstanta (související s délkou průdušnice) a r_0 je poloměr průdušnice v klidu.

$$r = \frac{2}{3}r_0$$

- 1.19 Socha Svobody, stojící na Ostrově svobody u New Yorku v USA, je i s podstavcem vysoká 93 m , přičemž výška vlastní měděné sochy je 46 m . Z jaké vzdálenosti musím monument fotografovat, pokud chci aby vlastní socha na fotografii zabírala maximální možný zorný úhel (výšku lidského oka, resp. fotoaparátu nad zemí, případně nad mořskou hladinou, zanedbejte)? Jaký bude potom poměr úhlů φ_S , který bude na fotografii zabírat vlastní socha a φ_M , který bude zabírat celý monument?

$$\text{ze vzdálenosti } D \approx 66 \text{ m, poměr } \varphi_S/\varphi_M \approx 0,35 \text{ (poměr bude růst se vzdáleností)}$$

- 1.20 Určete rozměry (poloměr podstavy R a výšku H) kužele s minimálním objemem, opsaného kouli s daným poloměrem r .

$$R = \sqrt{2}r, H = 4r$$

$$1.21 \quad \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$$

$$\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$1.22 \quad \frac{1}{\sin 2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \ln \frac{1+x \cos 2}{1-x \cos 2} \cotg 2$$

$$\frac{2 \sin 2}{(1-x^2)(1-x^2 \cos^2 2)}, x \in (-1, 1)$$

$$1.23 \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)}$$

$$-\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$$

- 1.24 $\sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$ $-\sin 2x \cdot \cos(\cos 2x)$
- 1.25 $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ $\frac{1 + \sqrt{x} (2 + 4\sqrt{x + \sqrt{x}})}{8\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}, x > 0$
- 1.26 $x(\sin \ln x - \cos \ln x)$ $2 \sin \ln x, x > 0$
- 1.27 $\sqrt{1 + x^2} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$ $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}, x \neq 0$
- 1.28 $\frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$ $-\frac{\arccos x}{x^2}, x \in \langle -1, 1 \rangle, x \neq 0$
- 1.29 x^{x^x} $x^{x^x} [x^{x-1} + x^x \ln x (\ln x + 1)], x > 0$
- 1.30 $x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arccotg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$ $\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}, x > 0$
- 1.31 $x^{\sin^2 x}$ $x^{\sin^2 x} \left(\frac{\sin^2 x}{x} + 2 \sin x \cos x \ln x \right), x > 0$
- 1.32 $x \arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ $\arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{2x}{x^2 + 1}$
- 1.33 $5^{x \log_{10} x}$ $5^{x \log x} \ln 5 \left(\log x + \frac{1}{\ln 10} \right), x > 0$
- 1.34 $\log_7 \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ $\frac{1}{(x+1) \ln 7}, x > -1$
- 1.35 $x - \ln \sqrt{1 + e^{2x}} + e^{-x} \operatorname{arctg} e^x$ $\frac{2e^x - (1 + e^{2x}) \operatorname{arctg} e^x}{e^{3x} + e^x}$
- 1.36 $x^{\sin x} + \ln \cos \sqrt{e^x + 1}$
 $x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) - \frac{e^x \operatorname{tg} \sqrt{e^x + 1}}{2\sqrt{e^x + 1}}, x > 0$
- 1.37 $x \ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) - 2\sqrt{1 + x^2} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + 2x$
 $\ln^2(x + \sqrt{1 + x^2})$
- 1.38 $\frac{1 + x^2}{\sqrt[3]{x^4} \sin^7 x}$
 $\frac{\frac{2}{3}(x^2 - 2) \sin x - 7x(x^2 + 1) \cos x}{\sqrt[3]{x^7} \sin^8 x}, x \neq 0$
- 1.39 $f'(2\pi)$ funkce $f(x) = x^2(\cos x)^{-\sin x}$.
 $f'(2\pi) = (\cos x)^{-\sin x} \left\{ 2x + x^2 \left[\frac{\sin^2 x}{\cos x} - \cos x \ln(\cos x) \right] \right\} \Big|_{2\pi} = 4\pi, x \in (4k-1, 4k+1) \frac{\pi}{2},$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$1.40 \quad x^{\ln(\sin x)} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$x^{\ln(\sin x)} \left[\frac{\ln(\sin x) + x \ln x \cotg x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \right], \quad x > 0 \wedge x \in (2k, 2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$1.41 \quad x^{\sin(\ln x)} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$x^{\sin(\ln x)} \frac{(x^2+1) [\sin(\ln x) + \ln x \cos(\ln x)] - 1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}, \quad x > 0$$

$$1.42 \quad e^{ax \cos x} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{ax^2+b^2}}, \quad \text{kde } a, b \text{ jsou kladné konstanty.}$$

$$e^{ax \cos x} \left[\frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{ax^2+b^2}} \left(a \cos x - ax \sin x - \frac{ax}{ax^2+b^2} \right) + \frac{ab \cos bx + b^2 \sin bx}{\sqrt{ax^2+b^2}} \right]$$

$$1.43 \quad x^{ax \sin x} \frac{a \sin \sqrt{bx} - b \cos \sqrt{bx}}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \text{kde } a, b \text{ jsou kladné konstanty.}$$

$$\frac{\sqrt{b} \cos \sqrt{bx}}{\sqrt{a^2+b^2}} x^{ax \sin x} \left[\frac{a \sin x}{\sqrt{b}} (1 + \ln x + x \ln x \cotg x) (a \operatorname{tg} \sqrt{bx} - b) + \frac{a + b \operatorname{tg} \sqrt{bx}}{2\sqrt{x}} \right],$$

$$x > 0. \text{ Proč není nutná podmínka } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} ?$$

$$1.44 \quad (ax \sin x)^{\frac{b \sin x}{x}}, \quad \text{kde } a, b \text{ jsou kladné konstanty.}$$

$$b (ax \sin x)^{\frac{b \sin x}{x}} \left[\frac{\sin x + x \cos x}{x^2} + \ln(ax \sin x) \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) \right],$$

$$x > 0 \wedge x \in (2k, 2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x < 0 \wedge x \in (2k-1, 2k)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$1.45 \quad (ax e^x)^{\frac{b \ln x}{x^2}}, \quad \text{kde } a, b \text{ jsou kladné konstanty.}$$

$$\frac{b}{x^3} (ax e^x)^{\frac{b \ln x}{x^2}} [(1+x) \ln x + \ln(ax e^x) (1-2 \ln x)], \quad x > 0$$

$$1.46 \quad (x e^x)^{\frac{a}{x \ln x}}, \quad \text{kde } a \text{ je kladná konstanta.}$$

$$-\frac{a(x+\ln^2 x)}{x^2 \ln^2 x} e^{\frac{a(x+\ln x)}{x \ln x}}, \quad x > 0, \quad x \neq 1.$$

1.2 Neurčité integrály funkcí jedné proměnné

- *Neurčitým integrálem* nazýváme nekonečně velkou množinu funkcí, tvořenou součtem libovolné reálné konstanty C s tzv. *primitivní funkcí* $F(x)$ k dané původní funkci $f(x)$, pro niž platí $F'(x) = f(x)$. V případě funkce jedné proměnné lze psát

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1.32)$$

Integrace je tedy inverzním procesem k derivování, neurčité integrály (anglicky také *anti-derivatives*) některých elementárních funkcí můžeme vyčíslit přímo z rovnic (1.7) - (1.27).

- Následující výčet shrnuje neurčité integrály elementárních funkcí jedné proměnné²:

$$\int C_1 x^n dx = C_1 \frac{x^{n+1}}{n+1} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \text{jsou konstanty,} \quad (1.33)$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ je konstanta,} \quad (1.34)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \text{ je konstanta,} \quad (1.35)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C_1 = \ln(C_2|x|), \quad x \neq 0, \quad C_2 > 0, \quad C_1 = \ln C_2, \quad (1.36)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad (1.37)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad (1.38)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.39)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.40)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2, \quad -1 < x < 1, \quad (1.41)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arccotg} x + C_2, \quad (1.42)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C, \quad (1.43)$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C, \quad (1.44)$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + C, \quad (1.45)$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\operatorname{coth} x + C, \quad x \neq 0, \quad (1.46)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C = \operatorname{argsinh} x + C, \quad (1.47)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C = \operatorname{argcosh} x + C, \quad x > 1, \quad (1.48)$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C = \operatorname{argtanh} x + C, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C = \operatorname{argcoth} x + C, & |x| > 1, \end{cases} \quad (1.49)$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \quad (1.50)$$

- Součin dvou funkcí $u(x)$ a $v'(x)$ nezávisle proměnné x můžeme integrovat metodou *per par-*

²neurčité integrály jsou vyčerpávajícím způsobem tabelovány například v [Bartsch \(2008\)](#), [Rektorys \(2009\)](#).

tes, která je integrálem rovnice (1.29):

$$uv = \int (uv)' dx = \int (u'v + uv') dx \quad \text{a tedy} \quad \int uv' dx = uv - \int u'v dx. \quad (1.51)$$

- *Substituční metodou* můžeme integrovat složenou funkci (viz rovnice (1.31)), kdy vnitřní funkci lze nahradit novou proměnnou, anebo můžeme integrovat jednoduchou funkci, kdy nezávisle proměnnou nahrazujeme novou vnitřní funkcí:

- Substituční metodu 1. typu lze použít při integraci složené funkce $f[\phi(x)]$ nezávisle proměnné x ve tvaru

$$\int f[\phi(x)]\phi'(x) dx = \int f(z) dz = F(z) + C = F[\phi(x)] + C, \quad (1.52)$$

kde můžeme nahradit (substituovat) vnitřní funkci novou proměnnou: $\phi(x) = z$, $\phi'(x) dx = dz$. Substituční metodou 1. typu je i univerzální substituce $\text{tg}(x/2) = z$, pomocí které lze libovolnou goniometrickou funkci převést na funkci racionální.

- Substituční metodu 2. typu lze použít při integraci jednoduché funkce $f(x)$ nezávisle proměnné x způsobem

$$\int f(x) dx = \int f[\phi(z)]\phi'(z) dz = F(z) + C = F[\phi^{-1}(x)] + C, \quad (1.53)$$

kde můžeme nahradit původní proměnnou novou vnitřní funkcí nové proměnné: $x = \phi(z)$, $dx = \phi'(z) dz$ a kde výraz ϕ^{-1} znamená inverzní funkci k ϕ . Typickým příkladem této metody je substituce $x = \sin z$, pomocí níž lze iracionální funkce typu $\sqrt{1-x^2} dx$ anebo $dx/\sqrt{1-x^2}$ v integrandu nahradit v prvním případě goniometrickou funkcí $\cos^2 z dz$, ve druhém případě pouze dz .

- Racionální funkci ve tvaru

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0}{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0}, \quad (1.54)$$

kde $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ jsou polynomy stupně m a n (kdy $m \geq n$), lze rozložit na součet polynomu a ryze racionální funkce (kdy $m < n$). Racionální funkci lze vyjádřit buď jako součet parciálních zlomků, nebo, v případě kdy např. $f(x) = 1/Q_2(x)$, kde $Q_2(x)$ je polynom 2. stupně dále nerozložitelný v \mathbb{R} , provedeme úpravu (tzv. doplnění na čtverec) $b_2x^2 + b_1x + b_0 = [\sqrt{b_2}x + b_1/(2\sqrt{b_2})]^2 + b_0 - b_1^2/(4b_2)$, vedoucí na integrál ve tvaru rovnice (1.42).

- Obdobným způsobem můžeme řešit integrály iracionálních funkcí typu $f(x) = 1/\sqrt{Q_2(x)}$, kde $Q_2(x)$ je polynom 2. stupně, jehož doplnění na čtverec vede na integrály ve tvaru rovnic (1.41), (1.47) nebo (1.48). Vyčerpávajícím způsobem jsou metody analytických výpočtů neurčitých integrálů funkcí všech typů tabelovány např. ve sbornících: [Bartsch \(2008\)](#), [Rektorys \(2009\)](#), atd.

- **Příklady:**

$$1.47 \quad \int (4x^3 - 6x^2 + 8x - 1) dx \quad x(x^3 - 2x^2 + 4x - 1) + C$$

- 1.48 $\int (x^{-4} + x^{-3} + x^{-2} + x^{-1}) dx = -\frac{1}{x} \left(\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2x} + 1 \right) + \ln|x| + C, x \neq 0$
- 1.49 $\int [(\sqrt{x} - 1)^2 - x]^2 dx = x \left(1 - \frac{8}{3}\sqrt{x} + 2x \right) + C, x \geq 0$
- 1.50 $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x} dx = \sqrt{x} \left(\frac{2}{3}x - 3\sqrt{x} + 6 \right) - \ln|x| + C, x > 0$
- 1.51 $\int (\sin^2 x - 3 \cos^2 x) dx = -(x + \sin 2x) + C$
- 1.52 $\int (4^{2x} - e^{-x}) dx = \frac{4^{2x}}{4 \ln 2} + e^{-x} + C$
- 1.53 $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$
- 1.54 $\int 4x\sqrt{7 - 2x^2} dx = -\frac{2}{3} (7 - 2x^2)^{3/2} + C, |x| \leq \sqrt{\frac{7}{2}}$
- 1.55 $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| + C, x > 0, x \neq 1$
- 1.56 $\int \frac{1 - \ln^2(ax)}{3x} dx$, kde a je kladná konstanta
 $\frac{\ln(ax)}{3} \left[1 - \frac{\ln^2(ax)}{3} \right] + C, x > 1$
- 1.57 $\int (\cotg x - \operatorname{tg} x) dx = \ln \left(\frac{\sin 2x}{2} \right) + C, x \in \left(k, k + \frac{1}{2} \right) \pi, k \in \mathbb{Z}$
- 1.58 $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = -\sin \frac{1}{x} + C, x \neq 0$
- 1.59 $\int x^2 \sin x dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C$
- 1.60 $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C, x > 0$
- 1.61 $\int (x^3 + 1) e^{-3x} dx = -\frac{e^{-3x}}{3} \left(x^3 + x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9} \right) + C$
- 1.62 $\int e^{2x} \sin x dx = \frac{e^{2x}}{5} (2 \sin x - \cos x) + C$
- 1.63 $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} (\ln x + 1) + C, x > 0$
- 1.64 $\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C, x > 0$

- 1.65 $\int \frac{x^4}{x^2 - 3} dx$ $\frac{x^3}{3} + 3x + \frac{3\sqrt{3}}{2} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \right| + C, x \neq \pm\sqrt{3}$
- 1.66 $\int \frac{3x - 4}{x^2 - 4} dx$ $\ln [(x + 2)^{5/2} \sqrt{x - 2}] + C, x > 2$
- 1.67 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^6}} dx$ $\frac{1}{3} \arcsin(x^3) + C, x \in (-1, 1)$
- 1.68 $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{4x - 3}{5}\right) + C, x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$
- 1.69 $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 3}$ $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x + 3}{\sqrt{3}}\right) + C$
- 1.70 $\int (-x^2 + x) e^{3x} dx$ $\left(-\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{9} - \frac{5}{27}\right) e^{3x} + C$
- 1.71 $\int \frac{1 + x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$ $\sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$
- 1.72 $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2 + x^2}}\right) dx$ $\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + \operatorname{argsinh} \frac{x}{\sqrt{2}} + C, |x| < \sqrt{2}$
- 1.73 $\int \frac{dx}{\sin x}$ $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 1.74 $\int \operatorname{tg}^3 x dx$ $\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\cos x| + C, x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- 1.75 $\int \frac{\sin x}{2 + \sin x} dx$ $x - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}\right) + C, x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- 1.76 $\int \frac{1 + \cos x}{\sin^3 x} dx$ $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1 + \cos x}{2 \sin^2 x} \right| + C, x \in (2k, 2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 1.77 $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$ $\ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, x \neq (4k + 2, 4k + 3)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- 1.78 $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x - 1} dx$ $x \operatorname{arctg} \sqrt{2x - 1} - \frac{\sqrt{2x - 1}}{2} + C, x \geq \frac{1}{2}$
- 1.79 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ $-2 \operatorname{cotg}(2x) + C, x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- 1.80 $\int \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}$ $\frac{x}{4\sqrt{4 - x^2}} + C, |x| < 2$
- 1.81 $\int \ln(x^2 + 1) dx$ $x \ln(x^2 + 1) + 2 \operatorname{arctg} x - 2x + C$
- 1.82 $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$ $\frac{3}{7} (\sqrt[4]{x} + 1)^{4/3} (4\sqrt[4]{x} - 3) + C, x > 0$

$$1.83 \int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1} dx \quad 2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{2}} + C, \quad x \geq 1$$

$$1.84 \int \frac{\sqrt[4]{x-1}}{x+1} dx \\ 4\sqrt[4]{x-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \ln \frac{\sqrt{2(x-1)} - 2\sqrt[4]{2(x-1)} + 2}{\sqrt{2(x-1)} + 2\sqrt[4]{2(x-1)} + 2} + 2^{3/4} \operatorname{arctg} [1 - \sqrt[4]{2(x-1)}] - \\ 2^{3/4} \operatorname{arctg} [1 + \sqrt[4]{2(x-1)}] + C, \quad x \geq 1$$

$$1.85 \int \frac{x}{x^3-1} dx \quad \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C, \quad x \neq 1$$

$$1.86 \quad (a) \int \frac{dx}{(x^3-1)^2}, \quad (b) \int \frac{dx}{\sin^4 x}, \quad (c) \int \frac{dx}{\cos^6 x} \\ (a) \frac{1}{9} \left[\ln \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \frac{6}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{3x}{x^3-1} \right] + C, \quad x \neq 1 \\ (b) -\operatorname{cotg} x \left(1 + \frac{\operatorname{cotg}^2 x}{3} \right) + C, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ (c) \operatorname{tg} x + \frac{2 \operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

1.3 Určité integrály funkcí jedné proměnné

Určitý integrál funkce $f(x)$ spojitě na intervalu $a \leq x \leq b$, je definován předpisem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (1.55)$$

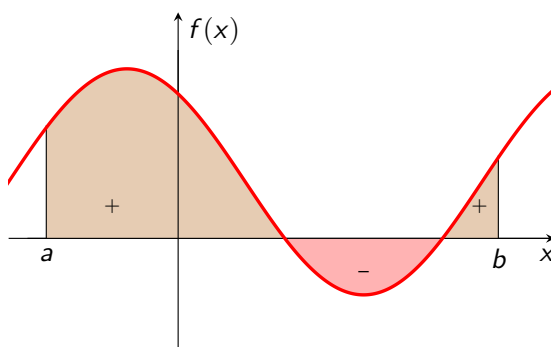
kde $F(a)$, $F(b)$ jsou funkční hodnoty primitivní funkce $F(x)$ v bodech $x = a$, $x = b$. Geometrický význam určitého integrálu funkce jedné proměnné je dán velikostí celkové plochy v rovině xy , kde $y = f(x)$, která je ohraničená grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Velikosti dílčích ploch nad osou x , tj. kde $f(x) > 0$, přispívají k velikosti celkové plochy, velikosti dílčích ploch pod osou x , kde $f(x) < 0$, se od velikosti celkové plochy odečítají (viz obrázek 1.2).

Zvláštní případ představují tzv. *nevlastní* integrály, jejichž meze jsou buď tvořeny nevlastními čísly ($-\infty$ a/nebo $+\infty$) nebo jsou to integrály funkcí, které jsou uvnitř intervalu $x = a$, $x = b$, nespojitě. V prvním případě platí následující vztahy,

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (1.56)$$

případně jejich kombinace. Pokud uvedené limity existují, považujeme je za hodnoty nevlastního integrálu. Pro funkci $f(x)$ nespojitou například v bodě $h \in (a, b)$, kdy $\lim_{x \rightarrow h} f(x) = \pm\infty$ (může jít o limitu zprava, zleva, nebo oboustrannou), definujeme její integrál (kde číslo $\epsilon > 0$) jako

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{h-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{h+\epsilon}^b f(x) dx, \quad (1.57)$$



Obrázek 1.2: Schematické vyobrazení geometrického významu určitého integrálu funkce $f(x)$ jedné proměnné, ilustrující vzorec (1.55) a předchozí výklad. Graf funkce je vyobrazen červenou křivkou. Dílčí plochy, které přispívají k velikosti celkové plochy (kde $f(x) > 0$), dané integrálem (1.55), jsou vyznačené okrovou (hnědou) barvou, dílčí plocha, která se od velikosti celkové plochy odečte (kde $f(x) < 0$), je vyznačená červeně.

opět s tím, že pokud uvedené limity existují, považujeme je za hodnoty integrálu nespojitě funkce (výpočtu integrálu podle vzorce (1.57) se také říká určení *hlavní hodnoty* integrálu, například určitý integrál funkce $f(x) = 1/x$ se singularitou v bodě $x = 0$, v mezích $a = -1, b = 1$, bude takto roven nule).

• **Příklady:**

$$1.87 \int_{-3}^3 (x^2 + x - 3) dx$$

0

$$1.88 \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$$

 $\frac{1}{2}$

$$1.89 \text{ (a) } \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx, \text{ (b) } \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx$$

(a) $\frac{\pi}{4}$, (b) $\frac{\pi - 2}{8}$

$$1.90 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

 π

$$1.91 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

 π

$$1.92 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx$$

 $\frac{\pi}{3}$

$$1.93 \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$$

 $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$1.94 \text{ (a) } \int_1^2 x \ln x dx, \text{ (b) } \int_0^1 x \ln x dx$$

(a) $\ln 4 - \frac{3}{4}$, (b) $-\frac{1}{4}$

$$1.95 \text{ (a) } \int_1^3 x^2 \ln x dx, \text{ (b) } \int_0^1 x^2 \ln x dx$$

(a) $9 \ln 3 - \frac{26}{9}$, (b) $-\frac{1}{9}$

- 1.96 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$ 2
- 1.97 (a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ *, (b) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ * (a) $\sqrt{\pi}$, (b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- 1.98 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ $[x(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x) + \ln(\sin x \cos x)]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$
- 1.99 $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin\left(\frac{x^2}{4}\right) \cos\left(\frac{x^2}{4}\right) dx$ $\left[\sin^2\left(\frac{x^2}{4}\right)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}$
- 1.100 $\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-4x+5} dx$ $[\ln(x^2-4x+5) + 3 \operatorname{arctg}(x-2)]_2^3 = \ln 2 + \frac{3\pi}{4}$
- 1.101 $\int_{-1}^1 \sqrt{4x^2+1} dx$
 $\left[\frac{\ln(\sqrt{4x^2+1}+2x)}{4} + \frac{x\sqrt{4x^2+1}}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{\ln(\sqrt{5}+2)}{2} + \sqrt{5} \approx 2.96$
- 1.102 $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(x \operatorname{tg} x + a) \operatorname{tg} x + 1] dx$, a je konstanta. $\left[x \operatorname{tg} x + (1-a) \ln(\cos x) - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}$
- 1.103 $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x+a) \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 dx$, a je konstanta.
 $\left[x \operatorname{tg} x + \ln(\cos x) - \frac{x^2}{2} + a \operatorname{tg} x - ax\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2a \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$
- 1.104 $\int_0^{\pi/6} \frac{x dx}{(\cos^2 x - \sin^2 x)^2}$ $\left[\frac{x}{2} \operatorname{tg}(2x) + \ln \sqrt[4]{\cos(2x)}\right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2\right)$
- 1.105 $\int_0^1 x \operatorname{arctg}(x^2+1) dx$
 $\left[\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg}(x^2+1) - \ln \sqrt[4]{x^4+2x^2+2}\right]_0^1 = \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln \frac{2}{5}$
- 1.106 $\int_0^1 x^3 \ln(x^2+1) dx$ $\left[\frac{(x^4-1) \ln(x^2+1)}{4} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$

1.4 Jednoduché geometrické a fyzikální aplikace integrace funkce jedné proměnné³

V následujících příkladech je vždy třeba sestavit určitý integrál funkce jedné proměnné. Pokud je v příkladu zadána spojitě proměnná tzv. intenzivní fyzikální veličina (hustota, tlak, hustota

* Integrály v příkladu (1.97) řešíme „doplněním na čtverec“ v kartézském souřadném systému, tj. jejich vynásobením stejným integrálem podle proměnné y , následným převedením do polárních souřadnic a odmocněním.

³Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nejsou uváděny příslušné jednotky.

náboje, atd.), pomocí níž se má na dané oblasti stanovit odpovídající extenzivní veličina (hmotnost, tlaková síla, velikost náboje, ...), výpočet provádíme jako integrál intenzivní veličiny přes tuto oblast. Například hmotnost m kruhové desky o poloměru R s plošnou hustotou $\sigma = \sigma(r)$, kde r je vzdálenost od středu desky, určíme pomocí integrálu

$$m = \int_S \sigma(r) dS = \int_0^R \sigma(r) 2\pi r dr. \quad (1.58)$$

• **Příklady:**

1.107 Spočítejte velikost plochy, ohraničené „zespoda“ parabolou $y = x^2$ a „shora“ křivkou $y = \sqrt{x}$.

$$\frac{1}{3}$$

1.108 Spočítejte velikost plochy, ohraničené „zespoda“ parabolou $y = x^2$ a „shora“ přímkou $y = x/2 + 5$.

$$\frac{243}{16}$$

1.109 Rychlost hmotného bodu v jednorozměrném případě je dána vztahem

$$v = 3t - \frac{18}{(t+1)}.$$

Určete dráhu, kterou projde hmotný bod v časovém intervalu od $t = 0$ do zastavení. Bude hmotný bod v tomto časovém intervalu zrychlovat nebo brzdít (tj. bude se zvyšovat nebo snižovat velikost jeho rychlosti) ?

$s = 6(1 - 3 \ln 3)$, hmotný bod bude brzdít, vektor zrychlení má opačný směr než vektor rychlosti.

1.110 Přehradní hráz je tvořena svislou betonovou zdí tvaru obdélníku, jehož délka je L . Hloubka vodní nádrže je v celé délce hráze přesně H . Jaká je celková tlaková síla, kterou voda působí na hráz ?

$$F_p = \left(\frac{\rho g H}{2} + p_0 \right) LH, \text{ kde } p_0 \text{ je atmosférický tlak na hladině.}$$

1.111 Válcová nádoba o poloměru R a výšce H je zcela naplněna plynem, jehož hustota směrem od osy válce klesá. Pokles hustoty je vyjádřen funkcí

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{r^2}{10}},$$

kde ρ_0 je hustota plynu v ose válce, r je vzdálenost od osy válce.

- Vypočítejte hmotnost plynu v nádobě.
- Vypočítejte celkovou tlakovou sílu, kterou působí plyn na všechny stěny nádoby, pokud tlak $p = a^2 \rho$, kde a je konstantní (izotermická) rychlost zvuku.
- Jaká bude celková hmotnost a celková tlaková síla, pokud by poloměr vzrostl „nade všechny meze“ ($R \rightarrow \infty$) ?

$$(a) \quad m = 10\pi\rho_0 H \left(1 - e^{-\frac{R^2}{10}} \right)$$

$$(b) F_p = 2\pi a^2 \rho_0 \left[10 + e^{-\frac{R^2}{10}} (RH - 10) \right]$$

$$(c) m = 10\pi\rho_0 H, F_p = 20\pi a^2 \rho_0$$

- 1.112 Válcová nádoba o poloměru R a výšce H je zcela vyplněna plynem, jehož tlak směrem vzhůru klesá. Pokles tlaku je vyjádřen funkcí

$$p = p_0 e^{-\frac{h}{20}},$$

kde p_0 je tlak plynu na dně válce, h je svislá vzdálenost ode dna válce. Vypočítejte celkovou sílu, kterou plyn působí na všechny stěny nádoby.

$$F_p = 40p_0\pi R \left(1 - e^{-\frac{H}{20}} \right) + p_0\pi R^2 \left(1 + e^{-\frac{H}{20}} \right)$$

- 1.113 Válcová nádoba o poloměru R a výšce H je zcela vyplněna plynem, jehož tlak směrem od osy válce klesá. Pokles tlaku je vyjádřen funkcí

$$p = \frac{p_0}{1 + \left(\frac{r}{10}\right)^2},$$

kde p_0 je tlak plynu v ose válce, r je vzdálenost od osy válce. Vypočítejte celkovou sílu, kterou plyn působí na všechny stěny nádoby.

$$F_p = 200\pi p_0 \left[\frac{RH}{100 + R^2} + \ln \left(1 + \frac{R^2}{100} \right) \right]$$

- 1.114 Nádoba ve tvaru kvádrů o čtvercovém půdorysu s délkou strany A a výšce H je zcela vyplněna plynem, jehož vertikální pokles tlaku je vyjádřen funkcí

$$p = \frac{p_0}{\frac{h}{10} + 1},$$

kde p_0 je tlak plynu na dně nádoby, h je svislá vzdálenost ode dna nádoby. Vypočítejte celkovou sílu, kterou plyn působí na (všechny) stěny nádoby.

$$F_p = p_0 A \left[2A \frac{H + 5}{H + 10} + 40 \ln \left(\frac{H}{10} + 1 \right) \right]$$

- 1.115 Kruhová deska o poloměru R je elektricky nabitá s plošnou hustotou náboje σ . Vypočítejte celkový elektrický náboj Q desky (velikost náboje by v případě $\sigma = \text{konst.}$ byla dána jejím součinem s velikostí příslušné plochy, $Q = \sigma S$), pokud

$$(a) \sigma = A e^{Br^2},$$

$$(b) \sigma = A \ln(r^2 + B),$$

$$(c) \sigma = A e^{-\frac{r^2}{3}} + Br,$$

$$(d) \sigma = A \ln(3r^2 + B) + Ar,$$

kde A, B jsou kladné konstanty a r je vzdálenost od středu desky.

$$(a) Q = \frac{\pi A}{B} (e^{BR^2} - 1)$$

$$(b) Q = \pi A \{ (R^2 + B)[\ln(R^2 + B) - 1] - B(\ln B - 1) \}$$

$$(c) \quad Q = 3\pi A \left(1 - e^{-\frac{R^2}{3}}\right) + \frac{2}{3}\pi BR^3$$

$$(d) \quad Q = \frac{\pi A}{3} [(3R^2 + B) \ln(3R^2 + B) - B \ln B + 2R^3 - 3R^2]$$

- 1.116 Tenká přímá tyč (zanedbatelného průřezu) o délce L je kladně nabitá s homogenní délkovou nábojovou hustotou τ . Koncové body tyče se nacházejí v bodech $[0, 0, 0]$, $[L, 0, 0]$. Určete elektrostatický potenciál ϕ buzený nábojem tyče a vektor intenzity elektrického pole v bodě $P = [-D, 0, 0]$, $D > 0$ (v případě bodového náboje Q je elektrostatický potenciál $\phi = Q/(4\pi\epsilon r)$ a velikost intenzity elektrického pole je určena jako $E = Q/(4\pi\epsilon r^2)$, kde konstanta ϵ je tzv. permitivita a r je vzdálenost náboje od daného bodu P). Výsledek vyjádřete pomocí celkového náboje Q tyče.

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon L} \ln\left(\frac{L+D}{D}\right), \quad \vec{E} = \left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon D(L+D)}, 0, 0\right).$$

- 1.117 Tenká přímá tyč (zanedbatelného průřezu) o délce L je kladně nabitá s homogenní délkovou nábojovou hustotou τ . Koncové body tyče se nacházejí v bodech $[0, 0, 0]$, $[L, 0, 0]$. Určete elektrostatický potenciál ϕ buzený nábojem tyče v bodě $P = [0, D, 0]$, $D > 0$.

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon L} \ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 + D^2}}{D}\right)$$

- 1.118 Pro stejný případ tyče z příkladu 1.117 určete složky E_x a E_y vektoru intenzity elektrického pole v bodě $P = [0, D, 0]$, $D > 0$.

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon L} \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + D^2}} - \frac{1}{D}\right), \quad E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon D\sqrt{L^2 + D^2}}.$$

- 1.119 Pro stejný případ tyče z příkladu 1.117 určete elektrostatický potenciál ϕ a složky E_x a E_y vektoru intenzity elektrického pole v bodě $P = [L/2, D, 0]$, $D > 0$.

$$\phi = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 + 4D^2}}{2D}\right), \quad E_x = 0, \quad E_y = \frac{Q}{2\pi\epsilon D\sqrt{L^2 + 4D^2}}.$$

- 1.120 Tenká oblouková tyč zanedbatelného průřezu s konstantním poloměrem R je kladně nabitá s homogenní délkovou nábojovou hustotou τ . Koncové body tyče se nacházejí (v polárních souřadnicích) v bodech $[R, 4\pi/3, 0]$, $[R, 5\pi/3, 0]$. Určete elektrostatický potenciál ϕ a složky E_x a E_y vektoru intenzity elektrického pole buzené nábojem tyče v bodě $P = [0, 0, 0]$. Výsledek vyjádřete pomocí délkové hustoty τ i pomocí celkového náboje Q tyče.

$$\phi = \frac{\tau}{12\epsilon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \quad E_x = 0, \quad E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon R} = \frac{3Q}{4\pi^2\epsilon R^2}.$$

- 1.121 Předpokládejme hypotetické homogenní ($\rho = \text{konst.}$) kulové astronomické těleso o poloměru R . Gravitační potenciální energie libovolné vnitřní kulové slupky o poloměru $r \in (0, R)$ je mgr , kde m je hmotnost kulové slupky a $g = GM_r/r^2$ je velikost gravitačního zrychlení v místě slupky ($G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ je gravitační konstanta). Veličina M_r značí hmotnost koule o poloměru r . Jak velká bude celková gravitační potenciální energie homogenní koule o poloměru R ? Výsledek vyjádřete pomocí hmotnosti celé koule M a jejího poloměru R .

$$E_p = \frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}$$

Kapitola 2

Základy vektorové a tenzorové algebry¹

2.1 Vektory a matice

- **Vektorový počet:**

Základní operace s vektory lze (v ortonormálních bázích - viz odstavec 2.2) stručně zapsat následujícím způsobem:

- *Norma* (velikost) vektoru \vec{a} je definovaná (v \mathbb{R}^3) jako

$$\|\vec{a}\| = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2} = \left(\sum_i a_i^2 \right)^{1/2}, \quad (2.1)$$

kde poslední forma zápisu předpokládá, že index i postupně „běží“ přes všechny složky 1, 2, 3, respektive x, y, z vektoru \vec{a} . Tato konvence pro tzv. *volné indexy* umožňuje podstatně stručnější zápis operací s vektory a maticemi (v této kapitole zatím pro jednoduchost nezavádíme tzv. *kovariantní* formu zápisu s horními a dolními indexy).

- *Vektorový součet* dvou vektorů \vec{a} a \vec{b} , jehož explicitní forma zápisu (v \mathbb{R}^3) je

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) = (c_1, c_2, c_3), \quad (2.2)$$

lze pomocí uvedené konvence s použitím volného indexu i zapsat jako

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = a_i \vec{e}_i + b_i \vec{e}_i = c_i \vec{e}_i, \quad \text{se složkami } a_i + b_i = c_i \text{ (vektor)}, \quad (2.3)$$

kde \vec{e}_i jsou vektory báze (podrobněji viz odstavec 2.2).

- *Skalární součin* dvou vektorů \vec{a} a \vec{b} má tvar

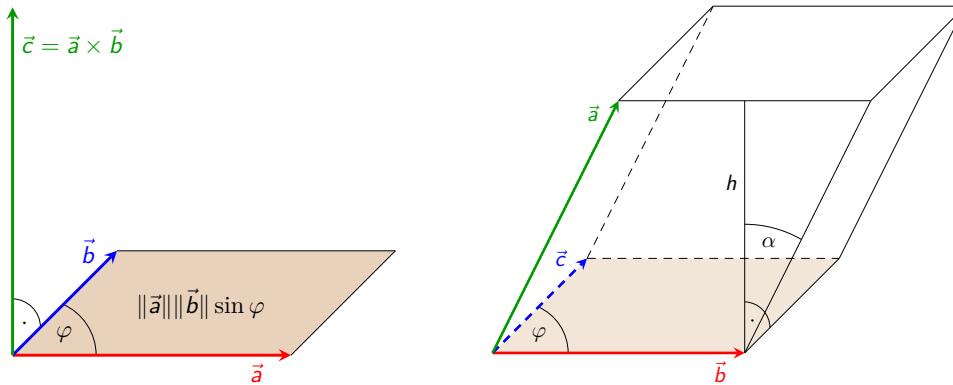
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i = \alpha \text{ (skalár)}, \quad (2.4)$$

kde indexy i, j opět „běží“ přes všechny složky obou vektorů a kde symbol δ_{ij} (tzv. *Kroneckerovo delta* - podrobněji viz odstavec 2.3) nabývá hodnot $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. Navíc je zde zavedena tzv. *Einsteinova sčítací* (sumační) *konvence*, která říká, že pokud se některý index v některém členu vektorové rovnice opakuje dvakrát (tzv. *sčítací index*), členy s tímto indexem sčítáme a sumační symbol \sum je tak možné vynechat. Geometrický význam skalárního součinu lze zapsat jako

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi, \quad (2.5)$$

kde φ je úhel svíraný oběma vektory ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

¹Doporučená literatura k této kapitole: Proskuryakov (1978), Young (1993), Kvasnica (2004), Arfken & Weber (2005), Musilová & Musilová (2006).



Obrázek 2.1: *Levý obrázek:* Schematické vyobrazení geometrického významu vektorového součinu, ilustrující vzorce (2.6) - (2.7). Vektor \vec{c} , který je vektorovým součinem vektorů \vec{a} a \vec{b} , je kolmý na rovinu jimi vymezenou a jeho orientace je dána pravidlem pravé ruky. Barevně zvýrazněná plocha vyznačuje rovnoběžník, definovaný vektory \vec{a} a \vec{b} , jehož velikost je rovna velikosti vektoru \vec{c} . *Právní obrázek:* Schematické vyobrazení geometrického významu smíšeného součinu. Vektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} zde tvoří pravotočivou bázi, jejich smíšený součin podle vzorce (2.8) udává kladný objem rovnoběžnostěny, jimi definované. Stejný objem je dán součinem velikosti barevně zvýrazněné plochy (základny) a výšky h . Vektor $\vec{b} \times \vec{c}$ je na tuto základnu kolmý a je orientován směrem vzhůru, jeho velikost $\|\vec{b} \times \vec{c}\|$ odpovídá velikosti základny. Skalární součin vektoru \vec{a} s vektorem $\vec{b} \times \vec{c}$ je podle vzorce (2.5) roven $\|\vec{a}\| \|\vec{b} \times \vec{c}\| \cos \alpha$, kde ovšem $\|\vec{a}\| \cos \alpha = h$ a tedy $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \|\vec{b} \times \vec{c}\| h$.

- *Vektorový součin* dvou vektorů \vec{a} a \vec{b} je definován jako

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i = c_i \vec{e}_i \text{ (vektor)}, \quad (2.6)$$

kde indexy i, j, k označují jednotlivé složky vektorů \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Symbol ε_{ijk} (tzv. *Levi-Civitův symbol* - podrobněji viz odstavec 2.3) nabývá hodnot $\varepsilon_{ijk} = +1$ pro sudé permutace indexů (tj. 123, 231, 312), $\varepsilon_{ijk} = -1$ pro liché permutace indexů (tj. 132, 213, 321) a $\varepsilon_{ijk} = 0$ pokud trojice indexů ijk není permutací 123 (tj. pokud se některý z indexů opakuje). Geometrický význam vektorového součinu (viz levý panel v obrázku 2.1) lze zapsat jako

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \varphi, \quad (2.7)$$

kde φ je úhel svíraný vektory \vec{a} , \vec{b} ($0 \leq \varphi \leq \pi$) a \vec{n} je jednotkový vektor ($\|\vec{n}\| = 1$) kolmý k rovině, vymezené vektory \vec{a} , \vec{b} (jehož orientace je v pravotočivé bázi daná pravidlem pravé ruky). Velikost vektorového součinu $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \varphi$ tedy vyjadřuje velikost plochy rovnoběžníka, přirozeně určeného danými vektory \vec{a} , \vec{b} .

- *Smíšený součin* tří vektorů \vec{a} , \vec{b} a \vec{c} má (analogicky k rovnicím (2.4) a (2.6)) tvar

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \alpha \text{ (skalár)}, \quad (2.8)$$

kde indexy i, j, k označují jednotlivé složky vektorů \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Jeho hodnota vyjadřuje orientovaný objem rovnoběžnostěny (viz pravý panel v obrázku 2.1), definované danými třemi vektory, tj. objem je kladný, tvoří-li vektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} v daném pořadí pravotočivou bázi, netvoří-li bázi je nulový, pro levotočivou bázi \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} je záporný.

- **Maticový počet:**

Základní pojmy maticového počtu a základní operace s maticemi lze stručně zapsat následujícím způsobem:

- *Násobení matice číslem:* Vynásobíme-li matici \mathbf{A} typu $m \times n$ (m řádků a n sloupců) číslem $\lambda \in \mathbb{C}$, výsledkem bude matice $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{A}$ typu $m \times n$, kdy pro každý prvek b_{ij} matice \mathbf{B} (prvek na i -tém řádku a j -tém sloupci) platí

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}. \quad (2.9)$$

- *Součet matic:* Součtem dvou matic \mathbf{A} typu $m \times n$ a \mathbf{B} typu $m \times n$ bude matice \mathbf{C} typu $m \times n$, kdy pro každý prvek c_{ij} matice \mathbf{C} platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \quad (2.10)$$

- *Násobení matic:* Součinem dvou matic \mathbf{A} typu $m \times \ell$ a \mathbf{B} typu $\ell \times n$ bude matice $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ typu $m \times n$, kdy pro každý prvek c_{ij} matice \mathbf{C} platí

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} b_{kj} = a_{ik} b_{kj}, \quad (2.11)$$

kde poslední výraz je zapsán pomocí Einsteinovy sumační konvence. Rozepíšeme-li vzorec (2.11) explicitně, dostáváme $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$, $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$, atd. Násobení matic není komutativní, obecně tedy platí $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Maticové násobení v obou směrech lze navíc provést pouze tehdy, pokud matice \mathbf{A} je typu $m \times n$ a matice \mathbf{B} je typu $n \times m$, výsledné matice budou tedy typu $m \times m$ pro součin \mathbf{AB} , respektive $n \times n$ pro součin \mathbf{BA} .

- *Hodnota matice* lze definovat jako počet lineárně nezávislých řádků, tj. počet nenulových řádků po provedení tzv. Gaussovy eliminace (úpravě na schodovitý tvar). Je-li hodnota $n \times n$ čtvercové matice \mathbf{A} ($\text{typu } n \times n$) $h(\mathbf{A}) < n$, jde o matici *singulární*, pokud $h(\mathbf{A}) = n$, jde o matici *regulární*.
- *Stopu čtvercové matice* \mathbf{A} lze definovat jako součet prvků na hlavní diagonále matice, tj. pro každý prvek a_{ij} matice \mathbf{A} platí

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{ij} = \sum_i a_{ii} = a_{ii}, \quad (2.12)$$

kde poslední výraz je zapsán pomocí Einsteinovy sumační konvence. Platí-li navíc $\mathbf{A} = (a_{ij}) = 0$ pro všechna $i \neq j$, jde o tzv. *diagonální* matici, platí-li $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \delta_{ij}$, jedná se o jednotkovou matici (značíme ji \mathbf{E} nebo $\mathbf{1}$).

- *Transponovaná matice* \mathbf{A}^T vznikne z matice \mathbf{A} vzájemnou výměnou řádků a sloupců, pro jednotlivé prvky transponované matice platí $a_{ij}^T = a_{ji}$. Pokud platí $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, pak matici \mathbf{A} označujeme jako *symetrickou*, kde pro každý prvek platí $a_{ij} = a_{ji}$. Matici \mathbf{A} označujeme jako *antisymetrickou*, pokud pro každý její prvek platí $a_{ij} = -a_{ji}$, všechny prvky na hlavní diagonále budou proto nulové a tedy také $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0$.

- *Determinantem* čtvercové matice \mathbf{A} typu $n \times n$ bude skalár $\det \mathbf{A}$, který lze obecně určit např. pomocí Levi-Civitova symbolu:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}. \quad (2.13)$$

Dostáváme tedy $\det \mathbf{A} = a_{11}$ pro $n = 1$, pro $n = 2$ bude $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, pro $n = 3$ bude $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}$ (tzv. *Sarrusovo pravidlo*). Levi-Civitův symbol můžeme definovat i pro obecně n -rozměrný prostor, v tom případě bude obsahovat n různých indexů, přičemž sudé permutace budou vytvářeny sudým počtem číselných záměn, liché permutace lichým počtem číselných záměn, celkový počet permutací bez opakování je $n!$ (viz kapitola 12.1). Například sudé permutace symbolu ε_{ijkl} ve čtyřrozměrném prostoročase budou ε_{0123} , ε_{0231} , ε_{0312} , ε_{1032} , ε_{1320} , ε_{1203} , ε_{2130} , ε_{2301} , ε_{2013} , ε_{3210} , ε_{3102} , ε_{3021} . Ostatních 12 permutací (bez opakování) bude lichých. Determinant singulární matice $\det \mathbf{A} = 0$, determinant regulární matice $\det \mathbf{A} \neq 0$.

- *Inverzní maticí* k regulární čtvercové matici \mathbf{A} bude matice $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, pokud platí

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}. \quad (2.14)$$

- *Hermiteovský sdružená matice* (značená obvykle \mathbf{A}^H v lineární algebře, \mathbf{A}^\dagger případně \mathbf{A}^+ v kvantové mechanice) je označení pro matici komplexně sdruženou a transponovanou,

$$\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^*)^T. \quad (2.15)$$

Pokud $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^T$, jedná se o matici reálnou. Pokud $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$, mluvíme o tzv. *Hermiteovské matici*.

- *Unitární matice* \mathbf{U} je regulární čtvercová matice, jejíž hermiteovský sdružená matice je současně maticí inverzní, tj. $\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^{-1}$ a tedy

$$\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{E}. \quad (2.16)$$

Reálná unitární matice $\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^T$ je tzv. maticí *ortonormální*, kdy její řádky, respektive sloupce, tvoří *ortonormální* soustavu vektorů (viz kapitola 2.2).

- Číslo λ nazýváme *vlastní hodnotou* (vlastním číslem) a nenulový vektor \vec{v} nazýváme (pravým) *vlastním vektorem* čtvercové matice \mathbf{A} typu $n \times n$, pokud je splněna podmínka

$$\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad (2.17)$$

matice \mathbf{A} tedy působí na vlastní vektor jako skalár, tj. nemění jeho směr (v případě tzv. levých vlastních vektorů bude mít podmínka (2.17) podobu $\vec{v}\mathbf{A} = \lambda\vec{v}$). Z rovnice (2.17) přímo vyplývá relace pro určení vlastních hodnot matice \mathbf{A} , kdy soustava n lineárních rovnic

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{v} = \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}, \quad \text{tedy} \quad \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})v_j = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.18)$$

má nenulové řešení právě tehdy, pokud je matice této soustavy singulární, tj. pokud

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0. \quad (2.19)$$

Vlastní vektory příslušné jednotlivým vlastním hodnotám potom určíme z rovnice (2.18). Právě vlastní vektory budou mít tvar $c_r(v_{1r}, v_{2r}, \dots, v_{nr})^T$, levé vlastní vektory budou $c_l(v_{1l}, v_{2l}, \dots, v_{nl})$, kde c_r a c_l jsou libovolné konstanty.

- *Submatici* matice \mathbf{A} obdržíme vynecháním vybraných řádků a/nebo sloupců v matici \mathbf{A} . Determinant regulární čtvercové submatice se nazývá *subdeterminant* nebo také *minor*.
- Pro podrobnější studium problematiky počítání s vektory a maticemi doporučuji například sbírku Proskuryakov (1978); Young (1993); Kvasnica (2004).

• **Příklady:**

2.1 Jsou dány vektory $\vec{a} = (0, 2, 4)$, $\vec{b} = (1, 3, 5)$ a $\vec{c} = (6, 1, 3)$. Vypočítejte $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{a})$, $(\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} - \vec{b})$, $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{c} \times \vec{a})^2$.

$$\sqrt{20}, \sqrt{35}, \sqrt{46}, (-142, 16, -8), (14, -6, -26), -8, (4, -1, -3), 1400$$

2.2 Vypočítejte obsah rovnoběžníku, jehož vrcholy tvoří body $A = [0, 0, 0]$, $B = [1, 2, 3]$, C a $D = [3, 2, 1]$. Dopočítejte souřadnice bodu C .

$$4\sqrt{6}, C = [4, 4, 4]$$

2.3 Body $A = [2, 1, 0]$, $B = [2, 2, 3]$, $C = [0, 1 + \sqrt{40}, 0]$ tvoří vrcholy trojúhelníku. Pomocí vektorového součinu najděte jeho obsah.

$$10$$

2.4 Body $A = [4, 1, 0]$, $B = [4, -2, -3]$, $C = [1, -5, -3]$ tvoří vrcholy trojúhelníku. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku a pomocí vektorového součinu vypočítejte jeho obsah.

$$\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

2.5 Body $A = [2, -4, 9]$, $B = [-1, -4, 5]$, $C = [6, -4, 6]$ tvoří vrcholy trojúhelníku. Pomocí vektorového součinu vypočítejte jeho obsah a určete velikost úhlu α .

$$\frac{25}{2}, \frac{\pi}{4}$$

2.6 Jsou dány matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vypočítejte \mathbf{AB} , \mathbf{BA} .

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -12 & 37 \\ 48 & -33 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -16 & 55 & 6 \\ 18 & -47 & 16 \\ 4 & -1 & 18 \end{pmatrix}$$

2.7 Jsou dány matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Vypočítejte

všechny součiny různých matic (v libovolném pořadí a počtu) a také všechny determinanty a inverzní matice.

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 16 & -1 & 5 \\ -30 & 15 & -5 \end{pmatrix}, \mathbf{CA} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -24 \end{pmatrix}, \mathbf{CAB} = \begin{pmatrix} 2 & 13 & 5 \\ -106 & 46 & -20 \end{pmatrix},$$

$$\det \mathbf{B} = 35, \det \mathbf{C} = 7, \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 10 & 3 & -6 \\ 0 & 14 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.8 Vypočítejte inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2.9 Jsou dány matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vypočítejte inverzní matici \mathbf{A}^{-1} a matici $\mathbf{D} = \mathbf{BA}^{-1}$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -1 & 11 & -3 \\ 2 & -10 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -23 & 15 \end{pmatrix}$$

2.10 Vypočítejte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\det \mathbf{A} = 2$

2.11 Vypočítejte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. $\det \mathbf{A} = 294$

2.12 Vypočítejte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 3 & 8 & 13 \\ 7 & 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. $\det \mathbf{A} = 120$

2.13 Vypočítejte hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. $h(\mathbf{A}) = 2$

2.14 Vypočítejte hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $h(\mathbf{A}) = 3$

2.15 Jsou dány matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 9 & 3 \\ 10 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Vypočítejte matice $\mathbf{P} = \mathbf{A} - \mathbf{B}^T - 3\mathbf{C}$, $\mathbf{Q} = (3\mathbf{A}^T + \mathbf{B})\mathbf{C}$, $\mathbf{R} = \mathbf{C}^2\mathbf{B}$, $\mathbf{S} = \mathbf{CBC}$ a determinanty matic \mathbf{A} , \mathbf{B} a \mathbf{C} .

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -18 \\ -4 & -16 & -31 \\ -4 & -13 & -12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 9 & 20 & 38 \\ 10 & 68 & 165 \\ 25 & 74 & 147 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 298 & 348 & 60 \\ 678 & 788 & 136 \\ 334 & 391 & 68 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 71 & 216 & 443 \\ 187 & 556 & 1121 \\ 87 & 260 & 527 \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = 1, \quad \det \mathbf{B} = -174, \quad \det \mathbf{C} = 2$$

2.16 Vypočítejte minor submatice \mathbf{B} matice \mathbf{A} z příkladu 2.14, jestliže submatice \mathbf{B} je tvořena:

- (a) 1. a 3. řádkem a 1. a 2. sloupcem matice \mathbf{A} ,
- (b) 2. a 3. řádkem a 2. a 4. sloupcem matice \mathbf{A} ,
- (c) 1. a 3. řádkem a 2. a 4. sloupcem matice \mathbf{A} ,
- (d) všemi řádky a 1., 3. a 4. sloupcem matice \mathbf{A} .

(a) $M = -1$, (b) $M = 5$, (c) $M = 7$, (d) $M = 19$

2.2 Báze a jejich transformace

Bázi vektorového prostoru V dimenze n můžeme definovat jako uspořádanou n -tici lineárně nezávislých vektorů, které tzv. generují vektorový prostor V , tj. kdy každý vektor z vektorového prostoru V lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto (bázových) vektorů. Významnou roli při praktických výpočtech hrají báze ortogonální, resp. ortonormální. *Ortogonalní báze* je speciálním případem obecné báze, kdy různé bázové vektory jsou na sebe kolmé. Pro bázové vektory $\vec{x}_i, \vec{x}_j, i \neq j$ tedy platí

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = 0, \quad \text{případně v algebraické notaci,} \quad (\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0. \quad (2.20)$$

Ortonormální báze je speciálním případem ortogonální báze, kdy všechny bázové vektory (značíme je v tomto případě \vec{e}_i , často se také používá $\hat{\mathbf{x}}_i$) mají navíc jednotkovou velikost,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad \text{případně,} \quad (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}. \quad (2.21)$$

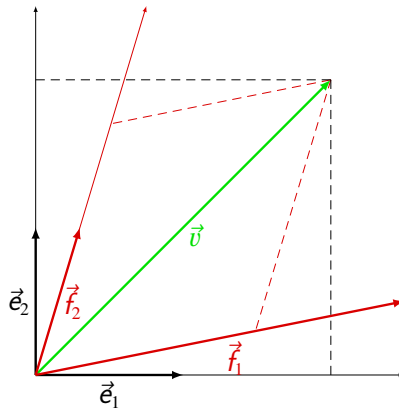
Na příkladu obrázku 2.2 zkonstruujeme matice přechodu mezi bázemi a ukážeme princip reprezentace vektoru v různých bázích v \mathbb{R}^2 (v případě vyšší dimenze vektorového prostoru bude postup zcela analogický). Jsou zavedeny dvě báze \mathcal{E} a \mathcal{F} , černá a červená, s bázovými vektory \vec{e}_1, \vec{e}_2 a \vec{f}_1, \vec{f}_2 , kdy černá báze je ortonormální, červená báze je zcela obecná. Přechod z červené báze \mathcal{F} do černé báze \mathcal{E} je zde dán vztahy (popisujícími vektorový součet)

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= 2,5 \vec{e}_1 + 0,5 \vec{e}_2, \\ \vec{f}_2 &= 0,3 \vec{e}_1 + \vec{e}_2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Můžeme tedy ihned napsat matici přechodu \mathbf{S} z báze \mathcal{F} do báze \mathcal{E} :

$$\mathbf{S}(\mathcal{F} \mapsto \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Matici přechodu ((2.23), i všechny další) lze zapsat také pomocí sloupcového formalismu, tj. vektory \vec{f}_1, \vec{f}_2 budou zapsány jako sloupcové. V takovém případě bude „sloupcově“ zapsaná matice přechodu násobit libovolný, rovněž sloupcový vektor (viz rovnice (2.29) v dalším výkladu), zapsaný za maticí. Ostatní dále popsané principy zůstanou nezměněné.



Obrázek 2.2: Schéma reprezentace vektoru \vec{v} , vyznačeného zelenou barvou, ve dvou různých bázích v \mathbb{R}^2 , v černě vyznačené ortonormální bázi s bázovými vektory \vec{e}_1, \vec{e}_2 a v červeně vyznačené obecné bázi s bázovými vektory \vec{f}_1, \vec{f}_2 . Přejít z červené do černé báze je dán vztahy: $\vec{f}_1 = 2,5\vec{e}_1 + 0,5\vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = 0,3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$. V černě vyznačené bázi má vektor \vec{v} složky o velikosti $(2, 2)$, velikost složek je zde znázorněna průmětem vektoru \vec{v} do směrů jednotlivých vektorů báze, zvýrazněným černými čárkovanými čarami a znamená poměr velikosti těchto průmětů ku velikosti příslušných bázových vektorů. Totéž platí v červeně vyznačené bázi, kde velikost složek je dána průmětem vektoru \vec{v} do směrů jednotlivých bázových vektorů, zvýrazněným červenými čárkovanými čarami. Velikost složek vektoru \vec{v} v červené bázi bude $\left(\frac{28}{47}, \frac{80}{47}\right) \approx (0,6; 1,7)$.

Z rovnic (2.22) snadno odvodíme rovnice pro \vec{e}_1, \vec{e}_2 , tedy rovnice opačného přechodu z černé báze \mathcal{E} do červené báze \mathcal{F} :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \frac{20}{47}\vec{f}_1 - \frac{10}{47}\vec{f}_2, \\ \vec{e}_2 &= -\frac{6}{47}\vec{f}_1 + \frac{50}{47}\vec{f}_2.\end{aligned}\tag{2.24}$$

V maticovém zápisu půjde o zpětnou matici přechodu \mathbf{T} , která je inverzní vůči matici \mathbf{S} , tedy $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$:

$$\mathbf{T}(\mathcal{E} \mapsto \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \frac{20}{47} & -\frac{10}{47} \\ \frac{6}{47} & \frac{50}{47} \end{pmatrix}.\tag{2.25}$$

Daný (zelený) vektor \vec{v} má vodorovnou a svislou složku v černé bázi \mathcal{E} znázorněnou průmětem vektoru do vodorovné a svislé osy, tj. do směrů, které odpovídají bázovým vektorům \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Velikosti těchto složek budou odpovídat poměru délek těchto průmětů (vyznačených čárkovaně černě) a příslušných bázových vektorů, můžeme tedy vektor \vec{v} zapsat jako vektorový součet (v tomto případě předem zvolených) násobků vektorů báze \mathcal{E} , nebo pouze pomocí složek:

$$\vec{v} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad \text{nebo} \quad \vec{v} = (2, 2),\tag{2.26}$$

kdy ve druhém případě implicitně předpokládáme, že se „pohybujeme“ v bázi \mathcal{E} . Určení složek vektoru \vec{v} v červené bázi \mathcal{F} bude zcela obdobné. Průměty vektoru \vec{v} do směrů bázových vektorů \vec{f}_1, \vec{f}_2 jsou znázorněny čárkovaně červeně, velikosti složek budou opět odpovídat poměru délek těchto průmětů a příslušných bázových vektorů. Uvědomíme-li si, že vektor \vec{v} je jen jeden a tedy vektorový součet jeho složek musí být stejný bez ohledu na to ze které báze se na něj

„díváme“, můžeme pro stanovení jeho složek v bázi \mathcal{F} například nejprve analogicky k rovnici (2.26) obecně napsat

$$\vec{v} = a\vec{f}_1 + b\vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2. \quad (2.27)$$

Dosazením za vektory \vec{e}_1, \vec{e}_2 z rovnice (2.24) dopočítáme velikosti složek a, b :

$$\vec{v} = \frac{28}{47}\vec{f}_1 + \frac{80}{47}\vec{f}_2, \quad \text{nebo} \quad \vec{v} = \left(\frac{28}{47}, \frac{80}{47}\right), \quad (2.28)$$

kdy ve druhém případě opět implicitně předpokládáme, že se „pohybujeme“ v bázi \mathcal{F} . Stejný výsledek dostaneme, vynásobíme-li vektor \vec{v} , zapsaný pomocí jeho složek v černé bázi \mathcal{E} , maticí \mathbf{T} přechodu z černé báze \mathcal{E} do červené báze \mathcal{F} :

$$(a, b) = (2, 2) \begin{pmatrix} \frac{20}{47} & -\frac{10}{47} \\ \frac{6}{47} & \frac{50}{47} \end{pmatrix} = \left(\frac{28}{47}, \frac{80}{47}\right). \quad (2.29)$$

Zpětnou transformaci můžeme ověřit vynásobením takto získaných složek (a, b) vektoru \vec{v} v bázi \mathcal{F} maticí \mathbf{S} přechodu z červené báze \mathcal{F} do černé báze \mathcal{E} , výsledkem musí být původní složky vektoru \vec{v} v bázi \mathcal{E} :

$$\left(\frac{28}{47}, \frac{80}{47}\right) \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 1 \end{pmatrix} = (2, 2). \quad (2.30)$$

Obdobným postupem bychom zjistili, že v jiné „červené bázi“ \mathcal{F} , dané transformací

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= 2\vec{e}_1 + 0,5\vec{e}_2, \\ \vec{f}_2 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \end{aligned} \quad (2.31)$$

(kde báze \mathcal{E} je opět ortonormální) bude reprezentace obecného vektoru $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 1,5\vec{e}_2 = (3, \frac{3}{2})$ mít podobu (zkuste sami načrtnout příslušný obrázek)

$$\vec{a} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = (1, 1). \quad (2.32)$$

V případě ortonormálních bází budou matice přechodu mezi nimi maticemi pouze rotačními, tedy ortogonálními. Musí tedy platit: $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ a zároveň: $\det \mathbf{T} = \det \mathbf{T}^{-1} = \pm 1$ (pokud $\det \mathbf{T} = \det \mathbf{T}^{-1} = -1$, jedná se o tzv. nepravou (nevlastní) rotaci, tedy rotaci spojenou se zrcadlením v rovině kolmé k ose rotace). Další podrobnosti, týkající se vektorového a maticového počtu včetně počítání s bázemi - viz příslušné kursy lineární algebry.

• Příklady:

2.17 Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 jsou dány vektory $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (2, 1, 0)$.
Tvoří tyto vektory bázi tohoto vektorového prostoru? ne

2.18 Necht vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ tvoří ortonormální bázi vektorového prostoru \mathbb{R}^4 . Rozhodněte, jestli vektory $\vec{u} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$, $\vec{v} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$, $\vec{w} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4$, $\vec{z} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, tvoří také bázi tohoto vektorového prostoru. ano

2.19 Nalezněte matice přechodu mezi standardní ortonormální bází (kartézské soustavy) a ortonormální bází cylindrické soustavy (transformační rovnice viz odstavec 4.2).

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

2.20 Nalezněte matice přechodu mezi standardní ortonormální bází (kartézské soustavy) a ortonormální bází sférické soustavy (transformační rovnice viz odstavec 4.3).

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\phi \end{pmatrix}$$

2.21 Nalezněte matici přechodu pro složky polohového vektoru pevného bodu při otočení kartézské souřadnicové soustavy o úhel α okolo osy z (tzv. matici rotace). Polohový vektor obecného bodu v otočené soustavě označíme $\vec{r}' = (x', y', z')$, polohový vektor stejného bodu v původní soustavě bude $\vec{r} = (x, y, z)$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2.22 Nalezněte matici \mathbf{G} Galileovy transformace časoprostoru. Galileova časoprostorová transformace je daná přiřazením $(t', x', y', z')^T \mapsto (t, x, y, z)^T$, kde $t' = t$, $x' = x - v_x t$, $y' = y - v_y t$ a $z' = z - v_z t$, přičemž vektor $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ interpretujeme jako rychlost a \vec{u} je obdobný vektor rychlosti v čárkované soustavě. Vynásobením matic dokažte vztah $\mathbf{G}_{\vec{u}} \mathbf{G}_{\vec{v}} = \mathbf{G}_{\vec{u}+\vec{v}}$ a vysvětlete proč se tento vztah nazývá *klasickým pravidlem skládání rychlostí*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_x & 1 & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & 1 & 0 \\ -v_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_x - u_x & 1 & 0 & 0 \\ -v_y - u_y & 0 & 1 & 0 \\ -v_z - u_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.23 Vektor \vec{a} má v ortonormální bází \mathcal{B} v \mathbb{R}^2 složky $(11/2, -1)$. Přejít mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{B}' je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 &= \frac{3}{2}\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Určete matici \mathbf{T} přechodu z báze \mathcal{B} do báze \mathcal{B}' , matici \mathbf{S} přechodu z báze \mathcal{B}' do báze \mathcal{B} a složky vektoru \vec{a} v bázi \mathcal{B}' . Je báze \mathcal{B}' ortonormální (uveďte důvod)? Nakreslete obrázek, znázorňující velikost a směr všech uvedených vektorů, tj. vektorů obou bází i vektoru \vec{a} .

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{4}{19} & \frac{2}{19} \\ \frac{3}{19} & -\frac{8}{19} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (1, 1), \quad \text{báze } \mathcal{B}' \text{ není ortonormální.}$$

2.24 Vektor \vec{a} má v *ortonormální* bázi \mathcal{B} složky $(1, 0, -2)$. Přejchod mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{B}' je dán vztahy

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= -\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 - \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}'_1 + 2\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + 2\vec{e}'_3.\end{aligned}$$

Určete matici \mathbf{T} přechodu z báze \mathcal{B} do báze \mathcal{B}' , matici \mathbf{S} přechodu z báze \mathcal{B}' do báze \mathcal{B} a složky vektoru \vec{a} v bázi \mathcal{B}' . Je báze \mathcal{B}' ortonormální (uveďte důvod) ?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (-3, -1, -5), \text{ báze } \mathcal{B}' \text{ není ortonormální.}$$

2.25 Vektor \vec{a} má v *ortonormální* bázi \mathcal{B}' složky $(1, 2, -1)$. Přejchod mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{B}' je dán vztahy

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}'_2 - \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}'_1 + 2\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + 2\vec{e}'_3.\end{aligned}$$

Určete matici \mathbf{T} přechodu z báze \mathcal{B} do báze \mathcal{B}' , matici \mathbf{S} přechodu z báze \mathcal{B}' do báze \mathcal{B} a složky vektoru \vec{a} v bázi \mathcal{B} . Je báze \mathcal{B} ortonormální (uveďte důvod) ?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (3, 2, -1), \text{ báze } \mathcal{B} \text{ není ortonormální.}$$

2.26 Vektor \vec{a} má v *ortonormální* bázi \mathcal{B}' složky $(1, 1, 1)$. Přejchod mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{B}' je dán vztahy

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}'_1 - 2\vec{e}'_2 - 3\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= 2\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2 - \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= -\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3.\end{aligned}$$

Určete matici \mathbf{T} přechodu z báze \mathcal{B} do báze \mathcal{B}' , matici \mathbf{S} přechodu z báze \mathcal{B}' do báze \mathcal{B} a složky vektoru \vec{a} v bázi \mathcal{B} . Je báze \mathcal{B} ortonormální (uveďte důvod) ?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (0, 2, 3), \text{ báze } \mathcal{B} \text{ není ortonormální.}$$

2.27 Vektor \vec{a} má ve standardní kartézské bázi \mathcal{E} složky $(1, -\sqrt{3}, 1)$. Dále jsou zadány dvě báze \mathcal{B} a \mathcal{B}' , přičemž matice \mathbf{R}^{-1} přechodu z báze \mathcal{B}' do báze \mathcal{E} má tvar

$$\mathbf{R}^{-1}(\mathcal{B}' \mapsto \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přejchod mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{B}' je dán vztahy

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}'_1 - \vec{e}'_2 - 2\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= 2\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= -\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + 3\vec{e}'_3.\end{aligned}$$

Určete matici \mathbf{T} přechodu z báze \mathcal{B} do báze \mathcal{B}' , matici \mathbf{S} přechodu z báze \mathcal{B}' do báze \mathcal{B} a složky vektoru \vec{a} v bázích \mathcal{B} a \mathcal{B}' . Jsou báze \mathcal{B} a \mathcal{B}' ortonormální (uveďte důvod) ?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -7 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (0, -2, 1), \quad \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (15, -2, 11),$$

\mathcal{B}' ano, \mathcal{B} ne.

2.28 Vektor \vec{a} má ve standardní kartézské bázi \mathcal{E} složky $(1, 1, 1)$. Dále jsou zadány dvě báze \mathcal{B} a \mathcal{B}' , přičemž matice \mathbf{R}^{-1} přechodu z báze \mathcal{B}' do báze \mathcal{E} má tvar

$$\mathbf{R}^{-1}(\mathcal{B}' \mapsto \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Přechod mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{B}' je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= 2\vec{e}'_1 + \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= -\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2. \end{aligned}$$

Určete matici \mathbf{R} přechodu z báze \mathcal{E} do báze \mathcal{B}' , matici \mathbf{T} přechodu z báze \mathcal{E} do báze \mathcal{B} , matici \mathbf{S} přechodu z báze \mathcal{B} do báze \mathcal{E} a složky vektoru \vec{a} v bázích \mathcal{B} a \mathcal{B}' . Jsou báze \mathcal{B} a \mathcal{B}' ortonormální (uveďte důvod) ?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (2, 1, 0), \quad \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (-3, 3, 4),$$

\mathcal{B}' ne, \mathcal{B} ne.

2.29 Vektor \vec{a} má ve standardní kartézské bázi \mathcal{E} složky $(1, 1, 1)$. Dále jsou zadány dvě báze \mathcal{B} a \mathcal{B}' , přičemž matice \mathbf{R}^{-1} přechodu z báze \mathcal{B}' do báze \mathcal{E} má tvar

$$\mathbf{R}^{-1}(\mathcal{B}' \mapsto \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Přechod mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{B}' je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= 2\vec{e}'_1 + \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= -\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2. \end{aligned}$$

Určete matici \mathbf{T} přechodu z báze \mathcal{E} do báze \mathcal{B} , matici \mathbf{S} přechodu z báze \mathcal{B} do báze \mathcal{E} a složky vektoru \vec{a} v bázích \mathcal{B} a \mathcal{B}' . Jsou báze \mathcal{B} a \mathcal{B}' ortonormální (uveďte důvod) ?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (-1, 1, -1), \quad \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (-2, 1, 3),$$

\mathcal{B}' ano, \mathcal{B} ne.

2.30 Vektor \vec{a} má ve standardní kartézské bázi \mathcal{E} složky $(1, 1, 2)$. Dále jsou zadány dvě báze \mathcal{B} a \mathcal{B}' , přičemž matice \mathbf{R}^{-1} přechodu z báze \mathcal{B}' do báze \mathcal{E} má tvar

$$\mathbf{R}^{-1}(\mathcal{B}' \mapsto \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přechod mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{B}' je dán vztahy

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= -\vec{e}'_2 - 2\vec{e}'_3, \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{2}\vec{e}'_1 - \frac{3}{2}\vec{e}'_2 + \vec{e}'_3, \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}'_2 + 3\vec{e}'_3. \end{aligned}$$

Určete matici \mathbf{T} přechodu z báze \mathcal{E} do báze \mathcal{B} , matici \mathbf{S} přechodu z báze \mathcal{B} do báze \mathcal{E} a složky vektoru \vec{a} v bázích \mathcal{B} a \mathcal{B}' . Jsou báze \mathcal{B} a \mathcal{B}' ortonormální (uveďte důvod)? Je báze \mathcal{B}' ortogonální (prokažte)?

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -7 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (-9, 2, -6), \quad \vec{a}_{(\mathcal{B}')} = (1, 0, 2),$$

\mathcal{B}' ne, \mathcal{B} ne. Ano.

2.3 Úvod do tenzorového počtu

Kromě skalárů a vektorů (tj. tenzorů nultého a prvního řádu) existují složitější algebraické struktury, tedy *tenzory* vyšších řádů. Z nich nejběžnější a nejjednodušší jsou tzv. tenzory druhého řádu, které obvykle popisují fyzikální pole s tzv. smykovými účinky (reprezentovanými nedиагонаlními prvky v příslušném tenzoru) v mechanice kontinua, například tenzor deformace, tenzor napětí, atd. Kartézským tenzorem druhého řádu nazveme matici $\mathbf{T} = (T_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, transformují-li se její prvky T_{ij} při *ortogonální transformaci souřadnic* (rotaci v n -rozměrném „prostoru“) $x'_i = a_{ij}x_j$ (viz příklad 2.21, a_{ij} jsou prvky ortogonální matice) podle vztahu

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}. \quad (2.33)$$

Tak jako každý obecný vektor \vec{v} je tvořen n skalárními složkami (v_1, v_2, \dots, v_n) , je obecný tenzor druhého řádu \mathbf{T} tvořen n „vektorovými“ složkami $(\vec{T}_1, \vec{T}_2, \dots, \vec{T}_n)$, které lze obecně zapsat,

$$\vec{T}_j = \begin{pmatrix} T_{1j} \\ T_{2j} \\ \vdots \\ T_{nj} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

kde každý z vektorů \vec{T}_j je zapsán pomocí n složek. Zapišeme-li obecně n -rozměrný tenzor druhého řádu formou explicitního maticového zápisu, bude obsahovat n^2 prvků,

$$\mathbf{T} = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

Zapišeme-li tedy 3-rozměrný (nejběžnější) tenzor druhého řádu formou explicitního maticového zápisu,

$$\mathbf{T} = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

je každý ze tří vektorů \vec{T}_j reprezentován jedním sloupcem matice (2.36). V tomto odstavci opět pro jednoduchost zatím nezavádíme počítání s horními a dolními indexy a dále se zde také budeme „pohybovat“ pouze v kartézské ortonormální bázi.

Geometrický význam tenzoru druhého řádu z rovnice (2.36) si můžeme přiblížit na příkladu tenzoru napětí. Na těleso konečných rozměrů může, na rozdíl od hmotného bodu, působit síla (síly) takovým způsobem, že v různých bodech tohoto tělesa má vektor síly (výslednice sil) různou velikost a směr. Představme si, že toto těleso se skládá z jednotlivých malých objemových elementů, ohraničených plošnými elementy (pro jednoduchost si představujme malé krychličky s hranami rovnoběžnými s jednotlivými kartézskými osami). Působení síly na každou takovou plošku vybrané krychličky můžeme rozložit na tři nezávislé směry: kolmo (normálově) a rovnoběžně (tangentálně) ve směru dvou zbývajících os. Protože plošky jsou orientovány také ve třech různých směrech, označíme vždy prvním indexem orientaci každé plošky podle směru její normály a druhým indexem vždy jeden ze tří jednotlivých směrů rozložené síly působící na plošku. Potřebujeme tedy obecně celkem 9 složek.

• Symetrické a antisymetrické tenzory:

Tenzory druhého řádu (analogicky k symetrickým, respektive antisymetrickým maticím) lze rozložit na součet symetrického a antisymetrického tenzoru druhého řádu. Pro každý prvek T_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ platí

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = S_{ij} + Q_{ij}, \quad (2.37)$$

kde (S_{ij}) je n -rozměrný symetrický tenzor druhého řádu, určený $n(n+1)/2$ prvky, (Q_{ij}) je n -rozměrný antisymetrický tenzor druhého řádu, určený $n(n-1)/2$ prvky. U tenzorů vyšších řádů se symetrie nebo antisymetrie vztahuje vždy pouze k určité vybrané dvojici indexů.

• Sčítání tenzorů:

V následujících pojednáních implicitně předpokládáme, že se jedná vždy o tenzory v „prostoru“ stejné dimenze n . Sčítáme (analogicky ke sčítání matic) jednotlivé prvky se stejnými indexy (záleží na jejich pořadí), sčítat tedy můžeme pouze tenzory stejného řádu, například

$$R_{ijk} = \alpha P_{ijk} + \beta Q_{ijk}, \quad (2.38)$$

kde α a β jsou skaláry.

• Kontrakce tenzorů:

Kontrakcí (úžením) tenzorů rozumíme součet přes každou dvojici dvou stejných indexů v tenzoru $T_{ijk\dots}$ (kdy nyní budeme samotné tenzory v souladu s obvyklou konvencí zapisovat bez závorčky, tedy pomocí jeho prvků). Kontrakcí tenzoru druhého řádu T_{ij} , kdy položíme $i = j$, tak bude (Einsteinova sumační konvence) $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{tr}(\mathbf{T}) = \alpha$, tedy skalár (stopa tenzoru

druhého řádu). Kontrakcí tenzoru třetího řádu T_{ijk} , kdy položíme například $j = k$, bude $T_{ijj} = T_{i11} + T_{i22} + T_{i33} = \beta T_i$, tedy vektor, kontrakcí tenzoru čtvrtého řádu T_{ijkl} , kdy položíme například $k = l$, bude $T_{ijkk} = T_{ij11} + T_{ij22} + T_{ij33} = \gamma T_{ij}$, tedy tenzor druhého řádu, atd. Každá kontrakce (úžení) tenzoru $T_{ijkl\dots}$ libovolného řádu (nejméně ovšem druhého řádu se dvěma indexy) snižuje řád tohoto tenzoru o dva.

• **Násobení tenzorů:**

Analogicky ke způsobu zápisu vektoru pomocí složky a jednotkového bázového vektoru (v Einsteinově notaci) $\vec{v} = v_i \vec{e}_i$ můžeme tenzor druhého řádu zapsat jako

$$\mathbf{T} = T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \quad \text{nebo} \quad \mathbf{T} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j. \quad (2.39)$$

Rovnice (2.39) vyjadřuje tzv. *tenzorový součin* kartézských bázových vektorů, tedy tenzorový součin dvou vektorů stejné dimenze, kdy první z nich je sloupcový a druhý řádkový. Tento speciální případ tenzorového součinu se také nazývá *dyadický součin* (dyadic product). Jedná se tedy o součin matic typu $n \times 1$ a $1 \times n$ s výslednou maticí typu $n \times n$, na rozdíl od skalárního součinu, který můžeme obdobně vyjádřit jako součin řádkové a sloupcové matice typu $1 \times n$ a $n \times 1$ s výslednou maticí typu 1×1 , tedy skalárem. Jednotlivé tzv. *bázové tenzory* druhého řádu (dyády) $\vec{e}_i \vec{e}_j$ v rovnici (2.39) můžeme v kartézské soustavě (kdy $n = 3$) explicitně vyjádřit následujícím maticovým zápisem,

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_1 \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_1 \vec{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_2 \vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_2 \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_2 \vec{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_3 \vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_3 \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_3 \vec{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Z rovnice (2.39) zároveň vyplývá, že každý prvek T_{ij} tenzoru druhého řádu můžeme určit (obdobně jako složku v_i vektoru \vec{v} lze určit skalárním součinem, $v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i$) pomocí dvojitého součinu

$$T_{ij} = \vec{e}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{e}_j, \quad (2.41)$$

kde jednotlivé skalární součiny reprezentují v tomto případě maticové násobení, tj, vektor \vec{e}_i bude řádkový a vektor \vec{e}_j bude sloupcový. Tenzorovým součinem dvou vektorů \vec{v} a \vec{w} je tedy tenzor druhého řádu, pro jehož každý prvek T_{ij} platí

$$T_{ij} = v_i w_j. \quad (2.42)$$

Pro dyadický součin také platí následující identity,

$$(\vec{u} \otimes \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}, \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}, \quad (2.43)$$

kdy skalární součin opět reprezentuje maticové násobení.

Výsledkem tenzorového součinu tenzorů obecných řádů bude vždy tenzor řádu, odpovídajícího součtu řádů původních tenzorů (jehož dimenze bude odpovídat jejich součinu). Například

tenzorovým součinem tenzoru druhého řádu \mathbf{P} s prvky P_{ij} a tenzoru prvního řádu (vektoru) \vec{q} se složkami q_k bude tenzor třetího řádu \mathbf{R} s prvky R_{ijk} , tenzorovým součinem tenzoru druhého řádu \mathbf{P} s prvky P_{ij} a tenzoru druhého řádu \mathbf{Q} s prvky Q_{kl} bude tenzor čtvrtého řádu \mathbf{R} s prvky R_{ijkl} , atd. Tenzorový součin obecných tenzorů $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ (libovolného řádu) má následující vlastnosti:

$$\bullet \quad \mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} \neq \mathbf{Q} \otimes \mathbf{P}, \quad (2.44)$$

$$\bullet \quad \mathbf{P} \otimes (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{R}) = (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{R}, \quad (2.45)$$

$$\bullet \quad \mathbf{P} \otimes (\alpha \mathbf{Q} + \beta \mathbf{R}) = \alpha \mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} + \beta \mathbf{P} \otimes \mathbf{R}, \quad (\alpha \mathbf{P} + \beta \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{R} = \alpha \mathbf{P} \otimes \mathbf{R} + \beta \mathbf{Q} \otimes \mathbf{R}, \quad (2.46)$$

kdy rovnice (2.44) vyjadřuje obecnou nekomutativitu tenzorového součinu (ve speciálních případech, například pro tenzory nultého řádu nebo pokud $\mathbf{P} \equiv \mathbf{Q}$ platit nemusí) a kde rovnice (2.45) a (2.46) vyjadřují asociativitu a linearitu tenzorového součinu.

• Kroneckerovo delta:

Tzv. Kroneckerovo delta je matematická funkce, značená symbolem δ_{ij} , určená následujícím způsobem:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } i = j, \\ 0, & \text{pokud } i \neq j. \end{cases} \quad (2.47)$$

Některé důležité vlastnosti funkce Kroneckerovo delta:

- Ortonormalitu vektorů \vec{e}_i, \vec{e}_j můžeme vyjádřit jako $e_i e_j \delta_{ij}$.
- $\delta_{ii} = 3$.
- Kroneckerovo delta δ_{ij} zaměňuje indexy složek vektorů nebo prvků tenzorů, například

$$v_i \delta_{ij} = v_j, \quad \text{nebo obecně} \quad T_{ij \dots k \dots z} \delta_{kl} = T_{ij \dots l \dots z}. \quad (2.48)$$

- Kontrakce (úžení) součinu dvou funkcí $\delta_{ij} \delta_{jk}$ s jedním společným indexem j na výslednou funkci δ_{ik} , úžení součinu dvou funkcí se dvěma společnými indexy i, j na výslednou funkci $\delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$.
- Kroneckerovo delta δ_{ij} redukuje sumaci (tj. odstraňuje jednu sumu), kdy například

$$\sum_i \sum_j A_{ij} \delta_{ij} = \sum_i A_{ii}, \quad \sum_j \sum_k A_{jk} \delta_{jk} \delta_{ij} = \sum_j A_{jj} \delta_{ij} = A_{ij}. \quad (2.49)$$

• Antisymetrický (permutační nebo také Levi-Civitův) symbol:

Tzv. *antisymetrický* (nebo také Levi-Civitův - viz oddíl 2.1) symbol, značený ε_{ijk} , je definován v \mathbb{R}^3 způsobem

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{pokud } ijk \text{ jsou sudé permutace, tedy } ijk = 123, 231, 312, \\ -1, & \text{pokud } ijk \text{ jsou liché permutace, tedy } ijk = 132, 213, 321, \\ 0, & \text{pokud se některé dva indexy opakují, tedy pokud } i = j \vee j = k \vee k = i. \end{cases} \quad (2.50)$$

Některé důležité vlastnosti Levi-Civitova symbolu ε_{ijk} :

- Umožňuje stanovit výraz pro determinant obecné čtvercové regulární matice \mathbf{A} libovolné dimenze (je popsán v rovnici (2.13)). Například pro matici \mathbf{A} dimenze 3×3 potom dostáváme

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}. \quad (2.51)$$

- Velmi užitečná při výpočtech (například vektorových identit nebo působení diferenciálních operátorů) je také souvislost mezi Levi-Civitovým symbolem ε_{ijk} a Kroneckerovou funkcí δ_{ij} . Z definice Levi-Civitova symbolu (2.50) jasně vyplývá, že společným působením dvou symbolů ε_{ijk} a ε_{lmn} dostáváme identitu

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}, \quad (2.52)$$

kteřou můžeme kompaktním způsobem zapsat pomocí maticového formalismu ve tvaru

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

- Z rovnice (2.53) a ze zúžení součinu Kroneckerových funkcí delta se společnými indexy dále vyplývá, že působení dvou Levi-Civitových symbolů $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$ s jedním společným indexem k zjednoduší rovnici (2.52) do podoby

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}, \quad (2.54)$$

- V případě dvou, případně všech tří společných indexů dostaneme

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkl} = 2\delta_{il}, \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6. \quad (2.55)$$

- Levi-Civitův symbol můžeme definovat i v \mathbb{R}^n (popsáno také v kapitole 2.1), sudé permutace budou vytvářeny sudým počtem číselných záměn pro n různých indexů, liché permutace lichým počtem číselných záměn. Například sudé permutace symbolu ε_{1234} budou ε_{0123} , ε_{0231} , ε_{0312} , ε_{1032} , ε_{1320} , ε_{1203} , ε_{2130} , ε_{2301} , ε_{2013} , ε_{3210} , ε_{3102} , ε_{3021} . Ostatních 12 permutací (bez opakování) bude lichých.

• Gradient a divergence tenzoru:

- Derivování skalárních funkcí popisuje kapitola 1.1. Význam operátorů gradientu, divergence a rotace a jejich některá působení na tenzory nultého a prvního řádu je podrobně vysvětlen v kapitole 5.3.
- Gradient (viz odstavec 5.3) tenzoru zvyšuje tzv. řád tenzoru o jedničku, tj. například z vektoru (tenzoru prvního řádu) vytvoří tenzor druhého řádu, z tenzoru druhého řádu tenzor třetího řádu, atd. Například gradient tenzoru \mathbf{T} druhého řádu můžeme v kartézské souřadné soustavě obecně zapsat,

$$\vec{\nabla} \mathbf{T} = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} = R_{ijk}, \quad (2.56)$$

s odpovídající reprezentací pomocí matice s 27 prvky. Ve výsledném tenzoru (třetího řádu, týká se ale obecně jakéhokoli řádu) v rovnici (2.56) upozorňujeme na pořadí indexů, kdy

první index označuje proměnnou, podle níž se derivuje, další indexy označují příslušný prvek tenzoru.

Napišeme-li tedy explicitně gradient vektoru (v kartézské souřadné soustavě v \mathbb{R}^3), dostáváme

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = T_{ij}, \text{ kde } T_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

- Divergenci tenzoru můžeme chápat jako kontrakci gradientu, kdy například v rovnici (2.56) položíme $i = k$, dostaneme tak namísto tenzoru třetího řádu tenzor prvního řádu (vektor) se složkami $A_j = \partial T_{jk} / \partial x_k$. Divergence (viz také odstavec 5.3) tenzoru tedy snižuje řád tenzoru, tj. například z tenzoru druhého řádu vytvoří vektor, z vektoru skalár, atd. Divergenci tenzoru \mathbf{T} druhého řádu můžeme v kartézské souřadné soustavě v \mathbb{R}^3 obecně zapsat,

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \vec{e}_i = \vec{A}. \quad (2.58)$$

Explicitně rozepsaný výsledný vektor bude mít tvar

$$\vec{A} = \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}, \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}, \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right). \quad (2.59)$$

Rovnici (2.58) můžeme také zapsat formou maticového násobení vektoru gradientu s tenzorem \mathbf{T} ,

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}^T. \quad (2.60)$$

kde výsledný vektor je dán rovnicí (2.59).

- **Příklady** (uvažujeme vždy kartézskou ortonormální bázi daného vektorového prostoru) :

2.31 Napište explicitní podobu skalárního součinu $\vec{u} \cdot \vec{v}$ s obecným parametrem a a potom tenzorový (dyadický) součin $\vec{u} \otimes \vec{v}$ a $\vec{v} \otimes \vec{u}$ vektorů $\vec{u} = (1, 5, -5, 2)$ a $\vec{v} = (2, -1, a, 4)$ v \mathbb{R}^4 , kdy oba vektory budou vzájemně kolmé. Proveďte kontrakci výsledných tenzorů druhého řádu.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5(1 - a), \quad \vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 10 & -5 & 5 & 20 \\ -10 & 5 & -5 & -20 \\ 4 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \otimes \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -10 & 4 \\ -1 & -5 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & 2 \\ 4 & 20 & -20 & 8 \end{pmatrix}$$

Kontrakcí obou tenzorů druhého řádu získáme (shodný) skalární součin obou vektorů, pokud $\vec{u} \perp \vec{v}$, potom $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2.32 Napište explicitní podobu tenzorového součinu tenzoru druhého řádu \mathbf{T} a vektoru \vec{v} v \mathbb{R}^3 ,

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = (4, 2, 2),$$

a poté proveďte jeho kontrakci položením indexu, označujícího složky vektoru, rovným j .

$$\begin{aligned} T_{ij} \otimes v_k = S_{ijk} &= \begin{pmatrix} R_{111} & R_{112} & R_{113} & R_{121} & R_{122} & R_{123} & R_{131} & R_{132} & R_{133} \\ R_{211} & R_{212} & R_{213} & R_{221} & R_{222} & R_{223} & R_{231} & R_{232} & R_{233} \\ R_{311} & R_{312} & R_{313} & R_{321} & R_{322} & R_{323} & R_{331} & R_{332} & R_{333} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & -4 & -2 & -2 \\ 8 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 8 & 4 & 4 \\ 12 & 6 & 6 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad S_i = (4, 14, 16) \end{aligned}$$

2.33 Napište explicitní podobu tenzorového součinu dvou tenzorů druhého řádu \mathbf{P} a \mathbf{Q} v \mathbb{R}^2 ,

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{a poté proveďte jeho kontrakci pomocí } l = k.$$

$$P_{ij} \otimes Q_{kl} = R_{ijkl} = \begin{pmatrix} R_{1111} & R_{1112} & R_{1211} & R_{1212} \\ R_{1121} & R_{1122} & R_{1221} & R_{1222} \\ R_{2111} & R_{2112} & R_{2211} & R_{2212} \\ R_{2121} & R_{2122} & R_{2221} & R_{2222} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad R_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

2.34 Složky y_i vektoru \vec{y} jsou dány rovnicí $y_i = b_{ij}z_j$, kde složky z_i vektoru \vec{z} jsou dány rovnicí $z_i = a_{ij}x_j$, $i, j = 1, 2, 3$. Napište explicitně i pomocí Einsteinovy notace transformační rovnice složek vektoru \vec{y} přímo pomocí složek vektoru \vec{x} .

$$\begin{aligned} y_1 &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31})z_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32})z_2 + (b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33})z_3, \\ y_2 &= (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31})z_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32})z_2 + (b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33})z_3, \\ y_3 &= (b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31})z_1 + (b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32})z_2 + (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33})z_3 \\ y_i &= b_{im}a_{mj}z_j \end{aligned}$$

2.35 Upravte následující výrazy ($i, j, \dots = 1, 2, 3$):

$$(a) \delta_{ii}\delta_{kk}, \quad (b) \delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl}, \quad (c) \delta_{il}\delta_{jl}\delta_{mm}\delta_{qj}\delta_{qk}, \quad (d) \delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3}, \quad (e) \delta_{il}\delta_{jj}\delta_{kk} - \delta_{kj}\delta_{jk}\delta_{il}$$

$$(a) 9, \quad (b) \delta_{kl}, \quad (c) 3\delta_{ik}, \quad (d) 1, \quad (e) 6\delta_{il}$$

2.36 Dokažte, že:

$$(a) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = 2!$$

$$(b) \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 3!$$

$$(c) \varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{ijkl} = 4!$$

$$(d) \text{Odhadněte výsledek } \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}$$

$$(e) \text{Napište úplnou podobu tzv. Levi-Civita tenzoru (daného rovnicí (2.50)).}$$

$$(a)-(d) \text{ pomocí rovnic (2.52) a (2.53),} \quad (e) \varepsilon_{ijk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.37 Pomocí Kroneckerova delta a Levi-Civitova symbolu v Einsteinově notaci ověřte vektorovou identitu $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.

Pomocí identit $\varepsilon_{ijk}A_jB_k\vec{e}_i = -\varepsilon_{ikj}A_jB_k\vec{e}_i = -\varepsilon_{ikj}B_kA_j\vec{e}_i = -\varepsilon_{ijk}B_jA_k\vec{e}_i$, při přechodu ze třetího ke čtvrtému členu zaměníme indexy j a k .

2.38 Pomocí Kroneckerova delta a Levi-Civitova symbolu v Einsteinově notaci ověřte identitu pro smíšený součin $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$.

Pomocí úpravy výrazu $(A_i\vec{e}_i) \cdot (\varepsilon_{ijk}B_jC_k\vec{e}_i)$ a následných sudých permutací.

2.39 Pomocí Kroneckerova delta a Levi-Civitova symbolu v Einsteinově notaci ověřte identitu pro smíšený součin $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = 0$.

Analogicky k příkladu 2.38 dostáváme $A_i\varepsilon_{ijk}B_jA_k = B_i\varepsilon_{ijk}A_jA_k = \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{A}) = 0$.

2.40 Pomocí Kroneckerova delta a Levi-Civitova symbolu v Einsteinově notaci ověřte vektorovou identitu $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$.

Pomocí výrazu $(A_j\vec{e}_j) \times (\varepsilon_{klm}B_lC_m\vec{e}_k) = \varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{klm}B_lC_m\vec{e}_i$ a dále pomocí rovnice (2.54).

2.41 Pomocí Kroneckerova delta a Levi-Civitova symbolu v Einsteinově notaci ověřte vektorovou identitu $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$.

Pomocí výrazu $(\varepsilon_{ijk}A_jB_k\vec{e}_i) \cdot (\varepsilon_{ilm}C_lD_m\vec{e}_i)$ a dále pomocí rovnice (2.54).

2.42 Pomocí Kroneckerova delta a Levi-Civitova symbolu v Einsteinově notaci ověřte vektorovou identitu $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{C} [\vec{D} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})] - \vec{D} [\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})]$.

Pomocí dalších úprav výrazu $\varepsilon_{ijk}(\vec{A} \times \vec{B})_j(\vec{C} \times \vec{D})_k\vec{e}_i$ s použitím rovnic (2.6) a (2.54).

2.43 Pomocí Einsteinovy a vektorové symboliky rozepište vektorovou identitu $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$.

$$A_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial B_i}{\partial x_i} + \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) + \text{tr} (\vec{\nabla} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \vec{B})$$

2.44 Jednotlivé členy tzv. Cauchyho tenzoru deformace E_{ij} (popisujícího malé deformace) lze pomocí indexů zapsat jako

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

kde $i, j = 1, 2, 3$ a v_i, v_j jsou složky vektoru rychlosti. V Einsteinově notaci napište výraz pro divergenci tohoto tenzoru, napište také explicitní výraz pro první vektorovou složku této divergence.

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad \frac{\partial E_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial E_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial E_{xz}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\Delta v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right]$$

2.45 Jednotlivé členy tzv. Greenova-Lagrangeova tenzoru deformace E_{ij} (popisujícího libovolně velké deformace) lze pomocí indexů zapsat jako

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right),$$

kde $i, j, k = 1, 2, 3$ a v_i, v_j, v_k jsou složky vektoru rychlosti. V Einsteinově notaci napište výraz pro divergenci tohoto tenzoru.

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j^2} \right)$$

2.46 Tzv. tenzor napětí T_{ij} lze zapsat například formou

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

kde $i, j = 1, 2, 3$ a v_i, v_j jsou složky vektoru rychlosti, p je skalární veličina (skalární tlak) a η je konstanta (koeficient dynamické viskozity). Pomocí Einsteinovy a vektorové symboliky napište výraz pro divergenci tohoto tenzoru.

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) = -\vec{\nabla} p + \eta \left[\Delta \vec{v} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right]$$

2.47 Tzv. tenzor viskózního (střihového) napětí σ_{ij} lze zapsat například formou

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij},$$

kde $i, j, k = 1, 2, 3$, v_i, v_j, v_k jsou složky vektoru rychlosti a η i λ jsou konstanty (koeficient dynamické viskozity, koeficient dilatační viskozity). Pomocí Einsteinovy a vektorové symboliky napište výraz pro divergenci tohoto tenzoru.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} = \eta \Delta \vec{v} + (\eta + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

2.4 Kovariantní a kontravariantní transformace: ★

Působením metrického tenzoru dané soustavy (viz například rovnice (B.4), (B.3), (B.36) a (B.63) v příloze B) transformujeme složky vektorových a tenzorových veličin mezi tzv. *ko-variantní* a *kontravariantní* bází, které rozlišují kvantitativní chování dané geometrické nebo fyzikální entity při změně báze. Abychom zachovali velikost vektoru jako takovou, musí být složky vektorů (například polohy nebo rychlosti), jejichž rozměr je přímo úměrný měřítku báze, *kontra-variantní* vůči bázevým vektorům, zapisujeme je $\vec{V} = V^i \vec{e}_i$. Naopak, složky tzv. *duálních* vektorů, nazývaných také *kovektory* (například vektor gradientu, který má rozměr převrácené hodnoty vzdálenosti), musí být *ko-variantní* vůči změně báze, zapisujeme je $\vec{V} = V_i \vec{e}^i$. V zápisu se tedy formálně odlišují *spodní* nebo *horní* polohou indexů. V ortogonálních souřadných soustavách má tzv. *kovariantní metrický tenzor* $\boldsymbol{\eta}$ prvky g_{ij} pouze na hlavní diagonále (viz tzv. *Laméovy koeficienty*, rovnice (B.11)). Pro tzv. *kontravariantní metrický tenzor* $\boldsymbol{\eta}'$ s prvky g^{ij} vždy platí $\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}' = \mathbf{E}$, tedy $\boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\eta}^{-1}$, pro jejich prvky vždy platí (Einsteinova sumační konvence) $g_{ij}g^{ij} = \dim V$, tedy dimenze příslušného vektorového prostoru V . Metrický tenzor je vždy symetrický, platí tedy $g_{ij} = g_{ji}$, $g^{ij} = g^{ji}$. Obecně a explicitní vyjádření transformace vektoru V_i z kovariantní do kontravariantní báze lze tedy zapsat způsobem (viz Einsteinova sumační konvence):

$$V^j = g^{ji} V_i = g^{j1} V_1 + g^{j2} V_2 + g^{j3} V_3. \quad (2.61)$$

★ jsou označeny odstavce a příklady, určené primárně studentům vyšších ročníků bakalářského studia

Transformaci kovariantního tenzoru druhého řádu T_{ij} do kontravariantní báze zapíšeme následovně:

$$T_i^j = g^{jk} T_{ki} = g^{j1} T_{1i} + g^{j2} T_{2i} + g^{j3} T_{3i} \quad (\text{smíšený ko- a kontravariantní tenzor}), \quad (2.62)$$

$$T^{ij} = g^{im} g^{jn} T_{mn} = g^{i1} g^{j1} T_{11} + g^{i1} g^{j2} T_{12} + g^{i1} g^{j3} T_{13} + g^{i2} g^{j1} T_{21} + \dots + g^{i3} g^{j3} T_{33}. \quad (2.63)$$

Analogickým způsobem proběhne transformace tenzorů libovolného vyššího řádu. Smíšený metrický tenzor s prvky $g_i^j = g_j^i$ je vždy reprezentován jednotkovou maticí.

V trojrozměrném prostoru jsou rozlišovány tzv. *axiální vektory* (*pseudovektory*), které se nezrcadlí spolu se souřadnou soustavou (na rozdíl od tzv. *polárních* neboli *pravých* vektorů, které se zrcadlí) a které můžeme definovat jako pseudotenzor V_i duální k *antisymetrickému* tenzoru T_{jk} ,

$$V_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} T_{jk}, \quad \text{tedy} \quad V_i = \frac{1}{2} (T_{jk} - T_{kj}) = T_{jk} \quad (\text{kde } i \neq j \neq k), \quad (2.64)$$

kde jednotlivé prvky tenzoru T_{jk} jsou definovány jako $T_{jk} = A_j B_k - A_k B_j$, v \mathbb{R}^3 je tedy můžeme považovat za odpovídající složky vektorového součinu $\vec{A} \times \vec{B}$. Obdobným způsobem definujeme v plochém čtyřrozměrném prostoročase, jehož metrický (*Minkowskiho*) tenzor má tvar

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

antisymetrický pseudotenzor druhého řádu (tzv. *Hodgeova dualita*, značíme ${}^* \mathbf{T}$), který je duální s antisymetrickým tenzorem druhého řádu a antisymetrický pseudotenzor třetího řádu, který je duální s vektorem

$${}^* T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} T_{\rho\sigma}, \quad {}^* T^{\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} V_\sigma. \quad (2.66)$$

Pro výchozí permutaci Levi-Civitova symbolu v kovariantní bázi (v rámci zde zavedené konvence, srovnej také například [Lenc \(2001\)](#)) platí $\varepsilon_{0123} = 1$. Pro výchozí permutaci v kontravariantní bázi pak musí platit $\varepsilon^{0123} = g^{00} g^{11} g^{22} g^{33} \varepsilon_{0123}$, kde $g^{\mu\nu}$ jsou nenulové prvky Minkowskiho metrického tenzoru z rovnice (2.65), a tedy $\varepsilon^{0123} = -1$ (stejným způsobem lze s použitím rovnice (B.4) odvodit, že v plochém trojrozměrném prostoru platí $\varepsilon_{123} = \varepsilon^{123} = 1$). Pro podrobnější studium tenzorové algebry doporučuji například [Young \(1993\)](#); [Kvasnica \(2004\)](#); [Arfken & Weber \(2005\)](#).

• **Příklady** (uvažujeme vždy kartézskou ortonormální bázi daného vektorového prostoru) :

2.48 ★ Kovariantní metrický tenzor g_{ij} válcové souřadné soustavy v pořadí souřadnicových směrů r, ϕ, z , je vyjádřen maticí (viz rovnice (B.36))

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obdobný kovariantní metrický tenzor kulové souřadné soustavy v pořadí souřadnicových směrů r, θ, ϕ , je vyjádřen maticí (viz rovnice (B.63))

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Určete:

- (a) všechny nenulové tzv. *Christoffelovy symboly* $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ válcové soustavy (určující *křivost* dané metriky), které jsou obecně definovány předpisem (na rozdíl od rovnice (B.12) musíme v časoprostoru rozlišovat kovariantní a kontravariantní báze polohového vektoru, $x_{\mu} = (ct, -\vec{r})$ a $x^{\mu} = (ct, \vec{r})$)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda} \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right),$$

- (b) všechny nenulové Christoffelovy symboly kulové soustavy, definované rovněž předpisem (B.12),
(c) explicitní tvar vektoru rotace vektoru \vec{A} ve válcové soustavě, obecně daný předpisem (viz také rovnice (B.20))

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \epsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (h_k A_k) \right] \vec{e}_i,$$

- (d) explicitní tvar vektoru rotace vektoru \vec{A} v kulové soustavě, obecně daný stejným předpisem.

(a) $\Gamma_{\phi\phi}^r = -r, \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r},$

(b) $\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r}, \Gamma_{\phi\phi}^r = -r \sin^2 \theta, \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta, \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cotg \theta,$

(c) viz relace (B.45) v příloze B,

(d) viz relace (B.71) v příloze B.

2.49 ★ Jsou zadány kovariantní tenzor A_{ij} a kovariantní metrický tenzor g_{ij} dané souřadné soustavy, v pořadí souřadnicových směrů r, θ, ϕ , ve tvaru

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Určete:

- (a) smíšený metrický tenzor g_j^i a smíšený tenzor A_j^i ,
(b) kontravariantní tenzor A^{ij} .

(a) $g_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_j^i, \quad A_j^i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{a_{21}}{r^2} & \frac{a_{22}}{r^2} & \frac{a_{23}}{r^2} \\ \frac{a_{31}}{r^2 \sin^2 \theta} & \frac{a_{32}}{r^2 \sin^2 \theta} & \frac{a_{33}}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix},$

(b) $A^{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{r^2} & \frac{a_{13}}{r^2 \sin^2 \theta} \\ \frac{a_{21}}{r^2} & \frac{a_{22}}{r^4} & \frac{a_{23}}{r^4 \sin^2 \theta} \\ \frac{a_{31}}{r^2 \sin^2 \theta} & \frac{a_{32}}{r^4 \sin^2 \theta} & \frac{a_{33}}{r^4 \sin^4 \theta} \end{pmatrix}.$

2.50 ★ Ve čtyřrozměrném prostoru (prostorově) jsou zadány kovariantní tenzor $A_{\mu\nu}$ a kovariantní metrický tenzor $g_{\alpha\beta}$ dané souřadné soustavy, v pořadí souřadnicových směrů t, u, v, w , ve tvaru

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w \\ 0 & 0 & u^2 & 0 \\ 0 & w & 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Určete:

- kontravariantní metrický tenzor $g^{\alpha\beta}$ a smíšený metrický tenzor g^α_β ,
- smíšený tenzor A^μ_ν ,
- kontravariantní tenzor $A^{\mu\nu}$.

$$(a) \quad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u^2}{u^2 - w^2} & 0 & \frac{w}{w^2 - u^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{u^2} & 0 \\ 0 & \frac{w}{w^2 - u^2} & 0 & \frac{1}{u^2 - w^2} \end{pmatrix}, \quad g^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} = \delta^\alpha_\beta,$$

$$(b) \quad A^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -a_{00} & -a_{01} & -a_{02} & -a_{03} \\ \frac{u^2 a_{10} - w a_{30}}{u^2 - w^2} & \frac{u^2 a_{11} - w a_{31}}{u^2 - w^2} & \frac{u^2 a_{12} - w a_{32}}{u^2 - w^2} & \frac{u^2 a_{13} - w a_{33}}{u^2 - w^2} \\ \frac{a_{20}}{u^2} & \frac{a_{21}}{u^2} & \frac{a_{22}}{u^2} & \frac{a_{23}}{u^2} \\ \frac{w a_{10} - a_{30}}{w^2 - u^2} & \frac{w a_{11} - a_{31}}{w^2 - u^2} & \frac{w a_{12} - a_{32}}{w^2 - u^2} & \frac{w a_{13} - a_{33}}{w^2 - u^2} \end{pmatrix},$$

$$(c) \quad A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{u^2 a_{10} - w a_{30}}{w^2 - u^2} & -\frac{a_{20}}{u^2} & \frac{w a_{10} - a_{30}}{u^2 - w^2} \\ \frac{u^2 a_{01} - w a_{03}}{w^2 - u^2} & \frac{u^4 a_{11} + w^2 a_{33} - u^2 w \mathcal{S}}{(w^2 - u^2)^2} & \frac{u^2 a_{21} - w a_{23}}{u^2(u^2 - w^2)} & \frac{u^2 a_{31} + w^2 a_{13} - w \mathcal{T}}{(u^2 - w^2)^2} \\ -\frac{a_{02}}{u^2} & \frac{u^2 a_{12} - w a_{32}}{u^2(u^2 - w^2)} & \frac{a_{22}}{u^4} & \frac{a_{32} - w a_{12}}{u^2(u^2 - w^2)} \\ \frac{w a_{01} - a_{03}}{u^2 - w^2} & \frac{u^2 a_{13} + w^2 a_{31} - w \mathcal{T}}{(u^2 - w^2)^2} & \frac{a_{23} - w a_{21}}{u^2(u^2 - w^2)} & \frac{a_{33} + w^2 a_{11} - w \mathcal{S}}{(w^2 - u^2)^2} \end{pmatrix},$$

kde $\mathcal{T} = u^2 a_{11} + a_{33}$ a $\mathcal{S} = a_{13} + a_{31}$.

2.51 ★ Kovariantní tenzor elektromagnetického pole $F_{\mu\nu}$ je definován,

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu},$$

kde tzv. *čtyřpotenciál* (čtyřvektor elektromagnetického potenciálu) $A_\mu = \left(\frac{\phi}{c}, -\vec{A} \right)$.

Složka $A_0 = \frac{\phi}{c}$ vyjadřuje škálovaný skalární potenciál elektrického pole a složky A_1, A_2, A_3

tvoří tzv. vektorový (magnetický) potenciál. Kovariantní čtyřvektor souřadnic události zapíšeme jako $x_\mu = (ct, -\vec{r})$. Metrický tenzor (*Minkowskiho*) plochého čtyřprostoru (prostor času) je dán rovnicí (2.65) a formalismus Levi-Civitova symbolu ϵ je popsán ve vysvětlujícím textu této podkapitoly. Vektory elektrické intenzity a magnetické indukce jsou definovány jako

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Napište:

- explicitní podobu tenzoru $F_{\mu\nu}$ a tenzoru $F^{\mu\nu}$,
- duální tenzor ${}^*F_{\mu\nu}$ a duální tenzor ${}^*F^{\mu\nu}$,
- tzv. *invarianty* elektromagnetického pole $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ a $F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu}$,
- pomocí „čtyřrozměrné“ divergence

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial {}^*F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

odvoďte první pár Maxwellových rovnic,

- pomocí „čtyřrozměrné“ divergence

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\mu_0 j^\mu,$$

kde j^μ je kontravariantní čtyřvektor proudové hustoty $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$, odvoďte druhý pár Maxwellových rovnic.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad F_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, & F^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{(b)} \quad {}^*F_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}, & {}^*F^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{(c)} \quad F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -2 \left(\frac{E^2}{c^2} - B^2 \right), & F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu} &= 4 \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c}, \\ \text{(d)} \quad \frac{\partial {}^*F^{0\nu}}{\partial x^\nu} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, & \frac{\partial {}^*F^{i\nu}}{\partial x^\nu} &= -\vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \text{(e)} \quad \frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, & \frac{\partial F^{i\nu}}{\partial x^\nu} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_0 \vec{j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}. \end{aligned}$$

2.52 ★ Kontravariantní tenzor energie-hybnosti $T^{\alpha\beta}$ pro makroskopickou ideální tekutinu je definován

$$T^{\alpha\beta} = (\varepsilon + p) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta},$$

kde $\varepsilon = \rho c^2$ je hustota energie (ρ je hustota hmoty), p je skalární tlak a u^μ je tzv. *čtyřrychlost* (čtyřvektor rychlosti), definovaná zde jako tečna k tzv. *světováře* s , tedy $u^\mu = dx^\mu/ds$, kde $s = c\tau$. Tzv. *vlastní čas* τ v soustavě spojené s pohybujícím se tělesem je pomocí tzv. souřadnicového času t (tj. „normálního“ času pozorovatele) definován jako $t = \gamma\tau$, kde tzv. Lorentzův faktor $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ (viz také příklad 9.8). Čtyřvektor události x^μ a metrický tenzor Minkowského prostoročasu $g^{\mu\nu}$ lze odvodit pomocí jejich definice v příkladu 2.51 a v rovnici (2.65). Napište:

- explicitní podobu tenzoru $T^{\alpha\beta}$ a tenzoru $T_{\alpha\beta}$,
- explicitní podobu těchto tenzorů v soustavě (0), spojené s pohybující se tekutinou.
- pomocí „čtyřrozměrné“ divergence tenzoru energie-hybnosti $T^{\alpha\beta}$ pro „prach“, tj. soubor částic, které na sebe vzájemně nepůsobí,

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0,$$

odvoďte rovnice kontinuity a hybnosti „bezsrážkové“ tekutiny.

Pomocí výrazů: $W = \gamma^2 \left(\varepsilon + \frac{v^2}{c^2} p \right)$, $S^i = \gamma^2 (\varepsilon + p) v^i$, $\sigma^{ij} = \frac{\gamma^2}{c^2} (\varepsilon + p) v^i v^j + p \delta^{ij}$,
 $\sigma_{ij} = \frac{\gamma^2}{c^2} (\varepsilon + p) v_i v_j + p \delta_{ij}$, můžeme zapsat,

$$(a) \quad T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} W & -\frac{S_x}{c} & -\frac{S_y}{c} & -\frac{S_z}{c} \\ -\frac{S_x}{c} & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ -\frac{S_y}{c} & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ -\frac{S_z}{c} & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} W & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ \frac{S_x}{c} & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \frac{S_y}{c} & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \frac{S_z}{c} & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

kde $S_i = -S^i$ a $\sigma_{ij} = \sigma^{ij}$ pro $i, j = 1, 2, 3$,

$$(b) \quad T^{\alpha\beta}(0) = T_{\alpha\beta}(0) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix},$$

$$(c) \quad \frac{\partial T^{0\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial T^{i\beta}}{\partial x^\beta} \Big|_{i=1,2,3} = \frac{\partial \tilde{\rho} \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \vec{v} \otimes \vec{v}) = 0,$$

kde „bezsrážkovost“ předpokládá $p = 0$, hustota $\tilde{\rho} = \gamma^2 \rho$, odpovídající soustavě kde $\vec{v} \neq 0$, je daná podílem hmotnosti $\tilde{m} = \gamma m$ (srovnej příklad 9.8) a objemu $\tilde{V} = V/\gamma$ (veličiny ρ , m a V odpovídají soustavě, kde $\vec{v} = 0$).

• Tenzory v zakřiveném prostoročase

V obecné relativitě (GR) zavádíme a používáme metrické tenzory zakřiveného prostoročasu. Známá Schwarzschildova metrika popisuje geometrii prostoročasu ve velmi silném gravitačním poli, například v blízkosti (sféricky symetrické, nerotující) černé díry. V souladu s již dříve zvolenou konvencí $+ - - -$, metrický tenzor Schwarzschildovy metriky (v pořadí souřadnic t, r, θ, ϕ) má kanonický tvar

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM_{\bullet}}{c^2 r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM_{\bullet}}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

kde M_{\bullet} je hmotnost sférického gravitujícího objektu (zdroje gravitace), G je gravitační konstanta a c je rychlost světla (často používané výrazy $1 - \frac{2M_{\bullet}}{r}$ v takzvaném “systému přirozených jednotek” pokládají hodnoty konstant G a c rovny jedné). Kontravariantní tvar metrického tenzoru $g^{\mu\nu}$ bude vyjádřen pomocí převrácených hodnot výrazů na hlavní diagonále.

Christoffelovy symboly $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ Schwarzschildovy metriky (popisující křivost prostoročasu), které jsou obecně vyjádřeny jako (viz také rovnice (B.12), zde ovšem rozlišíme kovariantní a kontravariantní čtyřvektory polohy $x_{\mu} = (ct, -\vec{r})$ a $x^{\mu} = (ct, \vec{r})$)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right), \quad (2.68)$$

budou (zapíšeme pouze nenulové členy)

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{GM_{\bullet}}{r(c^2 r - 2GM_{\bullet})}, \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{GM_{\bullet}(c^2 r - 2GM_{\bullet})}{c^4 r^3}, \quad \Gamma_{rr}^r = -\frac{GM_{\bullet}}{r(c^2 r - 2GM_{\bullet})}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\left(r - \frac{2GM_{\bullet}}{c^2}\right), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{(c^2 r - 2GM_{\bullet}) \sin^2 \theta}{c^2}, \quad \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cotg \theta. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Můžeme rovněž zkonstruovat Christoffelovy symboly se spodními indexy (někdy v literatuře nazývané Christoffelovy symboly prvního typu, zatímco výše uvedené se nazývají Christoffelovy symboly druhého typu), kdy snížení indexů provedeme pomocí $\Gamma_{\rho\mu\nu} = g_{\rho\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ttr} &= \Gamma_{trt} = \frac{GM_{\bullet}}{c^2 r^2}, \quad \Gamma_{rtt} = -\frac{GM_{\bullet}}{c^2 r^2}, \quad \Gamma_{rrr} = -\frac{GM_{\bullet} c^2}{(c^2 r - 2GM_{\bullet})^2}, \quad \Gamma_{r\theta\theta} = r, \quad \Gamma_{r\phi\phi} = r \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{\theta\theta r} &= \Gamma_{\theta r\theta} = -r, \quad \Gamma_{\phi\phi r} = \Gamma_{\phi r\phi} = -r \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{\theta\phi\phi} = r^2 \sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{\phi\phi\theta} &= \Gamma_{\phi\theta\phi} = -r^2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Pomocí Christoffelových indexů můžeme zkonstruovat *Riemannův (křivostní) tenzor* čtvrtého řádu $R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$ jako zásadní matematický nástroj v GR teorii, který reprezentuje slapové síly, které „pocituje“ částice (těleso), pohybující se po *geodetice* (nejkratší spojnici dvou bodů v *libovolně zakřiveném prostoru*). Jeho obecný výraz je $R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \partial_{\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda}$, (kde zjednodušený výraz ∂_{α} nadále znamená $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$) zahrnující první dva lineární členy (parciální derivace) a poslední dva členy jako nelineární součiny Christoffelových symbolů. Pomocí substituce $\frac{2GM_{\bullet}}{c^2} = r_s$ (takzvaný *Schwarzschildův poloměr* nebo také *poloměr horizontu události*), nenulové

členy Riemannova tenzoru Schwarzschildovy metriky budou

$$\begin{aligned}
R^t{}_{tr} &= 2R^{\theta}{}_{rr\theta} = 2R^{\phi}{}_{rr\phi} = -R^t{}_{rrt} = -2R^{\theta}{}_{r\theta r} = -2R^{\phi}{}_{r\phi r} = \frac{r_s}{r^2(r-r_s)}, \\
2R^t{}_{\theta\theta t} &= 2R^r{}_{\theta\theta r} = R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = -2R^t{}_{\theta t\theta} = -2R^r{}_{\theta r\theta} = -R^{\phi}{}_{\theta\theta\phi} = \frac{r_s}{r}, \\
2R^t{}_{\phi\phi t} &= 2R^r{}_{\phi\phi r} = R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = -2R^t{}_{\phi t\phi} = -2R^r{}_{\phi r\phi} = -R^{\theta}{}_{\phi\phi\theta} = \frac{r_s \sin^2 \theta}{r}, \\
R^r{}_{tr} &= 2R^{\theta}{}_{t\theta t} = 2R^{\phi}{}_{t\phi t} = -R^r{}_{trt} = -2R^{\theta}{}_{tt\theta} = -2R^{\phi}{}_{tt\phi} = c^2 \frac{r_s(r-r_s)}{r^4}. \tag{2.71}
\end{aligned}$$

Pomocí kontrakce $R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$ Riemannova tenzoru zkonstruujeme symetrický *Ricciho (křivostní) tenzor* $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$, který odráží míru lokální deformace daného metrického tenzoru ve srovnání s Eukleidovským (nebo pseudo-Eukleidovským) prostorem. Z definice tenzorové kontrakce můžeme zkonstruovat Ricciho tenzor přímo použitím Christoffelových symbolů jako $R_{\mu\nu} = \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho} + \Gamma^{\rho}{}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho}$. V případě Schwarzschildovy metriky bude Ricciho tenzor $R_{\mu\nu} = 0$.

Každému bodu Riemannovské variety (libovolně zakřiveného topologického prostoru, na kterém je možné měřit vzdálenosti bodů a úhly tečných vektorů) můžeme přiřadit jedno reálné číslo, dané geometrií metriky v okolí tohoto bodu, takzvaný *Ricciho skalár* R , definovaný jako $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Výchýše popsaný matematický formalismus nám nyní umožní sestavit kompletní Einsteinovy rovnice pole (pro jednoduchost zde vynecháme kosmologickou konstantu Λ)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{2.72}$$

kde celá levá strana je často označována jako *Einsteinův tenzor* $G_{\mu\nu}$ a kde $T_{\mu\nu}$ je tenzor energie-hybnosti (viz příklad 2.52). „Ruční“ počítání takto rozsáhlých tenzorů bývá velmi pracné a náchylné k chybám či opomenutím, v současnosti existuje řada programů, umožňujících analytické i numerické počítání s tenzory v libovolné metrice (například MATHEMATICA, Pythonovské aplikace a podobně).

Kapitola 3

Obyčejné diferenciální rovnice¹

3.1 Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obyčejné diferenciální rovnice obsahují derivace funkce jedné nezávislé proměnné (zpravidla značíme x , závisle proměnnou obvykle značíme $y(x)$). Obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu můžeme obecně zapsat ve tvaru

$$f(y^{(n)}, \dots, y'', y', y, x) = 0, \quad (3.1)$$

kde $y^{(k)}$ značí k -tou derivaci funkce $y(x)$. Obyčejnými *lineárními* diferenciálními rovnicemi nazýváme rovnice v obecném tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \quad (3.2)$$

Pokud obyčejnou diferenciální rovnici nelze zapsat ve tvaru (3.2), jedná se o *nelineární* obyčejnou diferenciální rovnici. Členy $a_k(x)$ v rovnici (3.2) jsou *koeficienty*, které mohou být funkcemi proměnné x , pokud jsou konstantní, mluvíme o diferenciální rovnici s *konstantními koeficienty*, a funkce $f(x)$ představuje pravou stranu diferenciální rovnice. Pokud $f(x) = 0$, potom se jedná o *homogenní diferenciální rovnici* (rovnici bez pravé strany). Diferenciální rovnice s derivacemi funkcí více nezávislých proměnných nazýváme *parciální* diferenciální rovnice. *Řád* diferenciální rovnice je dán nejvyšším řádem derivace závisle proměnné $y(x)$, který se v rovnici vyskytuje, v případě rovnic 1. řádu půjde o 1. derivaci $y' = dy/dx$.

3.1.1 Rovnice separovatelné a homogenní

Pokud lze diferenciální rovnici 1. řádu vyjádřit v jednoduchém tvaru $y' = f(x)$, řešíme ji přímou integrací, tj.

$$y = \int f(x) dx. \quad (3.3)$$

Pokud lze diferenciální rovnici 1. řádu vyjádřit ve tvaru $y' = f(x)g(y)$, kde $g(y) \neq 0$, řešíme ji rozdělením funkcí s nezávisle proměnnou x a se závisle proměnnou y na různé strany rovnice (*separací proměnných*), tedy

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx. \quad (3.4)$$

¹Návody k řešení různých typů diferenciálních rovnic je možné nalézt v literatuře, např. v publikacích: Tenenbaum & Pollard (1985), Ráb (1989), Plch (2002), Bartsch (2008), Rektorys (2009).

Funkci $f(x, y)$ nazýváme *homogenní, n -tého stupně*, pokud pro všechna x, y a pro všechna $z > 0$, kde z je libovolný parametr, platí $f(zx, zy) = z^n f(x, y)$. Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (3.5)$$

je homogenní, pokud $M(x, y)$ a $N(x, y)$ jsou homogenní funkce stejného stupně. Pokud je homogenní rovnice zapsána v obecném tvaru (3.5), resp. ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (3.6)$$

řešíme ji vhodnou substitucí, například $y = zx$ a převedeme na separovatelnou rovnici. Obdobně rovnici ve tvaru

$$y' = f(ax + by + c), \quad (3.7)$$

kde a, b, c , jsou konstanty, převedeme na rovnici se separovatelnými proměnnými pomocí substituce $z = ax + by + c$. Rovnice ve tvaru racionální funkce (kde A, B, C , jsou rovněž konstanty),

$$y' = \frac{ax + by + c}{Ax + By + C}, \quad (3.8)$$

pokud výrazy $ax + by$, $Ax + By$ nejsou lineárně závislé, řešíme eliminací absolutních členů c, C pomocí substituce $u = x - x_0$, $v = y - y_0$, kde x_0, y_0 jsou kořeny soustavy rovnic $ax + by + c = 0$, $Ax + By + C = 0$ a následným převedením na tvar rovnice (3.6). Pokud výrazy $ax + by$, $Ax + By$ jsou lineárně závislé (soustava nemá řešení), soustavu řešíme pomocí substituce $ax + by = z$ (nebo $Ax + By = z$), která umožní její následné převedení na tvar rovnice (3.6).

Řešení diferenciálních rovnic 1. řádu obsahují vždy jednu nezávislou (integrační) konstantu. Její hodnotu získáme z tzv. *počáteční* (Cauchyho) *podmínky*, kdy $y(x_p) = y_p$.

• Příklady:

$$3.1 \quad y' + 2y = 0$$

$$y = C e^{-2x}, \quad y = 0$$

$$3.2 \quad y' + 3y - 7 = 0$$

$$y = C e^{-3x} + \frac{7}{3}$$

$$3.3 \quad y' + y + xy = 0$$

$$y = C e^{-x(1+x/2)}, \quad y = 0$$

$$3.4 \quad y'xy^2 = \ln x$$

$$y^3 = \frac{3}{2} \ln^2 x + C, \quad x > 0$$

$$3.5 \quad y' = y^2 + 1, \quad y(0) = 1$$

$$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad x \neq \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3.6 \quad y' = y e^{3x}, \quad y(0) = 1$$

$$y = e^{(e^{3x}-1)/3}$$

$$3.7 \quad y' = \frac{y+1}{x^{3/2}}$$

$$y = C e^{-2/\sqrt{x}} - 1, \quad x > 0$$

$$3.8 \quad y' = (y^2 - 1)x, \quad y(0) = 0$$

$$y = \frac{1 - e^{x^2}}{1 + e^{x^2}}$$

$$3.9 \quad y' = 2\frac{y}{x}, \quad y(1) = 2 \qquad y = 2x^2, \quad y = 0, \quad x \neq 0$$

$$3.10 \quad y' = \frac{y}{x} + x, \quad y(1) = 0 \qquad y = x^2 - x, \quad x \neq 0$$

- 3.11 Množství bakterií n v bakteriálním kmeni roste s časem přímo úměrně jejich celkovému počtu ($\Delta n/\Delta t \propto n$). Pokud je v některém okamžiku jejich počet $n = 10^6$ a o dvě hodiny později $n = 4 \times 10^6$, najděte funkci popisující závislost počtu bakterií na čase.

$$n = 10^6 e^{t \ln 2}, \quad \text{kde } t \text{ je čas v hodinách}$$

- 3.12 Radioaktivní prvek se rozpadá s poločasem rozpadu 100 let. Pokud je v některém okamžiku hmotnost tohoto prvku ve vzorku látky $m = 2$ kg, najděte funkci popisující závislost hmotnosti tohoto prvku ve vzorku látky na čase. Za jak dlouho od výchozího okamžiku bude ve vzorku zbývat pouze 0,1 kg tohoto radioaktivního prvku?

$$m = 2 e^{-t(\ln 2)/100} \text{ kg, kde } t \text{ je čas v letech; po cca 432 letech}$$

- 3.13 Rovnice hydrostatické rovnováhy pro tekutinu (kapalinu, plyn) v homogenním gravitačním poli má tvar $dP(z)/dz = -\rho(z)g$, kde $P(z)$ je tlak, z je výška nad nějakou pevně zvolenou referenční úrovní z_0 , $\rho(z)$ je hustota a g je konstantní gravitační zrychlení. V případě ideálního plynu je jeho stavová rovnice $P = \rho RT/M$, kde R je molární plynová konstanta, T je teplota a M je konstantní tzv. molární hmotnost daného plynu. Najděte funkce popisující závislost tlaku a hustoty ideálního plynu na výšce, budeme-li pro jednoduchost uvažovat konstantní teplotu a označíme-li $P(z_0) = P_0$ a $\rho(z_0) = \rho_0$ (tzv. barometrickou rovnici).

$$P = P_0 e^{-Mgz/(RT)}, \quad \rho = \rho_0 e^{-Mgz/(RT)}$$

- 3.14 Těleso o hmotnosti 5 kg padá z klidu volným pádem, přičemž síla vyvolaná odporem vzduchu je přímo úměrná okamžité rychlosti pádu. Určete konstantu úměrnosti b odporové síly, pokud byla naměřena konečná rychlost pádu $v_\infty = 100 \text{ m s}^{-1}$. Pro jednoduchost uvažujte velikost gravitačního zrychlení $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

$$b = 0,5 \text{ kg s}^{-1}$$

- 3.15 Těleso o libovolné hmotnosti padá z klidu volným pádem, přičemž síla vyvolaná odporem vzduchu je

- (a) přímo úměrná okamžité rychlosti pádu,
 (b) přímo úměrná druhé mocnině okamžité rychlosti pádu.

V obou případech byla naměřena konečná rychlost pádu v_∞ o velikosti 100 m s^{-1} . Za jak dlouho dosáhne toto těleso okamžité rychlosti rovné polovině konečné rychlosti v_∞ ? Pro jednoduchost uvažujte velikost gravitačního zrychlení $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Za jak dlouho dosáhne toto těleso okamžité rychlosti rovné 90% konečné rychlosti v_∞ ? Pro porovnání ještě stanovte časy, za které by těleso dosáhlo stejných rychlostí ve vakuu.

$$(a) \quad 0,5 v_\infty \text{ dosáhne za } 10 \ln 2 \text{ s} \approx 6,93 \text{ s}, \quad 0,9 v_\infty \text{ dosáhne za } 10 \ln 10 \text{ s} \approx 23 \text{ s}$$

$$(b) \quad 0,5 v_\infty \text{ dosáhne za } 5 \ln 3 \text{ s} \approx 5,49 \text{ s}, \quad 0,9 v_\infty \text{ dosáhne za } 5 \ln 19 \text{ s} \approx 14,72 \text{ s}$$

Jak to, že při tomto zadání jsou časy dosažené v případě (b) kratší než v případě (a), když odporová síla by měla být větší (je přímo úměrná druhé mocnině okamžité rychlosti)?

- 3.16 $\frac{yy'}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ $\sqrt{1+y^2} = C - \sqrt{1+x^2}$
- 3.17 $(x^2 - 1)y^3 - e^x y' = 0$ $y = 0 \vee \frac{1}{2y^2} - (x+1)^2 e^{-x} = C, y \neq 0$
- 3.18 $y' = 3^{3x+2y}, y(0) = 1$ $y = -\frac{\log_3\left(\frac{7}{9} - \frac{2}{3} \cdot 3^{3x}\right)}{2}, x < \frac{1}{3} \log_3 \frac{7}{6}$
- 3.19 $x^2(y^3 + 5) dx + (x^3 + 5)y^2 dy = 0, y(0) = 1$ $(y^3 + 5)(x^3 + 5) = 30$
- 3.20 $y' = \cos(x - y), y(0) = \frac{\pi}{2}$ $y = x + 2 \operatorname{arccotg}(x + 1)$
- 3.21 $x^2 \left(y' - \frac{1}{\ln x} \right) = xy$ $y = x \ln(C |\ln x|), x > 0, C > 0, x \neq 1$
- 3.22 $y' = \sqrt{2x + y - 3}, y(0) = 3$
 $2(\sqrt{2x + y - 3} + 2) - 4 \ln(\sqrt{2x + y - 3} + 2) = x - (4 \ln 2 - 4), 2x + y - 3 \geq 0$
- 3.23 $(x + y)^2 y' = 4, y(0) = 2$ $y = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x + y}{2} \right) - \frac{\pi}{2} + 2$
- 3.24 $y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right)$ $y = x e^{Cx}, \frac{y}{x} > 0$
- 3.25 $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$
 $y = 0 \vee \sin \frac{y}{x} = Cx, x \neq 0, y \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2} x, k \in \mathbb{Z}$
- 3.26 $x^2 y' = xy + \ln x$ $y = -\frac{2 \ln x + 1}{4x} + Cx, x > 0$
- 3.27 $xy' = y + \frac{y}{x}$ $y = Cx e^{-1/x} \vee y = 0, x \neq 0$
- 3.28 $x^3 y' = x^2 [y + \ln(x^2)]$ $y = -2(\ln |x| + 1) + Cx, x \neq 0$
- 3.29 $y' = 1 + (x - y)^2$ $y = x - \frac{1}{x + C}, x \neq -C$
- 3.30 $y' = (y + x) \ln(y + x) - 1$ $y = e^{C e^x} - x, x \in \mathbb{R}$
- 3.31 $y' = \frac{e^{(x+y)^2}}{x + y} - 1$ $y = \pm \sqrt{\ln \left(\frac{1}{C - 2x} \right)} - x, x \in (-\infty, C/2).$
- 3.32 $y' = e^{y+x^2} - 2x$ $y = \ln [(C - x)^{-1}] - x^2, x \in (-\infty, C).$
- 3.33 $y' = \frac{x + 2y - 7}{x - 3}$ $x + y - 5 = C(x - 3)^2, x \neq 3$

$$3.34 \quad y' = \frac{1 + 9x - 3y}{3x - y}$$

$$(3x - y)^2 + 2x = C, \quad y \neq 3x$$

$$3.35 \quad y' = \frac{2x - y + 3}{x - 2y + 3}$$

$$x^2 + y^2 - xy + 3x - 3y = C, \quad 2y \neq x + 3$$

$$3.36 \quad y' = \frac{x - y}{x + y}$$

$$y = \pm \sqrt{C + 2x^2} - x, \quad 2x^2 + C \geq 0$$

3.1.2 Lineární nehomogenní rovnice

Nehomogenní lineární diferenciální rovnici 1. řádu (nazývanou také „rovnice s pravou stranou“), zapsanou v obecném tvaru

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (3.9)$$

kde $Q(x) \neq 0$, řešíme metodou *variace konstanty* nebo metodou *integračního faktoru*. V prvním případě (*variace konstanty*) nejprve řešíme homogenní rovnici ve tvaru $y' + P(x)y = 0$, kdy její integrační konstantou C bude obecná funkce nezávisle proměnné $C(x)$, *obecné* řešení tedy bude

$$y = C(x) e^{-\int P(x) dx}. \quad (3.10)$$

Funkci $C(x)$ nalezneme dosazením rovnice (3.10) do rovnice (3.9), její tvar bude

$$C(x) = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + K, \quad (3.11)$$

kde K je konstanta. Takto získaný výraz pro funkci $C(x)$ dosadíme do rovnice (3.10), výsledné *partikulární* řešení bude

$$y = \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + K \right) e^{-\int P(x) dx}. \quad (3.12)$$

Metodou *integračního faktoru* nazýváme vynásobení celé rovnice výrazem $e^{\int P(x) dx}$, rovnice (3.9) tedy přejde do tvaru

$$y' e^{\int P(x) dx} + P(x)y e^{\int P(x) dx} = Q(x) e^{\int P(x) dx}. \quad (3.13)$$

Levá strana rovnice (3.13) ovšem představuje derivaci součinu, celou rovnici tedy můžeme přepsat do tvaru

$$\left(y e^{\int P(x) dx} \right)' = Q(x) e^{\int P(x) dx}, \quad (3.14)$$

jejíž přímou integrací opět získáváme řešení ve tvaru rovnice (3.12).

• Příklady:

$$3.37 \quad y' + 2xy = x e^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1$$

$$y = (\sin x - x \cos x + 1) e^{-x^2}$$

$$3.38 \quad y' + y \cos x = \cos x$$

$$y = C e^{-\sin x} + 1$$

$$3.39 \quad (1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$$

$$y = (x + C)(1 + x^2)$$

3.40 $y' - 6xy = 4x e^{3x^2}$, $y(0) = 1$

$$y = (2x^2 + 1) e^{3x^2}$$

3.41 $y' + 3x e^{3x} = -y + 7$, $y(0) = 7$

$$y = 7 + \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{4}x \right) e^{3x} - \frac{3}{16} e^{-x}$$

3.42 $xy' + y = x \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$y = \frac{\sin x - 1}{x} - \cos x, \quad x \neq 0$$

3.43 $y' = 2x + 3y + 2$, $y(0) = 0$

$$y = \frac{8}{9} (e^{3x} - 1) - \frac{2x}{3}$$

3.44 $y' = 4x^2 + 3y - 1$, $y(0) = 0$

$$y = \frac{1}{27} (1 - e^{3x}) - \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{9}x$$

3.45 $y' = 2x^2 - y + 1$, $y(0) = 0$

$$y = 2x^2 - 4x + 5(1 - e^{-x})$$

3.46 $y' = 2x^3 - y + 1$, $y'(0) = 0$

$$y = 2x^3 - 6x^2 - 11 + 12(x + e^{-x})$$

3.47 $y' = -\frac{4x}{x^2 + 1}y + \frac{1}{x^2 + 1}$, $y(0) = 1$

$$y = \frac{1}{3} (x^3 + 3x + 3) (x^2 + 1)^{-2}$$

3.48 Kovová mince je zahřátá na teplotu 1200°C , poté volně chladne. Po 2 minutách její teplota klesne na 900°C , přičemž stálá teplota okolního prostředí je 20°C . Za jakou dobu bude možné minci vzít do ruky (tj. kdy její teplota klesne pod 50°C)? Uvažujte časovou změnu teploty mince jako přímo úměrnou rozdílu její teploty a stálé teploty okolního prostředí.

za cca 25 minut

3.49 Těsto má teplotu okolního prostředí 20°C a je vloženo do pečící trouby, kde je vnitřní teplota 200°C . Po dvou hodinách, kdy je jeho teplota 90°C , je vytaženo a nechá se 30 minut volně chladnout. Jakou bude mít výslednou teplotu? Uvažujte stejný koeficient tepelné vodivosti a další fyzikální parametry uvnitř i vně trouby. Postupujte obdobně jako v příkladu 3.48.

cca 82°C

3.1.3 Bernoulliho rovnice

Bernoulliho rovnici nazýváme diferenciální rovnicí 1. řádu s n -tou mocninou závisle proměnné $y(x)$ ve tvaru

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = 0, \quad \text{kde } n \in \mathbb{R}, \quad (3.15)$$

která má i přes svoji nelinearitu analytické řešení. Pokud $n = 0$, přejde Bernoulliho rovnice na nehomogenní lineární rovnici (3.9), pro $n = 1$ přejde na jednoduše separovatelnou homogenní lineární rovnici (3.4). Pomocí substituce

$$z = y^{1-n} \quad \text{pro } n \neq 0, 1 \quad (3.16)$$

dostaneme nehomogenní lineární diferenciální rovnici 1. řádu typu (3.9) ve tvaru

$$z' + (1-n)p(x)z + (1-n)q(x) = 0. \quad (3.17)$$

• Příklady:

3.50 $y' = 6x^2y^3$

$$y^2 = \frac{1}{C - 4x^3}, y = 0, 4x^3 < C$$

3.51 $xy' - y = -xy^2$

$$y = \frac{2x}{x^2 + C}, y = 0, x^2 \neq -C$$

3.52 $y' + \frac{4}{x}y = x^3y^2$

$$y = \frac{1}{x^4(C - \ln|x|)}, y = 0, x \neq 0$$

3.53 $y' + \frac{y}{x} - \sqrt{y} = 0$

$$y = \left(\frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}}\right)^2, y = 0, x > 0, x^{\frac{3}{2}} \geq -3C$$

3.54 $y' + xy = xy^3, y^2(0) = \frac{1}{2}$

$$y^2 = (e^{x^2} + 1)^{-1}, y = 0$$

3.55 $xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = -1$

$$y = \frac{1}{1 + \ln x - 2x}, y = 0, x > 0$$

3.56 $2xyy' - y^2 = x^2, y(1) = 0$

$$y^2 - x^2 = x$$

3.57 $x^2y^2y' + xy^3 = 1, y(-2) = -1$

$$y^3 = \frac{2}{x^3} + \frac{3}{2x}, x \neq 0$$

3.1.4 Diferenciální rovnice exaktní

Rovnici ve tvaru (3.5) nazýváme *exaktní*, pokud výraz na její levé straně je totálním diferenciálem nějaké skalární (tzv. *kmenové*) funkce $F(x, y)$, tedy (podrobněji v kapitole 5.2)

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy. \quad (3.18)$$

Funkce $M(x, y)$, $N(x, y)$ z rovnice (3.5) odpovídají jednotlivým parciálním derivacím (tj. složkám *gradientu* - viz kapitola 5.1) skalární funkce $F(x, y)$ v pořadí podle rovnice (3.18). Pokud jsou obě funkce $M(x, y)$, $N(x, y)$ spojitě diferencovatelné, musí podle *Schwarzovy věty* o rovnosti smíšených derivací platit,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (3.19)$$

K vyřešení rovnice (3.5) je třeba najít kmenovou funkci $F(x, y)$, jejíž obecné řešení zpravidla zapíšeme ve tvaru $F(x, y) = C$. Pokud rovnice (3.19) neplatí, rovnice (3.5) není rovnicí exaktní. Pokud však nalezneme funkci $R(x, y)$ (tzv. *integrační faktor*) takovou, že platí

$$R(x, y) [M(x, y) dx + N(x, y) dy] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} [R(x, y)M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x} [R(x, y)N(x, y)], \quad (3.20)$$

rovnice (3.20) bude rovnicí exaktní. Pro spojitě diferencovatelné funkce $M(x, y) \neq 0, N(x, y) \neq 0$ takový integrační faktor $R(x, y)$ existuje.

● Příklady:

3.58 $2xy - 9x^2 + (2y + x^2 + 1)y' = 0$

$y^2 + (x^2 + 1)y - 3x^3 = C$

3.59 $(2xy + 6x)dx + (x^2 + 4y^3)dy = 0$

$x^2y + 3x^2 + y^4 = C$

3.60 $(8y - x^2y)y' + x - xy^2 = 0$

$\frac{1}{2}x^2(1 - y^2) + 4y^2 = C$

3.61 $(e^{4x} + 2xy^2)dx + (\cos y + 2x^2y)dy = 0$

$\frac{1}{4}e^{4x} + x^2y^2 + \sin y = C$

3.62 $(3x^2 + y \cos x)dx + (\sin x - 4y^3)dy = 0$

$x^3 + y \sin x - y^4 = C$

3.63 $x \operatorname{arctg} y dx + \frac{x^2}{2(1 + y^2)} dy = 0$

$\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} y = C$

3.64 $(2x + x^2y^3)dx + (x^3y^2 + 4y^3)dy = 0$

$x^2 + \frac{x^3y^3}{3} + y^4 = C$

3.65 $(2x^3 - 3x^2y + y^3)y' = 2x^3 - 6x^2y + 3xy^2$

$\frac{x^4}{2} - 2x^3y + \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{y^4}{4} = C$

3.66 $(y^2 \cos x - \sin x)dx + (2y \sin x + 2)dy = 0$

$y^2 \sin x + \cos x + 2y = C$

3.67 $2xy^2 dx + (3x^2y + 4)dy = 0$

$x^2y^3 + 2y^2 = C$

3.68 $(2y + 4x^2y^2)dx + (x + 2yx^3)dy = 0$

$x^2y + x^4y^2 = C$

3.69 $2xy dx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$

$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$

3.1.5 Riccatiova (Riccatiho) rovnice ★

I když se jedná o rovnici 1. řádu, v obecném případě ke svému řešení vyžaduje znalost postupů, uvedených v odstavci 3.2.2. Nelineární diferenciální rovnici 1. řádu ve tvaru

$$y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2, \quad (3.21)$$

kde $a_0(x) \neq 0$ a $a_2(x) \neq 0$, která obsahuje kvadratickou funkci závisle proměnné $y(x)$, nazýváme Riccatiho rovnicí (tento pojem má i širší význam, který zde dále neuvádím). Pokud $a_0(x) = 0$, rovnice přejde na Bernoulliovu diferenciální rovnici (odstavec 3.1.3), pokud $a_2(x) = 0$, rovnice se stává obyčejnou lineární diferenciální rovnicí 1. řádu (viz odstavec 3.1.2).

Rovnici (3.21) řešíme pomocí substituce $u = a_2(x)y$. V tom případě $u' = a_2'y + a_2y'$ a rovnice (3.21) přejde do tvaru

$$u' = a_0a_2 + \left(a_1 + \frac{a_2'}{a_2}\right)u + u^2. \quad (3.22)$$

Pomocí další substituce $u = -v'/v$ dostáváme $u' = -v''/v + (v'/v)^2$, rovnice (3.22) tak přejde do tvaru homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu (s nekonstantními koeficienty),

$$v'' - \left(a_1 + \frac{a_2'}{a_2}\right)v' + a_0a_2v = 0. \quad (3.23)$$

★ jsou označeny odstavce a příklady, určené primárně studentům vyšších ročníků bakalářského studia

Rovnici dále řešíme pomocí principů, uvedených v odstavci 3.2.2, původně hledanou funkci y potom nalezneme jako $y = -v'/(a_2v)$.

Pokud ovšem známe nebo nějakým způsobem uhodneme jedno řešení původní rovnice (3.21) (označíme je například y_1), potom pomocí substituce $y = y_1 + u$ přejde Riccatiova rovnice na rovnici Bernoulliou. Dosazením uvedené substituce do rovnice (3.21) dostáváme

$$y_1' + u' = a_0 + a_1y_1 + a_2y_1^2 + a_1u + a_2(2y_1u + u^2). \quad (3.24)$$

Protože y_1 je také řešením rovnice (3.21), platí $y_1' = a_0 + a_1y_1 + a_2y_1^2$, a tedy

$$u' = (a_1 + 2a_2y_1)u + a_2u^2, \quad (3.25)$$

což už je ale Bernoulliou rovnice pro $n = 2$ s neznámou funkcí u .

3.2 Lineární obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu

3.2.1 Rovnice s konstantními koeficienty

Lineární obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu (tj. obsahující 2. derivaci závisle proměnné $y(x)$) s konstantními koeficienty p, q řešíme v prvním kroku jako rovnici homogenní, kdy rovnici ve tvaru

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (3.26)$$

řešíme pomocí tzv. *charakteristické rovnice* $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Pro kořeny charakteristické rovnice $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ bude mít rovnice (3.26) řešení ve tvaru

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad \text{pro } \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad (3.27)$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} \quad \text{pro } \lambda_1 = \lambda_2. \quad (3.28)$$

Pro kořeny charakteristické rovnice $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ bude mít rovnice (3.26) řešení ve tvaru

$$y = C_1 e^{(\alpha - \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha + \beta i)x} = A e^{\alpha x} \cos \beta x + B e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (3.29)$$

Uvedené řešení lze zobecnit i pro diferenciální rovnice vyšších řádů: pro každý kořen charakteristické rovnice n -tého řádu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ s násobností Π bude mít rovnice (3.26) Π řešení ve tvaru

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} + \dots + C_{\Pi} x^{\Pi-1} e^{\lambda_{\Pi} x} \quad (3.30)$$

a pro každou dvojici kořenů charakteristické rovnice n -tého řádu $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ s násobností Π bude mít rovnice (3.26) Π řešení ve tvaru

$$y = e^{\alpha x} \cos \beta x (A_1 + A_2 x + \dots + A_{\Pi} x^{\Pi-1}) + e^{\alpha x} \sin \beta x (B_1 + B_2 x + \dots + B_{\Pi} x^{\Pi-1}). \quad (3.31)$$

Posloupnost lineárně nezávislých členů $y_1(x), \dots, y_n(x)$ v řešení homogenní rovnice představuje tzv. *fundamentální systém*.

Analogicky ke způsobu, popsanému v odstavci 3.1.2, můžeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice (rovnice s pravou stranou) ve tvaru

$$y'' + py' + qy = R(x) \quad (3.32)$$

metodou variace konstant, kdy rovnice (3.27), (3.28), resp. (3.29) napíšeme jako obecné řešení diferenciální rovnice, tedy

$$y = C_1(x) e^{\lambda_1 x} + C_2(x) e^{\lambda_2 x} = C_1 u_1 + C_2 u_2. \quad (3.33)$$

Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, které pro jednoduchost budeme dále psát jako C_1 , C_2 , u_1 , u_2 , opět nalezneme dosazením rovnice (3.33) do rovnice (3.32). Dostaneme tak jednu rovnici pro dvě neznámé funkce C_1 , C_2 ,

$$\begin{aligned} R(x) &= (C_1 u_1 + C_2 u_2)'' + p(C_1 u_1 + C_2 u_2)' + q(C_1 u_1 + C_2 u_2) \\ &= C_1 (u_1'' + p u_1' + q u_1) + C_2 (u_2'' + p u_2' + q u_2) + (C_1'' u_1 + 2C_1' u_1' + C_2'' u_2 + 2C_2' u_2') \\ &\quad + p(C_1' u_1 + C_2' u_2), \end{aligned} \quad (3.34)$$

kde první dva závorkované členy (násobené nederivovanými funkcemi C_1 , C_2) představují homogenní rovnice (3.26), rovnají se tedy souhrnně nule. Dostáváme tedy jednu rovnici pro dvě neznámé funkce C_1' a C_2' , kdy třetí závorka plus čtvrtá závorka (násobená koeficientem p) z rovnice (3.34) se rovnají pravé straně $R(x)$. Položíme-li výraz ve čtvrté závorce, $C_1' u_1 + C_2' u_2$, roven zcela libovolné funkci $f(x)$, kterou můžeme vždy chápat jako obecnou podmnožinu celkového řešení pravé strany, potom $C_1'' u_1 + C_1' u_1' + C_2'' u_2 + C_2' u_2' = f'(x)$ a rovnici (3.34) lze zapsat jako $C_1' u_1 + C_2' u_2 + p \cdot f(x) + f'(x) = R(x)$. Jestliže ovšem funkci $f(x)$ lze zvolit zcela libovolně, potom její nejjednodušší volba bude $f(x) = 0$ a tedy:

$$C_1' u_1 + C_2' u_2 = 0. \quad (3.35)$$

Protože funkce $f'(x)$ musí být také nulová, dosazením do rovnice (3.34) dostáváme výsledný systém dvou rovnic pro dvě neznámé funkce C_1' , C_2' ,

$$\begin{aligned} C_1' u_1 + C_2' u_2 &= 0, \\ C_1' u_1' + C_2' u_2' &= R(x). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Zapíšeme-li systém rovnic (3.36) pomocí tzv. *Wronského matice*, tj. ve tvaru

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R(x) \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

jejíž determinant $u_1 u_2' - u_2 u_1'$ (tzv. *wronskián*) značíme W , snadno nalezneme řešení systému rovnic (3.36), zapsané například jako

$$C_1 = - \int \frac{u_2 R(x)}{W} dx, \quad C_2 = \int \frac{u_1 R(x)}{W} dx. \quad (3.38)$$

Dosazením rovnice (3.38) do obecného řešení (3.33) dostaneme partikulární řešení obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu. V případě obyčejné diferenciální rovnice obecného (n -tého) řádu přejde rovnice (3.37) do podoby:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ R(x) \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

V případě, že pravá strana $R(x)$ nehomogenní rovnice bude mít formu (tzv. *speciální pravá strana*) obecně zapsanou jako

$$R(x) = [P_n(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x] e^{\alpha x}, \quad (3.40)$$

kde P_n a Q_n jsou polynomy nejvýše n -tého stupně (n je rovno vyššímu stupni obou polynomů P, Q), bývá často jednodušší nalézt řešení diferenciální rovnice tzv. metodou *neurčitých koeficientů*. Při hledání partikulárního řešení vyjdeme (bez ohledu na hodnoty koeficientů α a β , které mohou být i nulové, případně bez ohledu na to, jestli jeden z polynomů P_n, Q_n je nulový) z rovnice

$$y = [(A_p x^n + B_p x^{n-1} + \dots + C_p) \cos \beta x + (A_q x^n + B_q x^{n-1} + \dots + C_q) \sin \beta x] x^\Pi e^{\alpha x}, \quad (3.41)$$

kde Π je násobnost kořene $\lambda = \alpha + \beta i$ charakteristické rovnice (kde opět α, β mohou být nulové). Rovnici (3.40) dosadíme do rovnice (3.32) a obecné koeficienty $A_p, \dots, C_p, A_q, \dots, C_q$ porovnáme s koeficienty funkce $R(x)$, danými rovnicí (3.40).

Obecná řešení diferenciálních rovnic 2. řádu obsahují vždy dvě nezávislé konstanty. Jejich hodnoty získáme řešením tzv. okrajové úlohy, zadané formou *okrajových podmínek*, kdy pro dvě různá x_1, x_2 platí $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ (*Dirichletovy* okrajové podmínky) nebo $y'(x_1) = y_1, y'(x_2) = y_2$ (*Neumannovy* okrajové podmínky), případně jejich různé kombinace, například $y(x_1) = y_1, y'(x_1) = \alpha y_1$ nebo $y(x_1) = y_1, y'(x_2) = y_2$, kde $\alpha \neq 0$ je konstanta, atd. Podrobný výčet typů okrajových podmínek a jejich klasifikaci uvádí například (Arfken & Weber, 2005; Franců, 2011; Pospíšil, 2006).

• Příklady:

$$3.70 \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad y = e^x + x e^x (\ln |x| - 1), \quad x \neq 0$$

$$3.71 \quad y'' - 7y' + 12y = 5 \quad y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12}$$

$$3.72 \quad y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}} \\ y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x \ln(1 + e^{2x}) + e^{2x} \operatorname{arctg}(e^x)$$

$$3.73 \quad y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x + \sin x (1 + \ln |\sin x|), \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3.74 \quad y'' - 2y' = x^2 - x \quad y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{x^3}{6}$$

$$3.75 \quad y'' + y' = \frac{1}{1 + e^x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad y = 1 + x + (1 + e^{-x}) \ln \frac{2}{1 + e^x}$$

$$3.76 \quad y'' + y = \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{4} \quad y = \cos x + \sin x \left(1 + \frac{x}{2}\right)$$

$$3.77 \quad y'' - 2y' + 5y = e^x \cos x, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = \frac{10}{3} \quad y = \left(\cos 2x + \sin 2x + \frac{1}{3} \cos x\right) e^x$$

$$3.78 \quad y'' - 6y' + 9y = 4x e^{3x} \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad y = (1 - 7x + 8 \sin x - 4x \cos x) e^{3x}$$

$$3.79 \quad y'' + y' - 6y = 12x^2 + 2x + 1 \quad y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - 2x^2 - x - 1$$

$$3.80 \quad y'' + y' - 6y = 12x^2 - 2x + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad y = \frac{31}{45} e^{-3x} + \frac{6}{5} e^{2x} - 2x^2 - \frac{x}{3} - \frac{8}{9}$$

$$3.81 \quad y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \\ y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{x^2}{4} e^{-2x} (2 \ln x - 3), \quad x > 0$$

$$3.82 \quad y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln^2 x \\ y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{x^2}{2} e^{-2x} \left(\ln^2 x - 3 \ln x + \frac{7}{2} \right), \quad x > 0$$

$$3.83 \quad y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad y = e^{2x} (\cos x - 2 \sin x)$$

$$3.84 \quad y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad y = e^x \left(\cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right)$$

$$3.85 \quad y'' - 8y' + 32y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad y = e^{4x-2\pi} (\cos 4x - \sin 4x)$$

$$3.86 \quad y'' - 3y' + 2y = (x^4 + 1) e^x \\ y = \left(C_1 - \frac{x^5}{5} - x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 25x \right) e^x + C_2 e^{2x}$$

$$3.87 \quad y'' - 4y' + 5y = (x^2 + 2x) e^{2x} \cos x \\ y = e^{2x} \left[\left(C_1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right) \cos x + \left(C_2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} \right) \sin x \right]$$

$$3.88 \quad y'' - 3y' + 2y = (1 - 2x) e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad y = 3e^x - 2e^{2x} + (x^2 + x) e^x$$

$$3.89 \quad y'' - 2y' + y = (x + 1) e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad y = e^x \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x + 1 \right)$$

$$3.90 \quad y'' + 4y' + 4y = (6x + 2) e^{-2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad y = e^{-2x} (x^3 + x^2 + 2x + 1)$$

$$3.91 \quad y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad y = e^{-2x} (3x - \sin x + 1)$$

$$3.92 \quad y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad y = \frac{e^x}{2} [(2 - x) \cos x - \sin x]$$

$$3.93 \quad y'' - 2y' + 2y = x^2 + x + e^x \sin x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

$$y = e^x \left[\left(1 - \frac{x}{2} \right) \cos x + \sin x \right] + \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 1$$

3.94 Na nehmotné pružině je zavěšeno těleso o hmotnosti 3 kg. Působení síly 5,4 N na těleso prodlouží pružinu o 0,2 m. Poté je pružina i s tělesem uvolněna a ponechána volnému kmitání s nulovou počáteční rychlostí. Najděte (jednorozměrné) rovnice závislosti polohy

a rychlosti kmitajícího tělesa na čase, kdy souřadnici rovnovážné polohy označíme jako $x_0 = 0$ (vyjdeme z Hookova zákona $\vec{F} = -k\vec{x}$, kde $F = ma = m\ddot{x}$, rychlost kmitání \vec{v} můžeme vyjádřit jako $v = \dot{x}$).

$$x(t) = \frac{1}{5} \cos 3t, \quad v(t) = -\frac{3}{5} \sin 3t$$

3.95 Pohybová rovnice matematického kyvadla má nelineární tvar

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0,$$

kde θ je úhel jeho výchylky z rovnovážné (svislé) polohy, L je jeho délka (délka závěsu) a g je velikost gravitačního zrychlení. Pro malé výchylky můžeme použít lineární aproximaci $\sin \theta \approx \theta$ a diferenciální rovnice tak bude lineární. Uvažujte matematické kyvadlo s délkou závěsu 2,5 m, které je v čase $t = 0$ vychýleno o (rostoucí) úhel $\theta = 0,1$ rad a velikost jeho počáteční úhlové rychlosti je $\dot{\theta} = 0,25$ rad s⁻¹ (uvažujte pro jednoduchost $g = 10$ m s⁻²):

- Najděte rovnice závislosti polohy θ a úhlové rychlosti ω kyvadla na čase, kdy souřadnici rovnovážné polohy označíme jako $\theta_0 = 0$.
- Jaká bude velikost maximální výchylky kyvadla?
- V jakém čase dospěje poprvé kyvadlo do rovnovážné polohy a jaká zde bude velikost jeho obvodové rychlosti?

$$(a) \theta(t) = \frac{1}{10} \cos 2t + \frac{1}{8} \sin 2t, \quad \omega(t) = -\frac{1}{5} \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t$$

$$(b) \theta_{\max} \approx 0,160 \text{ rad}$$

$$(c) t(\theta_0) \approx 1,233 \text{ s}, \quad v(\theta_0) \approx 0,8 \text{ m s}^{-1}$$

3.96 Předpokládejme, že kmity pružiny z příkladu 3.94 jsou tlumené, kdy tlumící síla je přímo úměrná rychlosti (velikost) a působí proti směru pohybu, s konstantou úměrnosti $c = 1$ kg s⁻¹ (dostáváme tak rovnici $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$). Najděte rovnici závislosti polohy $x(t)$ na čase v tomto případě. Jaké omezení platí pro konstantu úměrnosti c útlumu, aby se vůbec jednalo o kmitání (viz obrázek 3.1)?

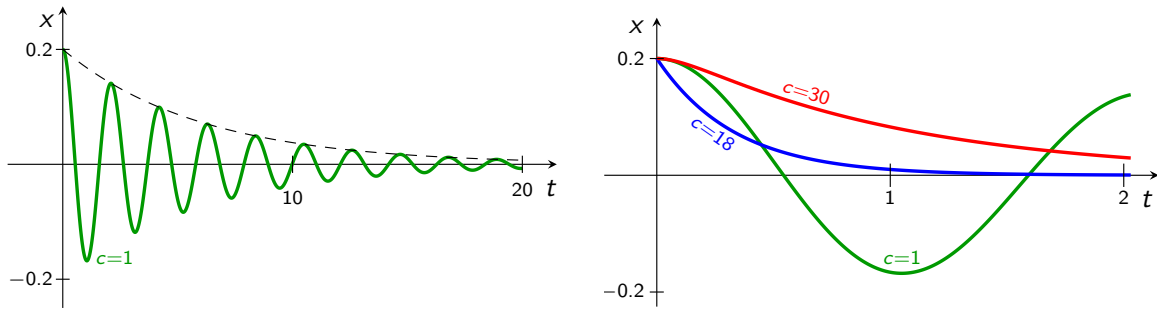
$$x(t) = e^{-\frac{1}{8}t} \left[\frac{1}{5} \cos \left(\frac{\sqrt{323}}{6} t \right) + \frac{1}{5\sqrt{323}} \sin \left(\frac{\sqrt{323}}{6} t \right) \right], \quad c < 18$$

3.97 Předpokládejme, že netlumené kmity pružiny s parametry z příkladu 3.94 jsou buzené harmonickou budící silou $F_b = F_0 \sin(2t)$, kde amplituda budící síly $F_0 = 21$ N. Dostáváme tak rovnici $m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(2t)$. Najděte rovnice závislosti polohy a rychlosti kmitajícího tělesa na čase v tomto případě.

$$x(t) = \frac{21 \sin 2t - 14 \sin 3t + 3 \cos 3t}{15}, \quad v(t) = \frac{14(\cos 2t - \cos 3t) - 3 \sin 3t}{5}$$

3.98 Předpokládejme, že tlumené kmity pružiny s tuhostí k , se zavěšeným tělesem o hmotnosti m a s konstantou útlumu c , jsou buzené harmonickou budící silou $F_b = F_0 \sin(2t)$. Najděte obecnou rovnici závislosti polohy kmitajícího tělesa na čase s podmínkou pro konstantu úměrnosti útlumu.

$$x(t) = \frac{F_0 [(k - 4m) \sin 2t - 2c \cos 2t]}{4c^2 + (k - 4m)^2} + e^{-\frac{c}{2m}t} \left(C_1 e^{\frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m}t} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m}t} \right), \quad c^2 < 4km$$



Obrázek 3.1: *Levý obrázek:* Graf tlumených kmitů podle výsledku příkladu 3.96 s konstantou úměrnosti tlumící síly $c = 1$ (podkritické tlumení, $c^2 < 4km$), vykreslený v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 20$. Přerušovaná čára, obalující graf tlumených kmitů (vyznačený silnou zelenou čarou), představuje funkci $x(t) = \frac{1}{5} e^{-ct/2m} = \frac{1}{5} e^{-t/6}$. *Pravý obrázek:* Výšeč stejného grafu podle příkladu 3.96, vykreslená v časovém intervalu od $t = 0$ do $t = 2$. Modrá čára zobrazuje tzv. kritické tlumení ($c^2 = 4km$), dané v tomto případě funkcí $x(t) = \frac{1}{5} e^{-3t}$, kdy oscilátor již nevykonává kmitů, nýbrž se za nejkratší možnou dobu ustálí v rovnovážné poloze. Červená čára zobrazuje tzv. nadkritické tlumení ($c^2 > 4km$), dané v tomto případě funkcí $x(t) = e^{-t}(9 - e^{-8t})/40$, kdy se opět jedná o neperiodický pohyb, při kterém se oscilátor vrací do své rovnovážné polohy pomaleji.

3.2.2 Rovnice s nekonstantními koeficienty ★

Obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu typu rovnice (3.32), kde koeficient $p = p(x)$ a kde koeficient $q = q(x) = 0$, můžeme řešit jejich převedením na rovnice 1. řádu závisle proměnné $z = y'$. Rovnice typu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x), \quad (3.42)$$

řešíme tak, že hledáme nějakou funkci $I(x)$ (integrační faktor) takovou, že pro $z = I(x)y$ rovnice (3.42) přejde do podoby rovnice s konstantními koeficienty

$$z'' + pz' + qz = R(x). \quad (3.43)$$

Obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu typu

$$y'' + p(y')^m y^n + qy^r = R(x)y^s, \quad (3.44)$$

kde m, n, r, s jsou konstanty, lze řešit nalezením takového $z = f(y)$, pro které opět platí rovnice (3.43).

● Příklady: ★

$$3.99 \quad y'' - \frac{2y'}{x} = x^2 + 1, \quad y(1) = -\frac{11}{12}, \quad y'(1) = 1 \quad y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 1, \quad x \neq 0$$

$$3.100 \quad xy'' + (x+2)y' + y = 0 \quad y = \frac{1}{x}(C_1 + C_2 e^{-x}), \quad y = 0, \quad x \neq 0$$

$$3.101 \quad xy'' - (3x-2)y' + (2x-3)y = 0 \quad y = \frac{1}{x}(C_1 e^x + C_2 e^{2x}), \quad y = 0, \quad x \neq 0$$

★ jsou označeny odstavce a příklady, určené primárně studentům vyšších ročníků bakalářského studia

$$3.102 \quad x^2 y'' - 2x(x+2)y' + (x^2 + 4x + 6)y = 0 \quad y = e^x (C_1 x^2 + C_2 x^3), \quad y = 0$$

$$3.103 \quad x^2 y'' + x(x+4)y' + (x^2 + 2x + 2)y = 0 \quad y = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x^2} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right), \quad y = 0$$

$$3.104 \quad x^2 y'' - 4xy' + 4y = x + 1 \quad y = C_1 x + C_2 x^4 - \frac{x \ln x}{3} + \frac{1}{4}, \quad x > 0$$

$$3.105 \quad x^2 y'' - xy' + y = 2x - 4 \quad y = C_1 x + C_2 x \ln x + x \ln^2 x - 4, \quad x > 0$$

$$3.106 \quad y'' - \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} \right) y' + \frac{2}{x} y = 2\sqrt{x}$$

$$y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{4\sqrt{x}} + x^{\frac{3}{2}} + \frac{9x}{4} + \frac{21\sqrt{x}}{8} + \frac{45}{32}, \quad x > 0$$

$$3.107 \quad y'' + \frac{2x-6}{x^2} y' + \frac{8}{x^4} y = 0 \quad y = C_1 e^{-2/x} + C_2 e^{-4/x}, \quad y = 0, \quad x \neq 0$$

$$3.108 \quad \frac{1}{16x^2} y'' - \left(\frac{1}{16x^3} + \frac{1}{x} \right) y' + 4y = 4x^4 + 1 \quad y = C_1 e^{4x^2} + C_2 x^2 e^{4x^2} + x^4 + x^2 + \frac{5}{8}, \quad x \neq 0$$

$$3.109 \quad y'' - \frac{2}{2x-1} y' = 2x(2x-1)^2 \quad y = C_1 + C_2(x^2 - x) + \frac{8}{15} x^5 - \frac{5}{6} x^4 + \frac{x^3}{3}, \quad x \neq \frac{1}{2}$$

$$3.110 \quad 2y y'' + 2y'(y' - 4y) + 4y^2 = x$$

$$y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + x + 1} = \sqrt{D}, \quad D \geq 0$$

$$3.111 \quad \frac{y''}{2y} - \frac{y'}{y} \left(\frac{3y'}{4y} + 1 \right) = 2 - e^x \sqrt{y} \quad y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1)^{-2}, \quad y \geq 0$$

3.3 Řešení lineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého a vyšších řádů převodem na soustavu lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

Podobně jako „běžné“ rovnice, mohou i obyčejné (lineární) diferenciální rovnice tvořit soustavu. Uvažujme systém lineárních diferenciálních rovnic pouze 1. řádu (rovnice vyššího řádu lze na takový systém vždy jednoduše převést, například rovnici 2. řádu $y'' + a_1 y' + a_0 y = f$ zapíšeme jako dvě rovnice 1. řádu: $y' = z$, $z' = -a_1 z - a_0 y + f$)

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y'_2 &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ &\dots \\ y'_n &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Systém rovnic (3.45) zapíšeme vektorově jako

$$\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y} + \vec{f} \quad (\text{nebo, pokud } \vec{f}(x) = 0, \text{ jako homogenní systém } \vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y}), \quad (3.46)$$

kde matice

$$\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

a kde \vec{y}' , \vec{y} a \vec{f} jsou sloupcové vektory. Řešení soustav rovnic s nekonstantními koeficienty $\mathbf{A}(x)$ může být v praxi značně komplikované a představuje samostatnou disciplínu, vymykající se rozsahu těchto skript, v následujících odstavcích se proto zaměříme pouze na systémy rovnic s konstantními koeficienty $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}$.

3.3.1 Homogenní soustavy s konstantními koeficienty

V případě homogenního systému dle rovnice (3.46) s konstantními koeficienty a_{ij} , kdy matice \mathbf{A} (typu $n \times n$) má n různých reálných vlastních hodnot λ_i , $i = 1 \dots n$ (viz rovnice (2.17)), můžeme zapsat řešení v obecném vektorovém tvaru

$$\vec{y}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} \vec{v}_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \vec{v}_n, \quad (3.48)$$

kde v_i jsou jednotlivé vlastní vektory dle rovnic (2.17) a (2.18), příslušející vlastním hodnotám λ_i (k rovnici (3.48) bychom dospěli i například postupným dosazováním, tedy náhradou n rovnic 1. řádu jednou rovnicí n -tého řádu, zejména v případě vyššího n je to ovšem způsob značně obtížný a pracný). Jako jednoduchý příklad uvedeme systém dvou homogenních rovnic

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Vlastní hodnoty matice \mathbf{A} budou $\lambda_1, \lambda_2 = -1, 4$, příslušné vlastní vektory budou $\vec{v}_1 = (-3, 1)^T$ a $\vec{v}_2 = (2, 1)^T$. Z kapitoly 2.1 je zřejmé, že vlastními vektory jsou i všechny vektory \vec{v}_1, \vec{v}_2 , násobené libovolnou konstantou (v následujícím textu budeme uvádět pouze jeho základní tvar). Výsledné řešení systému rovnic, v případě že nejsou zadány další podmínky, můžeme zapsat jako

$$\vec{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}. \quad (3.50)$$

Pokud jsou vlastní hodnoty matice \mathbf{A} reprezentovány také dvojicemi (komplexně sdružených) komplexních čísel, budeme řešení hledat obdobným způsobem jako v případě reálných vlastních hodnot. Jako jednoduchý příklad uvedeme systém dvou homogenních rovnic

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Vlastní hodnoty matice \mathbf{A} v tomto případě budou $\lambda_1, \lambda_2 = \pm i$, příslušné vlastní vektory budou $\vec{v}_1 = (2 - i, 1)^T$ a $\vec{v}_2 = (2 + i, 1)^T$. Výsledné řešení systému rovnic bude

$$\vec{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 - i \end{pmatrix} e^{ix} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 + i \end{pmatrix} e^{-ix} = A \begin{pmatrix} 5 \cos x \\ 2 \cos x + \sin x \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 5 \sin x \\ 2 \sin x - \cos x \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

kde vztah mezi exponenciální a goniometrickou formou rovnice (3.52) je dán Eulerovou identitou $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ a kde koeficienty $A = C_1 + C_2$, $B = i(C_2 - C_1)$.

Pokud je některá reálná vlastní hodnota matice \mathbf{A} vícenásobná, způsob řešení bude dále záviset na počtu jí odpovídajících vlastních vektorů, kdy existují v zásadě 2 možnosti:

- (a) Vícenásobné (k -násobné) vlastní hodnotě ρ odpovídá k lineárně nezávislých vlastních vektorů, potom část obecného řešení, týkající se této vlastní hodnoty, bude mít tvar

$$\vec{y}_\rho(x) = C_1 e^{\rho x} \vec{v}_1 + C_2 e^{\rho x} \vec{v}_2 + \dots + C_k e^{\rho x} \vec{v}_k. \quad (3.53)$$

Jednoduchým příkladem může být například následující systém,

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

s dvojnásobnou vlastní hodnotou $\rho = 3$ a se dvěma lineárně nezávislými vlastními vektory $\vec{v}_1 = (1, 0)^T$ a $\vec{v}_2 = (0, 1)^T$. Výsledné řešení systému ve smyslu rovnice (3.53) bude

$$\vec{y}_\rho(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}. \quad (3.55)$$

- (b) Vícenásobné (k -násobné) vlastní hodnotě ρ odpovídá j lineárně nezávislých vlastních vektorů, kdy $1 \leq j < k$, tedy $s = k + 1 - j$ vlastním hodnotám ρ odpovídá jediný lineárně nezávislý vlastní vektor \vec{u} . Taková matice se nazývá *defektní* a není *diagonalizovatelná*, tj. převoditelná na diagonální matici po vynásobení zleva maticí řádkových levých vlastních vektorů a zprava maticí sloupcových pravých vlastních vektorů. Potom část obecného řešení, týkající se tohoto vlastního vektoru \vec{u} , bude mít tvar

$$\vec{y}_\rho(x) = C_1 \vec{u} e^{\rho x} + C_2 (\vec{w}_1 + x\vec{u}) e^{\rho x} + \dots \quad (3.56)$$

$$\dots + C_s \left(\vec{w}_{s-1} + x\vec{w}_{s-2} + \frac{x^2}{2!} \vec{w}_{s-3} + \dots + \frac{x^{s-2}}{(s-2)!} \vec{w}_1 + \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} \vec{u} \right) e^{\rho x}, \quad (3.57)$$

kde vektor \vec{w}_i odpovídá libovolnému řešení algebraických rovnic

$$(\mathbf{A} - \rho \mathbf{E}) \vec{w}_i = \vec{w}_{i-1}, \quad \dots \quad (\mathbf{A} - \rho \mathbf{E}) \vec{w}_1 = \vec{u}. \quad (3.58)$$

Následující příklad ilustruje popsany princip řešení: uvažujme systém

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

s dvojnásobnou vlastní hodnotou $\rho = 2$, které ovšem odpovídá pouze jeden lineárně nezávislý vlastní vektor $\vec{u} = (1, 1)^T$. Vektor \vec{w} určíme z rovnice (3.58),

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{tedy} \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Výsledné řešení systému ve smyslu rovnice (3.56) bude

$$\vec{y}_\rho(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2x}. \quad (3.61)$$

Řešení systémů s více než dvěma lineárními rovnicemi 1. řádu je analogické k uvedeným jednoduchým příkladům se dvěma rovnicemi, některé principy více ozřejmí následující příklady, zahrnující i systémy tří rovnic.

• Příklady:

$$3.112 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} \qquad \vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6x} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

$$3.113 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\begin{aligned} \vec{y} &= C_1 \begin{pmatrix} 13 \\ -3 + 2i \end{pmatrix} e^{(4+2i)x} + C_2 \begin{pmatrix} 13 \\ -3 - 2i \end{pmatrix} e^{(4-2i)x} = \\ &= \left[A \begin{pmatrix} 13 \cos 2x \\ -3 \cos 2x - 2 \sin 2x \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 13 \sin 2x \\ 2 \cos 2x - 3 \sin 2x \end{pmatrix} \right] e^{4x} \end{aligned}$$

$$3.114 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} \qquad \vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$$

$$3.115 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{pmatrix} \vec{y} \qquad \vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \left[C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{-3x}$$

$$3.116 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\vec{y} = \left\{ C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \right\} e^{-2x}$$

$$3.117 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\vec{y} = \left\{ C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right] + C_3 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right] \right\} e^x$$

$$3.118 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\vec{y} = \left\{ C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + C_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right\} e^{-2x}$$

3.3.2 Nehomogenní soustavy s konstantními koeficienty

Řešení lineárních soustav s pravou stranou bude v principu analogické metodám řešení obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu (viz odstavec 3.2.1), tj. metodám *variace konstant* a *neur-*

čítých koeficientů. Metodu *variace konstant* můžeme aplikovat následujícím způsobem: předpokládejme partikulární řešení nehomogenní rovnice (3.46), ve tvaru

$$\vec{y}_p = \mathbf{Y}(x)\vec{t}(x), \quad (3.62)$$

kde $\mathbf{Y}(x)$ je matice, jejíž sloupce tvoří jednotlivá lineárně nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice (3.46), přepsané nyní do tvaru $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$, $\vec{t}(x)$ je hledaný, obecně zapsaný sloupcový vektor. Protože rovnice (3.46) musí platit také pro partikulární řešení, tedy $\vec{y}_p' = \mathbf{A}\vec{y}_p + \vec{f}$, první derivace partikulárního řešení v takovém případě bude

$$\vec{y}_p' = \mathbf{Y}'\vec{t} + \mathbf{Y}\vec{t}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}\vec{t} + \vec{f} = \mathbf{Y}'\vec{t} + \vec{f}, \quad \text{tedy} \quad \mathbf{Y}\vec{t}' = \vec{f}. \quad (3.63)$$

Hledaný vektor \vec{t} získáme integrací rovnice (3.63),

$$\vec{t} = \int \mathbf{Y}^{-1}\vec{f} dx, \quad \vec{y}_p = \mathbf{Y} \int \mathbf{Y}^{-1}\vec{f} dx. \quad (3.64)$$

Uvedenou metodu ilustruje následující řešený příklad: použijeme homogenní systém z řešeného příkladu (viz rovnice (3.49)) s přidanou pravou stranou,

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x. \quad (3.65)$$

Z rovnice (3.50) ihned vidíme, že matice $\mathbf{Y}(x)$ bude

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -3e^{-x} & 2e^{4x} \\ e^{-x} & e^{4x} \end{pmatrix}, \quad \text{z toho} \quad \mathbf{Y}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -e^x & 2e^x \\ e^{-4x} & 3e^{-4x} \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

Podle rovnice (3.64) tak dostáváme partikulární řešení pomocí integrace (kdy každou složku vektoru \vec{y}_p integrujeme zvlášť)

$$\vec{y}_p = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3e^{-x} & 2e^{4x} \\ e^{-x} & e^{4x} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -e^x & 2e^x \\ e^{-4x} & 3e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x \\ x \end{pmatrix} dx = \begin{bmatrix} -3/4 \\ (1-4x)/8 \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Úplné řešení tedy bude součtem rovnic (3.50) a (3.67). Ve výsledku rovnice (3.67) neuvádíme integrační konstantu, předpokládáme, že je již „skrytá“ v konstantách homogenního řešení v rovnici (3.50).

Metoda *neurčitých koeficientů* pro systém rovnic je zcela analogická již uvedenému řešení pro rovnice 2. řádu, jediný rozdíl spočívá v tom, že koeficienty nyní budou vektory. Pokud například v odstavci 3.2.1 byla pravá strana rovnice polynomem 1. stupně, obecný zápis partikulárního řešení měl tvar $y_p = Ax + B$, nyní to bude $\vec{y}_p = \vec{A}x + \vec{B}$. Metodu ukážeme na stejném řešeném příkladě: předpokládejme uvedenou obecnou formu partikulárního řešení, tedy

$$\vec{y}_p = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad \text{což dává} \quad \vec{y}_p' = \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

Rovnice (3.46) musí opět platit i pro partikulární řešení, $\vec{y}_p' = \mathbf{A}\vec{y}_p + \vec{f}$, tedy $\vec{A} = \mathbf{A}(\vec{A}x + \vec{B}) + \vec{f}$. Přepíšeme-li (vektorový) polynom 1. stupně do následujícího explicitního tvaru

$$\left[\mathbf{A} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] x + \mathbf{A} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad (3.69)$$

dostáváme pro lineární i absolutní člen (oba musí být nulové) následující rovnice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Nyní již snadno dopočítáme jednotlivé neurčité koeficienty, dostáváme $A_1 = 0$, $A_2 = -1/2$, $B_1 = -3/4$, $B_2 = 1/8$, což po dosazení a úpravě dává shodný výsledek s rovnicí (3.67).

Poněkud složitější je případ, kdy se součet koeficientů $\alpha + \beta i$ na pravé straně rovnice (viz podobnost s rovnicí (3.41)) rovná některému z vlastních hodnot soustavy rovnic. V tom případě opět násobíme obecný vektor pravé strany faktorem x^ρ , kde ρ je stupeň degenerace vlastní hodnoty (analogie k násobnosti kořene charakteristické rovnice), musíme ovšem obecný vektor "prodloužit" i o nižší mocniny obecného polynomu (abychom zahrnuli i jeho případné nenulové členy ve vyšších derivacích), zpravidla až po absolutní člen. Tento postup si ukážeme na následujícím příkladě (který zahrnuje více takových eventualit z předchozího výkladu):

$$y'''' + 3y''' = x^2 + x + 1. \quad (3.71)$$

Rovnici čtvrtého řádu můžeme pojmut jako soustavu čtyř rovnic prvního řádu čtyř proměnných, kdy v homogenní rovnici $y'_1 = y_2$, $y'_2 = y_3$, $y'_3 = y_4$ a $y'_4 = -3y_4$. Explicitní maticový zápis homogenní soustavy bude mít podobu

$$\vec{y}' \equiv \begin{pmatrix} y'_4 \\ y'_3 \\ y'_2 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_4 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}\vec{y} \quad (3.72)$$

a její řešení bude

$$\begin{pmatrix} y_4 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -27 \\ 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3x} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + C_4 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. \quad (3.73)$$

Protože vlastní hodnota $\lambda_{2,3,4} = 0$ je trojnásobná a odpovídá parametru α pravé strany zadané rovnice, je třeba obecnou rovnici pravé strany násobit x^3 . Tato obecná rovnice, vzhledem k výše řečenému, v tomto případě bude

$$\vec{y}_p = \vec{A}x^5 + \vec{B}x^4 + \vec{C}x^3 + \vec{D}x^2 + \vec{E}x + \vec{F} \quad (3.74)$$

a celý maticový zápis obecného řešení pravé strany bude

$$\vec{y}_p' = \mathbf{A}\vec{y}_p + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (x^2 + x + 1). \quad (3.75)$$

Z obecného řešení pravé strany vyplývá (viz rovnice (3.41)), že rovnice pro y_{p1} bude obsahovat pouze koeficienty A_1 , B_1 a C_1 , tedy $D_1 = 0$, $E_1 = 0$, $F_1 = 0$ (číslováno „odspoda nahoru“, souhlasně s homogenním systémem). Dále, z vyjádření vektorové rovnice pro koeficienty páté mocniny proměnné x vyplývá $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_4 = 0$, $A_1 = A_1$. Porovnáním všech ostatních

koeficientů u shodných mocnin dostáváme jednoznačné řešení pravé strany,

$$\vec{y}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{180} \end{pmatrix} x^5 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 36 \\ \frac{1}{216} \end{pmatrix} x^4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ 1 \\ 54 \\ 4 \\ 81 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 18 \\ 4 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 8 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Toto lze snadno ověřit tak, že spodní řádek nastavíme jako řešení dané rovnice (3.71), kde ztotožníme y_{p1} s původním y (totéž platí pro homogenní řešení). Vyšší řádky pak postupně odpovídají první, druhé a třetí derivaci y .

• **Příklady:**

$$3.119 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5x} \quad \vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x} - \begin{pmatrix} 5/21 \\ 4/21 \end{pmatrix} e^{-5x}$$

$$3.120 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2x} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$3.121 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x^2$$

$$\vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$3.122 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (x+1) e^{2x}$$

$$\vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4x} + \left[\begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3/16 \\ 0 \\ -3/16 \end{pmatrix} \right] e^{2x}$$

$$3.123 \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} x^2$$

$$\vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + C_3 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^x + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.124 Nalezněte řešení obyčejné diferenciální rovnice 3. řádu

$$y''' + y'' - y' - y = x^2 + 1 \quad (3.77)$$

pomocí její transformace na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu. Výsledek ověřte pomocí některé z metod, uvedených v odstavci 3.2.1.

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^x - x^2 + 2x - 5$$

3.125 Nalezněte řešení obyčejné diferenciální rovnice 3. řádu

$$y''' + 3y'' - 7y' - 9y = \sin x \quad (3.78)$$

pomocí její transformace na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu. Výsledek ověřte pomocí některé z metod, uvedených v odstavci 3.2.1.

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{(-1+\sqrt{10})x} + C_3 e^{-(1+\sqrt{10})x} + \frac{1}{26} \cos x - \frac{3}{52} \sin x$$

3.126 Nalezněte řešení obyčejné diferenciální rovnice 4. řádu

$$y'''' - 4y''' + 3y'' + 4y' - 4y = x^4 + \cos x \quad (3.79)$$

pomocí její transformace na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu. Výsledek ověřte pomocí některé z metod, uvedených v odstavci 3.2.1.

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^x + C_4 e^{-x} - \frac{1}{8} (2x^4 + 8x^3 + 42x^2 + 72x + 99) - \frac{3}{50} \cos x + \frac{2}{25} \sin x$$

3.127 Nalezněte řešení obyčejné diferenciální rovnice 3. řádu

$$y''' + y'' + y' + y = (x^2 + 1) e^{-x} \quad (3.80)$$

pomocí její transformace na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu. Výsledek ověřte pomocí některé z metod, uvedených v odstavci 3.2.1.

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + C_3 \right) e^{-x}$$

Kapitola 4

Úvod do křivočarých souřadnic¹

Většina jevů v přírodě (a tedy i fyzikálních dějů) neprobíhá přísně pravoúhle a není vhodné a často ani schůdné je jednoduše popisovat pomocí kartézských souřadnic. V tom případě je výhodné zvolit takovou souřadnou soustavu (zpravidla křivočarou), která co nejlépe odpovídá geometrii popisovaného děje. Nejčastěji používanými křivočarými souřadnými soustavami jsou soustava *válcová* (*cyklindrická*) a soustava *kulová* (*sférická*). Dále existuje řada speciálních křivočarých souřadných soustav, např. eliptická, parabolická, kónická, atd.

4.1 Kartézské souřadnice

I když kartézská soustava nepatří mezi křivočaré soustavy, uvádíme ji zde jako nejjednodušší ortogonální souřadnou soustavu, v níž zavedeme základní pojmy, které v rámci křivočarých souřadných soustav analogicky upřesníme a aplikujeme (v celé kapitole nadále implicitně předpokládáme, že se „pohybujeme“ v \mathbb{R}^3). Vektory ortonormální kartézské báze, $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$, jsou konstantní (mají stále stejnou velikost a stále stejný směr), derivace těchto bázevých vektorů jsou tedy nulové.

Pokud při pohledu z libovolného bodu kladné poloosy $+z$ přejde kladná poloosa $+x$ pootočením o úhel $\pi/2$ v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček) v kladnou poloosu $+y$, jedná se o soustavu *pravotočivou* (kladně orientovanou), v opačném případě se jedná o soustavu *levotočivou* (záporně orientovanou). Křivky (v tomto případě přímky) vytvořené body, jejichž dvě souřadnice jsou konstantní a pouze jedna se spojitě mění, jsou tzv. *souřadnicové křivky*. Plochy vytvořené body, jejichž jedna souřadnice je konstantní, jsou tzv. *souřadnicové plochy*.

Pro druhou mocninu vzdálenosti dvou bodů v kartézské soustavě platí (Pythagorova věta v diferenciálním tvaru, na kterou se lze také dívat jako na druhou mocninu délky tělesové úhlopříčky elementárního „kvádrů“ o hranách dx, dy, dz)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (4.1)$$

zároveň samozřejmě platí, že vzdálenost ds musí být pro všechny souřadnicové soustavy stejná. Faktory, které škálují délky jednotlivých hran elementárního kvádrů (délky, nikoli jejich druhé mocniny) se nazývají *Laméovy koeficienty*, značí se h_i . V kartézské soustavě budou tedy Laméovy koeficienty (nezaměňovat se stejnojmennými koeficienty, používanými v mechanice kontinua) $h_x = 1, h_y = 1, h_z = 1$. Z definice kartézského systému vyplývá, že tzv. *plošné elementy* (kde dolní index znamená konstantní souřadnici) $dS_x = dy dz$, $dS_y = dz dx$, $dS_z = dx dy$ a *objemový element* $dV = dx dy dz$, mají konstantní velikost.

¹Doporučená literatura k této kapitole: [Kvasnica \(2004\)](#), [Arfken & Weber \(2005\)](#).

• **Příklady:**

- 4.1 Určete velikost $\|\vec{u}\| = u$ vektoru $\vec{u} = 12\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 7\vec{e}_z$ a dále vektor \vec{u}_x , jednotkový vektor \vec{v} ve směru \vec{u} a vektor \vec{w} o velikosti 7 ve směru $-\vec{u}$.

$$u = \sqrt{202}, \quad \vec{u}_x = 12\vec{e}_x, \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{202}}(12\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 7\vec{e}_z), \quad \vec{w} = -\frac{7}{\sqrt{202}}(12\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 7\vec{e}_z)$$

- 4.2 Jsou dány 3 body v prostoru, $A = [12, 1, -3]$, $B = [7, -5, 8]$ a $C = [4, 11, -2]$. Napište vektorový součet vektorů $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{CB}$ a určete jeho velikost. Provéřte jestli dané 3 body neleží v jedné přímce a pokud ne, napište obecnou rovnici jimi určené roviny σ .

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = -10\vec{e}_x - 12\vec{e}_y + 22\vec{e}_z, \quad \|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\| = 2\sqrt{182}, \quad \sigma : 116x + 83y + 98z - 1181 = 0$$

- 4.3 Určete vzdálenost d počátku souřadnicového systému, tj. bodu $O = [0, 0, 0]$, od roviny σ , dané předchozím příkladem 4.2.

$$d \approx 6,82$$

- 4.4 Napište kartézskou rovnici kulové plochy se středem v bodě $x, y, z = [2, 1, 7]$ a s poloměrem $r = 3$, jako funkci $z = f(x, y)$. Určete souřadnice průsečíků P_1 a P_2 této plochy s přímkou, procházející bodem $x, y, z = [1, 1, 1]$, jejíž směrový vektor $\vec{u} = (0, 0, 1)$.

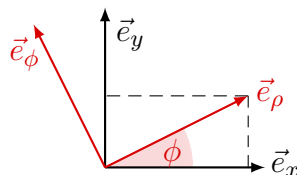
$$z = 7 \pm \sqrt{4 - x(x - 4) - y(y - 2)}, \quad P_1 = [1, 1, 7 + 2\sqrt{2}], \quad P_2 = [1, 1, 7 - 2\sqrt{2}]$$

- 4.5 V kartézské soustavě má polohový vektor podobu $\vec{r} = (x, y, z)$. Uvažujme zcela obecnou neortogonální souřadnou soustavu se souřadnicemi α, β, γ , s konstantními vektory báze (srovnej s obrázkem 2.2 a jeho doprovodným výkladem), v níž by stejný polohový vektor („viděno“ z kartézské soustavy) měl podobu $\vec{r} = (\alpha, \alpha + 3\beta, \gamma - \alpha - 2\beta)$. Jak by potom vypadaly bázové vektory $\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta, \vec{e}_\gamma$, „viděno“ z kartézské soustavy? (podobu bázových vektorů ortogonálních soustav můžeme získat pomocí vztahu $h_i \vec{e}_i = \partial x_j / \partial q_i$, kde q_i jsou nové souřadnice).

$$\vec{e}_\alpha = (1, 1, -1), \quad \vec{e}_\beta = (0, 3, -2), \quad \vec{e}_\gamma = (0, 0, 1)$$

4.2 Válcové (cylindrické) souřadnice

Válcová soustava je vhodná pro popis osově symetrických (rotačních) jevů. Souřadnicové směry



Obrázek 4.1: Schéma vzájemné transformace jednotkových bázových vektorů kartézské a válcové souřadné soustavy (viz rovnice (4.4)). Osa z je pro obě soustavy shodná a míří z počátku směrem k nám.

jsou: ρ - vzdálenost od osy válcové symetrie, ϕ - azimutální úhel, z - výška (pokud bychom uvažovali pouze soustavu v \mathbb{R}^2 , kde $z = 0$, potom se jedná o soustavu, běžně nazývanou jako

polární), kde $\rho \in \langle 0, \infty \rangle$, $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $z \in \langle -\infty, \infty \rangle$. Válcová soustava je tedy ortogonální. Převedení mezi válcovou a kartézskou soustavou je dán vztahy²

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z. \quad (4.2)$$

Pro zpětnou transformaci platí

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \phi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (4.3)$$

Jednotkové vektory válcové báze budou mít v kartézské soustavě tvar (viz obrázek 4.1)

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_x \cos \phi + \vec{e}_y \sin \phi, \quad \vec{e}_\phi = -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi, \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z. \quad (4.4)$$

Jediným konstantním bázovým vektorem bude vektor \vec{e}_z , ostatní bázové vektory mění směr v závislosti na úhlu ϕ .

Souřadnicovými křivkami ve válcové soustavě budou:

- polopřímky s_ρ s počátkem na ose z , ležící v rovině kolmé k ose z ($\phi = \text{konst.}$, $z = \text{konst.}$),
- kružnice s_ϕ se středem na ose z , ležící v rovině kolmé k ose z ($\rho = \text{konst.}$, $z = \text{konst.}$, $\rho = 0$ dává bod na ose z),
- přímky s_z rovnoběžné s osou z ($\rho = \text{konst.}$, $\phi = \text{konst.}$, $\rho = 0$ dává osu z).

Souřadnicovými plochami ve válcové soustavě budou:

- rotační válcové plochy S_ρ s osou rotace v ose z ($\rho = \text{konst.}$; $\rho = 0$ dává osu z),
- poloroviny S_ϕ procházející osou z ($\phi = \text{konst.}$),
- roviny S_z rovnoběžné s rovinou $\rho\text{-}\phi$ ($z = \text{konst.}$).

Pro druhou mocninu vzdálenosti dvou bodů v diferenciálním tvaru (dosazením rovnice (4.2) do rovnice (4.1)) ve válcové soustavě platí

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (4.5)$$

což můžeme opět považovat za druhou mocninu délky tělesové úhlopříčky elementárního „kvádrů“, respektive „klínku“ o hranách $ds_\rho = d\rho$, $ds_\phi = \rho d\phi$, $ds_z = dz$. Ve válcové soustavě dostáváme tedy Laméovy koeficienty $h_\rho = 1$, $h_\phi = \rho$, $h_z = 1$. Z infinitesimálních, vzájemně kolmých hranových úseček respektive obloučků, zkonstruujeme plošné elementy

$$dS_\rho = ds_\phi ds_z = \rho d\phi dz, \quad dS_\phi = ds_z ds_\rho = dz d\rho, \quad dS_z = ds_\rho ds_\phi = \rho d\rho d\phi \quad (4.6)$$

a také objemový element válcové soustavy

$$dV = ds_\rho ds_\phi ds_z = \rho d\rho d\phi dz. \quad (4.7)$$

Na rozdíl od kartézské soustavy nejsou všechny tyto elementy konstantní, jejich velikost (s výjimkou plošného elementu dS_ϕ) evidentně roste přímo úměrně vzdálenosti ρ od osy z .

Podrobný popis válcového souřadnicového systému je rozveden v odstavci B.2 v příloze B.

²V dalším popisu budeme rozlišovat ρ pro radiální válcovou souřadnici, r pro radiální kulovou souřadnici. V případě jednotkových bázových vektorů budeme rozlišovat \vec{e}_ρ pro válcovou a \vec{e}_r pro kulovou soustavu.

• **Příklady:**

4.6 Napište válcové souřadnice bodu A , jehož kartézské souřadnice jsou $x, y, z = [6, -2\sqrt{3}, 3]$.

$$A: \rho, \phi, z = \left[4\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6}, 3 \right]$$

4.7 Napište kartézské souřadnice bodu B , jehož válcové souřadnice jsou $\rho, \phi, z = \left[4, \frac{5\pi}{3}, -2 \right]$.

$$B: x, y, z = [2, -2\sqrt{3}, -2]$$

4.8 Napište rovnici plochy $z = 5 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$, ve válcových souřadnicích. Nakreslete uvedenou plochu.

$z = 5 - 2\rho$, $z \in \langle 0, 5 \rangle$; část rotační kuželové plochy, jejíž osu rotace tvoří osa z společná oběma systémům, s poloměrem $\rho = 5/2$ v rovině $z = 0$ a s vrcholem v bodě $[0, 0, 5]$.

4.9 Napište rovnici plochy $z - \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5} = 0$, $z \leq 4$, ve válcových souřadnicích. Nakreslete uvedenou plochu.

$z = \rho$, $z \in \langle 0, 4 \rangle$; část rotační kuželové plochy s osou rotace procházející počátkem válcového systému v bodě $O: x, y, z = [2, 1, 0]$ se směrovým vektorem $\vec{z} = (0, 0, 1)$, s poloměrem $\rho = 4$ v rovině $z = 4$ a s vrcholem v bodě O .

4.10 Napište rovnici plochy $2z - x^2 - y^2 = 0$, $z \leq 8$, ve válcových souřadnicích. Nakreslete uvedenou plochu.

$z = \rho^2/2$, $z \in \langle 0, 8 \rangle$; část rotačního paraboloidu, jehož osu rotace tvoří osa z společná oběma systémům, s poloměrem $\rho = 4$ v rovině $z = 8$ a s vrcholem ve společném počátku.

4.11 Napište rovnici plochy $x - y^2 - z^2 + 8y + 2z - 17 = 0$, $x \leq 4$, ve válcových souřadnicích. Nakreslete uvedenou plochu.

$x = \rho^2$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$; část rotačního paraboloidu s osou rotace procházející počátkem válcového systému v bodě $O: x, y, z = [0, 4, 1]$ se směrovým vektorem $\vec{x} = (1, 0, 0)$, s poloměrem $\rho = 2$ v rovině $x = 4$ a s vrcholem v bodě O .

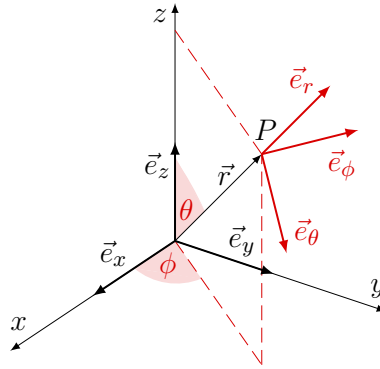
4.3 Kulové (sférické) souřadnice

Kulová soustava je vhodná pro popis bodově (centrálně) symetrických jevů. Souřadnicové směry jsou: r - vzdálenost od centrálního bodu - počátku soustavy, θ - polární úhel, ϕ - azimutální úhel (v tomto pořadí souřadnicových směrů je soustava pravotočivá - znázornění jednotlivých směrů a bázových vektorů je na obrázku 4.2), kde $r \in \langle 0, \infty \rangle$, $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$, $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Kulová soustava je tedy opět ortogonální. Převod mezi kulovou a kartézskou soustavou je dán vztahy

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (4.8)$$

Pro zpětnou transformaci dostáváme

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \phi &= \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \phi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (4.9)$$



Obrázek 4.2: Schéma vzájemné transformace jednotkových bázových vektorů kartézské a kulové souřadné soustavy (viz rovnice (4.8)). Bázové vektory ortonormální kartézské báze jsou vyznačeny silně černě, bázové vektory ortonormální kulové báze jsou vyznačeny silně červeně. Obecný bod P je určen svým polohovým vektorem \vec{r} , směr bázového vektoru \vec{e}_r je totožný se směrem vektoru \vec{r} . Čárkovaně červeně je znázorněna část poloroviny S_ϕ procházející osou z s konstantní souřadnicí ϕ (rostoucí od osy x k polorovině S_ϕ), bázový vektor \vec{e}_ϕ je k této polorovině kolmý a je (v pravotočivé soustavě) vůči ní kladně orientován. Bázový vektor \vec{e}_θ je k oběma předchozím bázovým vektorům rovněž kolmý a je orientován ve směru nárůstu souřadnice θ (rostoucí od osy z k vektoru \vec{r}), tedy tak aby bázové vektory kulové soustavy v pořadí podle rovnice (4.10) tvořily pravotočivou soustavu.

Jednotkové vektory kulové báze budou mít v kartézské soustavě tvar (viz obrázek 4.2)

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \vec{e}_x \sin \theta \cos \phi + \vec{e}_y \sin \theta \sin \phi + \vec{e}_z \cos \theta, \\ \vec{e}_\theta &= \vec{e}_x \cos \theta \cos \phi + \vec{e}_y \cos \theta \sin \phi - \vec{e}_z \sin \theta, \\ \vec{e}_\phi &= -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi.\end{aligned}\tag{4.10}$$

V kulové soustavě není tedy žádný z bázových vektorů konstantní.

Souřadnicovými křivkami v kulové soustavě budou:

- polopřímky s_r vycházející libovolným směrem z počátku soustavy ($\theta = \text{konst.}$, $\phi = \text{konst.}$),
- polokružnice s_θ se středem v počátku soustavy, ležící v polorovině procházející osou z ($r = \text{konst.}$, $\phi = \text{konst.}$, obdoba geografických poledníků),
- kružnice s_ϕ se středem na ose z , ležící v rovině kolmé k ose z ($r = \text{konst.}$, $\theta = \text{konst.}$, obdoba geografických rovnoběžek).

Souřadnicovými plochami v kulové soustavě budou:

- kulové plochy S_r se středem v počátku soustavy ($r = \text{konst.}$),
- rotační kuželové (respektive polokuželové) plochy S_θ s vrcholem v počátku soustavy a s osou rotace v ose z ($\theta = \text{konst.}$),
- poloroviny S_ϕ procházející osou z ($\phi = \text{konst.}$).

Pro druhou mocninu vzdálenosti dvou bodů v diferenciálním tvaru (dosazením rovnice (4.8) do rovnice (4.1)) v kulové soustavě platí

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,\tag{4.11}$$

což můžeme opět považovat za druhou mocninu délky tělesové úhlopříčky elementárního „kvádrů“, respektive „sférického klínku“ o hranách $ds_r = dr$, $ds_\theta = r d\theta$, $ds_\phi = r \sin \theta d\phi$. V kulové soustavě tak dostáváme Laméovy koeficienty $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\phi = r \sin \theta$. Z infinitesimálních, vzájemně kolmých hranových úseček respektive obloučků, zkonstruujeme plošné elementy

$$dS_r = ds_\theta ds_\phi = r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad dS_\theta = ds_\phi ds_r = r \sin \theta d\phi dr, \quad dS_\phi = ds_r ds_\theta = r dr d\theta \quad (4.12)$$

a také objemový element kulové soustavy

$$dV = ds_r ds_\theta ds_\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (4.13)$$

Žádný z těchto elementů není konstantní, jejich velikost roste přímo úměrně druhé (dS_r , dV) anebo první (dS_θ , dS_ϕ) mocnině vzdálenosti r od počátku soustavy a také (s výjimkou plošného elementu dS_ϕ) přímo úměrně sinu polárního úhlu θ .

Podrobný popis kulového souřadnicového systému je rozveden v odstavci B.3 v příloze B.

• Příklady:

4.12 Napište sférické souřadnice bodu A , jehož kartézské souřadnice jsou $x, y, z = [1, 1, 1]$.

$$A : r, \theta, \phi = \left[\sqrt{3}, \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{4} \right]$$

4.13 Napište kartézské souřadnice bodu B , jehož sférické souřadnice jsou $r, \theta, \phi = \left[12, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6} \right]$.

$$B : x, y, z = [9, -3\sqrt{3}, 6]$$

4.14 Napište rovnici plochy $z = \pm \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ ve sférických souřadnicích. Nakreslete uvedenou plochu.

$r = 5$; kulová plocha se středem ve společném počátku obou systémů

4.15 Napište rovnici plochy $x^2 + y^2 + z^2 - 14x - 6y - 10z = 61$ ve sférických souřadnicích. Nakreslete uvedenou plochu.

$r = 12$; kulová plocha se středem v počátku sférického systému, který se nachází v bodě $[7, 3, 5]$ kartézského systému

4.16 Napište vektor \vec{u} , zadaný v kartézské ortonormální bázi ve tvaru $\vec{u} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$, pomocí bázových vektorů ortonormální kulové báze.

$$\vec{u} = (2 \sin \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi + \cos \theta) \vec{e}_r + (2 \cos \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi - \sin \theta) \vec{e}_\theta + (\cos \phi - 2 \sin \phi) \vec{e}_\phi$$

4.17 Složky vektoru \vec{u} (výrazy v závorkách) ve výsledku předchozího příkladu 4.16 napište pomocí kartézských souřadnic.

$$\vec{u} = \frac{2x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{e}_r + \frac{z(2x + y) - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{e}_\theta + \frac{x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e}_\phi$$

4.18 Podle rovnice (4.13) odvoďte vzorec pro výpočet objemu V koule o poloměru R .

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Kapitola 5

Skalární a vektorové funkce více proměnných^{1 2}

5.1 Parciální a směrové derivace, úplný diferenciál

Parciální derivace funkce dvou a více nezávislých proměnných $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je derivace této funkce podle jedné z těchto proměnných, tj. danou funkci derivujeme jako funkci pouze *jediné* proměnné, vzhledem ke které počítáme derivaci. Ostatní nezávislé proměnné mají konstantní hodnotu (chovají se jako konstanty). Prostorovou představu (viz obrázek 5.1) si můžeme udělat na příkladu funkce dvou proměnných $f(x, y)$, jejíž geometrický význam můžeme popsat jako plochu, danou předpisem $z = f(x, y)$. Parciální derivace této funkce například podle proměnné x , kterou zapisujeme

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{nebo pouze} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{nebo také} \quad f_x, \quad (5.1)$$

vyjadřuje směrnici tečny této plochy, která leží v rovině rovnoběžné s rovinou xz a která je orientována v kladném smyslu osy x . Hodnota druhé nezávislé proměnné y je tedy pro celou tuto tečnu konstantní. Zcela obdobně to platí i pro parciální derivace podle ostatních nezávislých proměnných.

Parciální derivace můžeme samozřejmě zobecnit pro zcela libovolný směr, ne pouze pro směry souřadnicových os, které reprezentují směr nárůstu vždy jen jedné určité nezávislé proměnné. V tom případě je nazýváme směrové derivace (nebo derivace v daném směru). Zvolený směr může být definovaný například vektorem $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, jehož velikost označme $\|\vec{u}\| = u$. Směrová derivace potom v případě funkce dvou proměnných, analogicky k příkladu popsanému v předchozím odstavci, vyjadřuje směrnici tečny této plochy, která leží v rovině rovnoběžné s rovinou vymezenou tímto vektorem a osou z a která je orientována ve směru zvoleného vektoru. Směrovou derivaci spojitě diferencovatelné skalární funkce ve směru vektoru \vec{u} můžeme obecně definovat jako

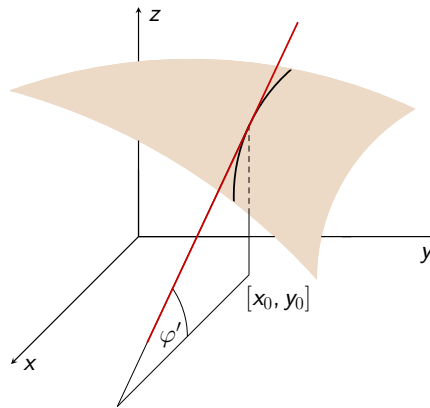
$$\frac{df(x_1, x_2, \dots, x_n)}{du} = \vec{\nabla} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\vec{u}}{u}, \quad (5.2)$$

kde symbol (tzv. *Nabla operátor*) $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ značí v tomto případě vektor parciálních derivací podle všech nezávislé proměnných. Rovnici (5.2) lze tedy explicitně rozepsat,

$$\frac{df(x_1, x_2, \dots, x_n)}{du} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{u_1}{u} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{u_2}{u} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{u_n}{u}. \quad (5.3)$$

¹Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nejsou uváděny příslušné jednotky.

²Doporučená literatura k této kapitole: Děmidovič (2003), Kvasnica (2004), Bartsch (2008), Rektorys (2009).



Obrázek 5.1: Geometrický význam parciální derivace funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$. Výšek funkce $f(x, y)$ je na obrázku zvýrazněn barevnou plochou. Parciální derivace (v tomto případě podle x) funkce dvou proměnných $f(x, y)$ udává směrnici tečny ke křivce, která odpovídá řezu grafem (plochou) funkce $f(x, y)$ rovinou rovnoběžnou s příslušnou osou, v tomto případě rovinou rovnoběžnou s rovinou xz , procházející bodem $[x_0, y_0]$. Křivka řezu příslušnou rovinou je na obrázku znázorněna silnou černou čarou, procházející barevnou plochou, její tečna v bodě $[x_0, y_0]$ je znázorněna červeně. Parciální derivace $\partial f/\partial x$ bude v tomto případě odpovídat $\operatorname{tg} \varphi$, kde $\varphi = -\varphi'$. Geometrický význam parciálních derivací podle jiných proměnných, případně směrových derivací, je analogický.

Úplným (totálním) diferenciálem obecné skalární funkce $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ více *nezávislých* proměnných nazýváme funkci

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot d\vec{x}. \quad (5.4)$$

Pokud totální diferenciál funkce $f(\vec{x})$ existuje v určitém daném bodě, říkáme, že funkce $f(\vec{x})$ je v tomto bodě diferencovatelná. Pokud totální diferenciál funkce $f(\vec{x})$ existuje ve všech bodech této funkce, říkáme, že funkce $f(\vec{x})$ je spojitě diferencovatelná (hladká). Pokud totální diferenciál funkce $f(\vec{x})$ existuje v určitých oblastech této funkce, říkáme, že funkce $f(\vec{x})$ je po částech diferencovatelná.

Totálním diferenciálem vyššího (n -tého) řádu funkce $f(x, y)$ dvou *nezávislých* proměnných x, y bude funkce, daná obecným předpisem

$$d^n f(x, y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} dx^k dy^{n-k}, \quad (5.5)$$

kde výraz v závorce za sumou je tzv. *kombinační číslo* (viz rovnice (12.1)). Totálním diferenciálem vyššího (n -tého) řádu funkce $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m)$ obecného počtu m *nezávislých* proměnných x_1, x_2, \dots, x_m bude funkce, daná předpisem

$$d^n f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx_1^{k_1} dx_2^{k_2} \dots dx_m^{k_m}, \quad (5.6)$$

kde výraz v závorce za sumou je tzv. *multinomický koeficient* (viz rovnice (12.6)) a kde smysl a užití všech ostatních výrazů a symbolů odpovídá tzv. *multinomické větě* (12.7).

• Příklady:

5.1 Vypočítejte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ skalární funkce $f(x, y) = x^2 + x - y$.

$$2x + 1, -1$$

5.2 Vypočítejte parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ skalární funkce $f(x, y) = x \ln y + x^y$.

$$(y^2 - y) x^{y-2}, -\frac{x}{y^2} + x^y \ln^2 x$$

5.3 Vypočítejte smíšenou parciální derivaci $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ skalární funkce $f(x, y, z) = xyz + x^2 \sin(xy) + yz$.

$$1$$

5.4 Vypočítejte smíšenou parciální derivaci $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}$ skalární funkce $f(x, y, z) = xy^2z^3 + x^2 \sin^2(xz) + yz + x + y + z$.

$$12yz$$

5.5 Dokažte, že ze stavové rovnice ideálního plynu $pV = n\mathcal{R}T$, kde p je tlak, V je objem, T je termodynamická teplota, n je látkové množství, \mathcal{R} je molární plynová konstanta, vyplývá:

$$\frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

5.6 Ukažte, že funkce $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$, kde a, b jsou konstanty, vyhovuje rovnici vedení tepla $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

5.7 Ukažte, že funkce $u = \frac{1}{r}$, kde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, kde a, b, c jsou konstanty, vyhovuje Laplaceově rovnici $\Delta u = 0$ pro $r \neq 0$.

Příklady 5.5, 5.6, 5.7 - pomocí parciálních derivací funkcí.

5.8 Vypočítejte derivaci funkce $f(x, y) = \frac{x}{y}$ v bodě $[4, -1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-2, 3)$.

$$-\frac{10}{\sqrt{13}}$$

5.9 Vypočítejte derivaci funkce $f(x, y, z) = \cos(xy) + \ln z^2$ v bodě $[\pi, 1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

5.10 Vypočítejte derivaci funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ v bodě $[1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, -1)$.

$$2\sqrt{2}$$

5.11 Vypočítejte derivaci funkce $f(x, y) = x + 2y$ v bodě $[2, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, 2)$.

$$\sqrt{5}$$

- 5.12 Vypočítejte derivaci funkce $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ v bodě $[0, 1, 2]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, 0, 1)$.

$$\frac{13}{\sqrt{2}}$$

- 5.13 Vypočítejte derivaci funkce $f(x, y) = x^3 - y^2 + 2xy$ v bodě $[2, 3]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-3, 2)$.

$$-\frac{58}{\sqrt{13}}$$

- 5.14 Nalezněte hodnotu derivace funkce $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$ ve směru největšího růstu v bodě $[1, -3]$.

$$5\sqrt{2}$$

- 5.15 Nalezněte první a druhý diferenciál funkce $f(x) = x \cos x$, vyčíslete v bodě $\pi/4$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) dx, -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(2 + \frac{\pi}{4}\right) dx^2$$

- 5.16 Nalezněte první a druhý diferenciál funkce $f(x, y) = (x + y^3)^2$, vyčíslete v bodě $[2, 3]$.

$$58 dx + 1566 dy, 2 dx^2 + 108 dx dy + 2502 dy^2$$

- 5.17 Nalezněte první a druhý diferenciál funkce $f(x, y) = xy + x \cos y + y^x$, vyčíslete v bodě $[1, e]$.

$$(2e + \cos e) dx + (2 - \sin e) dy, e dx^2 + (6 - 2 \sin e) dx dy - (\cos e) dy^2$$

- 5.18 Nalezněte první a druhý diferenciál funkce $f(x, y) = \ln(x + y^2)$, vyčíslete v bodě $[1, 1]$.

$$\frac{1}{2} dx + dy, -\frac{1}{4} dx^2 - dx dy$$

- 5.19 Užitím prvního diferenciálu přibližně vypočítejte hodnotu čísla $1,03 \times 1,98$ a porovnejte s hodnotou určenou kalkulačkou.

$$2,04 \text{ (kalkulačkou } 2,0394)$$

- 5.20 Užitím prvního diferenciálu přibližně vypočítejte hodnotu čísla $\left(\frac{3,96}{2,01}\right)^3$ a porovnejte s hodnotou určenou kalkulačkou.

$$7,64 \text{ (kalkulačkou } 7,64711\dots)$$

- 5.21 Užitím prvního diferenciálu přibližně vypočítejte hodnotu čísla $\arctg\left(\frac{1,01}{0,98}\right)$ a porovnejte s hodnotou určenou kalkulačkou.

$$\frac{\pi}{4} + 0,015 \approx 0,8004 \text{ (kalkulačkou } 0,80047\dots)$$

5.2 Kmenová funkce

S *kmenovou funkcí* jsme se již de facto setkali v souvislosti s diferenciálními rovnicemi exaktními v oddíle 3.1.4. Pojem kmenová funkce úzce souvisí s pojmy totálního diferenciálu a konzervativního vektorového pole. O obecném vektorovém poli $\vec{A}(\vec{x})$ říkáme že je konzervativní, pokud existuje taková skalární funkce $\varphi(\vec{x})$, že platí

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\varphi(\vec{x}), \quad \text{resp.} \quad d\varphi(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}. \quad (5.7)$$

Výraz (uvažujeme trojrozměrný případ) $\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ v levé části rovnice (5.7) znamená *gradient* funkce φ (viz také oddíl 5.3), výraz $d\varphi$ v pravé části rovnice (5.7) je totálním diferenciálem funkce φ . Pokud rovnice (5.7) platí, funkci φ nazýváme kmenovou funkcí (záporným skalárním potenciálem, kdy skalární potenciál $\phi = -\varphi$) konzervativního vektorového pole \vec{A} . Intenzita \vec{E} obecného konzervativního pole potom bude $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ a odpovídající silové pole $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$, kde E_p je potenciální energie. O tom, jestli zadané vektorové pole je konzervativní, se přesvědčíme na základě Schwarzovy věty, tedy postupem uvedeným v rovnici (3.19). Postup můžeme zobecnit na libovolný počet proměnných, tedy

$$\frac{\partial A_j(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\partial x_k} = \frac{\partial A_k(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\partial x_j}, \quad (5.8)$$

kde A_j, A_k značí j -tou a k -tou složku vektoru \vec{A} , volné indexy j, k nabývají postupně všech hodnot od 1 do n . Kmenovou funkci potom najdeme (například ve trojrozměrném případě) pomocí integrálu

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^x A_x(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y A_y(x_0, t, z) dt + \int_{z_0}^z A_z(x_0, y_0, t) dt. \quad (5.9)$$

V případě jiného počtu dimenzí bude předpis (5.9) analogickým způsobem zkrácen nebo rozšířen.

• Příklady:

Rozhodněte, zda daný výraz je totálním diferenciálem, v kladném případě určete odpovídající kmenovou funkci:

5.22 $(\sin x + y) dx + (x^2 + \cos y) dy$

Výraz není totálním diferenciálem.

5.23 $(x^2 + y) dx + (x + y^2) dy$

$$\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} - \left(\frac{x_0^3}{3} + x_0 y_0 + \frac{y_0^3}{3}\right)$$

5.24 $xy^2 dx + (y^2 + x^2y + 4) dy$

$$\frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + 4y - \left(\frac{x_0^2y_0^2}{2} + \frac{y_0^3}{3} + 4y_0\right)$$

5.25 $(x + 2xy) dx + (\cos y + x^2) dy$

$$\frac{x^2}{2} + x^2y + \sin y - \left(\frac{x_0^2}{2} + x_0^2 y_0 + \sin y_0\right)$$

5.26 $y' \left(\frac{\ln x}{y^2} - y\right) = \frac{1}{xy}, \quad y(1) = 2$

$$2 - \frac{\ln x}{y} - \frac{y^2}{2}$$

$$5.27 \left(3x^2 - 2xy + \frac{1}{y} \right) - \left(x^2 + \frac{x}{y^2} + \frac{2}{y^3} \right) y', y(0) = 1 \quad x^3 - x^2y + \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} - 1$$

$$5.28 (6x^3y^2 + 3x^2) dx + (3x^4y + \cos y) dy, y(1) = \frac{\pi}{2} \quad \frac{3}{2}x^4y^2 + x^3 + \sin y - \frac{3\pi^2}{8} - 2$$

$$5.29 -\frac{2x}{x^2 + y^2} dx - \frac{2y}{x^2 + y^2} dy, y(1) = 1 \quad \ln 2 - \ln(x^2 + y^2)$$

$$5.30 \frac{1}{y^2} dx + \left(-\frac{2x}{y^3} + e^y \right) dy, y(0) = 1 \quad \frac{x}{y^2} + e(e^{y-1} - 1)$$

$$5.31 \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} dx + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} dy, y(1) = 2 \quad \sqrt{x^3 + y^3} \pm 3$$

Dokažte, že dané silové pole je konzervativní, a určete odpovídající potenciální energii V (k je konstanta, Q_1 a Q_2 jsou konstantní elektrické náboje):

$$5.32 \vec{F} = -k\vec{r} \text{ (pružná síla)} \quad V = \frac{kr^2}{2} = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$5.33 \vec{F} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r} \text{ (elektrostatická síla)} \quad V = k \frac{Q_1 Q_2}{r} = k \frac{Q_1 Q_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

5.34 Nalezněte potenciál vektorového pole $\vec{A} = (2xy, x^2)$. Je tento potenciál určený jednoznačně ?

$$\phi = -x^2y + C$$

5.35 Intenzita fyzikálního pole je určena vektorem $\vec{A} = \left[\ln(x-y) + \frac{x}{x-y}, -\frac{x}{x-y}, 0 \right]$. Lze pro toto pole stanovit příslušný potenciál ? Pokud ano, nalezněte jej. Bude tento potenciál určen jednoznačně ?

$$\phi = -x \ln(x-y) + C$$

5.36 Dokažte, že dané centrální silové pole $\vec{F} = -k\vec{r}r$ je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii V v bodě $x, y, z = [X_0, Y_0, Z_0]$, pokud její hodnota v bodě $x, y, z = [0, 0, 0]$ je rovna V_0 . Veličina k je konstanta, \vec{r} je polohový vektor, r je jeho velikost.

$$V(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{k}{3} (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)^{3/2} + V_0$$

5.37 Dokažte, že dané centrální silové pole $\vec{F} = -\frac{k\vec{r}}{r}$, definované pro $r \geq 1$, je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii V v bodě $x, y, z = [X_0, Y_0, Z_0]$, pokud její hodnota v minimální definované vzdálenosti od bodu $x, y, z = [0, 0, 0]$ je rovna V_0 . Veličina k je konstanta, \vec{r} je polohový vektor, r je jeho velikost.

$$V(X_0, Y_0, Z_0) = k \left(\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} - 1 \right) + V_0$$

- 5.38 Dokažte, že dané silové pole $\vec{F} = -k \frac{\vec{r}}{r^3}$, definované pro $r \geq 1$, je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii V v bodě $x, y, z = [2, 2, 1]$, pokud hodnotu potenciální energie ve vzdálenosti $r = 1$ od bodu $x, y, z = [0, 0, 0]$ stanovíme jako $E_0 = 0$. Veličina $k = 1,5$ je obecná konstanta, r je velikost polohového vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$.

$$V(2, 2, 1) = k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}} \right) + E_0 = 1$$

- 5.39 Dokažte, že centrální silové pole \vec{F} , definované pro $r \geq 1$, je konzervativní a určete potenciální energii V pole v bodě $x, y, z = [X_0, Y_0, Z_0]$, pokud stanovíme její hodnotu v minimální definované vzdálenosti od bodu $x, y, z = [0, 0, 0]$ je jako nulovou:

(a) $\vec{F} = -k \vec{r} \ln r$,

(b) $\vec{F} = -k \vec{r} \ln r^2$,

(c) $\vec{F} = -k \vec{r} \ln r^3$.

Veličina k je konstanta, \vec{r} je polohový vektor, r je jeho velikost.

(a) $V(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{k}{2} \left[(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) \left(\ln \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right]$

(b) $V(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{k}{2} \{ (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) [\ln (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) - 1] + 1 \}$

(c) $V(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{k}{2} \left\{ (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) \left[\ln (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \right] + \frac{3}{2} \right\}$

- 5.40 Dokažte, že dané silové pole $\vec{F} = -k(x, y, z) \ln r^{-2}$, definované pro $r \geq 1$, je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii V v bodě $x, y, z = [X_0, Y_0, Z_0]$, pokud potenciální energie ve vzdálenosti $r = 1$ od bodu $x, y, z = [0, 0, 0]$ je rovna E_0 . Veličina k je konstanta, r je velikost polohového vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$.

$$V(X_0, Y_0, Z_0) = -\frac{k}{2} \{ (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) [\ln (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) - 1] + 1 \} + E_0$$

- 5.41 Dokažte, že dané centrální silové pole $\vec{F} = -k \vec{r} e^r$ je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii V v bodě $x, y, z = [X_0, Y_0, Z_0]$, pokud hodnota potenciální energie v bodě $x, y, z = [0, 0, 0]$ je rovna $-V_0 = -k$. Veličina k je konstanta, \vec{r} je polohový vektor, r je jeho velikost.

$$V(X_0, Y_0, Z_0) = V_0 e^{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}} \left(\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} - 1 \right)$$

5.3 Diferenciální operátory

Diferenciální operátory určují působení operátoru nabla (viz také oddíly 5.1 a 5.2) na skalární nebo vektorové pole některým z následujících způsobů:

- *gradient* skalární funkce f : $\text{grad } f = \vec{\nabla} f$, výsledkem je vektor (5.10)

- *divergence* vektorového pole \vec{A} : $\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$, výsledkem je skalár (5.11)

- *rotace* vektorového pole \vec{A} (pouze v \mathbb{R}^3): $\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, výsledkem je vektor (5.12)

- Laplaceův operátor (*Laplacián*): $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$, nemění původní pole (5.13)

Laplaceův operátor tzv. nemění řád tenzoru, tj. pokud působí na skalár, výsledkem je skalár, pokud působí na vektor, výsledkem zůstává vektor, atd. (viz příloha B). Variantní forma zápisu diferenciálních operátorů pomocí volných indexů (v Einsteinově konvenci) může v kartézském souřadnicovém systému vypadat následovně (význam symbolů δ_{ij} a ε_{ijk} je vysvětlen v odstavci 2.3):

- *gradient* skalární funkce f : $\text{grad } f = \vec{e}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, (5.14)

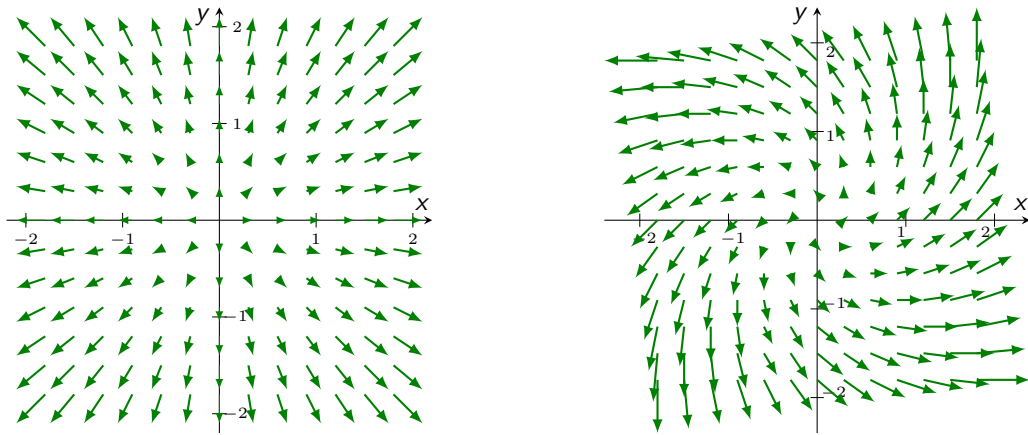
- *divergence* vektorového pole \vec{A} : $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_j \delta_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_i$, (5.15)

- *rotace* vektorového pole \vec{A} : $\text{rot } \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} A_k$, (5.16)

- Laplaceův operátor (*Laplacián*): $\Delta f = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} f$, $\Delta \vec{A} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} A_i$. (5.17)

Gradient skalární funkce reprezentuje vektorové pole, udávající velikost a směr největšího nárůstu dané skalární funkce. Divergenci vektoru můžeme interpretovat například jako „míru expanze“ („intenzitu vytékání“) dané vektorové veličiny, případně jako její „zřídlovost“, tj. míru toho, jak mnoho se dané vektorové pole chová jako „vycházející ze zdroje“. Například, pokud vektorové pole zároveň „vzniká“ (zdroj) i „zaniká“ (propad), je jeho divergence nulová (případ magnetické indukce), rovněž homogenní vektorové pole (konstantní vektor) musí mít z definice nulovou divergenci, atd. Rotace vektorového pole (jak vyplývá z názvu) popisuje infinitesimální rotaci daného pole v obecném bodě v prostoru; pokud je rotace nulová, mluvíme o „nevírovém“ toku dané vektorové veličiny. Rotace vektorového pole je definována pouze ve trojrozměrném případě.

Podrobný popis odvození jednotlivých diferenciálních operátorů v hlavních souřadnicových soustavách včetně související matematiky je uveden v příloze B. Zde je uveden pouze základní přehled explicitních tvarů diferenciálních operátorů v kartézské, válcové a kulové soustavě v \mathbb{R}^3 (ve válcové soustavě opět zavádíme pro odlišení ρ namísto r), kdy operátor Laplaciánu může působit buď na skalární funkci, anebo na jednotlivé složky vektoru:



Obrázek 5.2: *Levý obrázek:* Dvourozměrné znázornění vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = a(x, y, 0)$, kde je zavedena škálovací konstanta $a = 1/6$ kvůli grafické přehlednosti. Divergence tohoto pole, $\text{div } \vec{F} = 2a$, rotace tohoto pole je nulová. V tomto případě (divergence je konstantní) vidíme, že velikost vektoru (délka šipek) se zvětšuje přímo úměrně se vzdáleností od počátku avšak vektor se vzdáleností nemění směr. Pokud by divergence byla funkcí některé ze souřadnic, měnil by se nějakým způsobem v závislosti na vzdálenosti od počátku i směr vektoru. *Pravý obrázek:* Dvourozměrné znázornění vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = a(x - y, x + y, 0)$, kde je zavedena stejná škálovací konstanta $a = 1/6$. Divergence tohoto pole je opět $2a$, ovšem rotace tohoto pole je nyní také nenulová, $\|\text{rot } \vec{F}\| = 2a$.

- Kartézská souřadná soustava $(x_1, x_2, x_3 = x, y, z)$:

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad (5.18)$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (5.19)$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right), \quad (5.20)$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (5.21)$$

$$\Delta \vec{A} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (A_x, A_y, A_z) = \quad (5.22)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right). \quad (5.23)$$

- Válcová souřadná soustava ($x_1, x_2, x_3 = \rho, \phi, z$):

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad (5.24)$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (5.25)$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}, \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \right\}, \quad (5.26)$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (5.27)$$

$$\Delta \vec{A} = \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] (A_\rho, A_\phi, A_z). \quad (5.28)$$

- Kulová souřadná soustava ($x_1, x_2, x_3 = r, \theta, \phi$):

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right), \quad (5.29)$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}, \quad (5.30)$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right], \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right], \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \right\}, \quad (5.31)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}, \quad (5.32)$$

$$\Delta \vec{A} = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] (A_r, A_\theta, A_\phi). \quad (5.33)$$

• Příklady:

5.42 Dokažte následující vztahy (všechny příklady v tomto odstavci uvažujeme v \mathbb{R}^3), kde \vec{r} je polohový vektor, $r = \|\vec{r}\|$ je jeho velikost, \vec{A} je konstantní vektor, \vec{B} je libovolný vektor, \mathbf{E} je jednotková matice a $n \in \mathbb{R}$ je konstanta :

- $\text{div } \vec{r} = 3$,
- $\text{rot } \vec{r} = \vec{0}$,
- $\Delta \vec{r} = \vec{0}$,
- $\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r}$,
- $\text{grad } (\vec{A} \cdot \vec{r}) = \vec{A}$,
- $\text{grad } (r^n) = nr^{n-2} \vec{r}$,
- $\text{grad } \vec{r} = \mathbf{E}$ v kartézské soustavě,
- $\text{grad } (\vec{B} \cdot \vec{r}) = \vec{B} + (\nabla \vec{B}) \cdot \vec{r}$,

Pomocí vektorových identit v kartézských souřadnicích.

5.43 Spočítejte: $\text{div rot } \vec{F}, \vec{F} = [xyz, y(x^2 - z^2), xy + zx + yz]$. 0

5.44 Spočítejte: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F}$, $\vec{F} = (x^2y, y^2, z^2x)$. 0

5.45 Spočítejte: $\operatorname{grad} f$, $f(x, y, z) = 2xyz + x^2y + y^2z + z^2x$.
 $\operatorname{grad} f = (2yz + 2xy + z^2, 2xz + x^2 + 2yz, 2xy + y^2 + 2xz)$

5.46 Spočítejte: $\operatorname{grad} f$, $f(x, y, z) = x^2y + x \cosh(yz)$.
 $\operatorname{grad} f = [2xy + \cosh(yz), x^2 + xz \sinh(yz), xy \sinh(yz)]$

5.47 Ukažte, že $\operatorname{div} \vec{F} = (x - y^2, y^5z^2, 3e^{y^2z})$ je kladná. $\operatorname{div} \vec{F} = 1 + 5y^4z^2 + 3y^2e^{y^2z}$

Pro skalární funkce f, g a vektory \vec{A}, \vec{B} dokažte :

5.48 $\vec{\nabla}(fg) = (\vec{\nabla}f)g + f\vec{\nabla}g$

5.49 $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}f = \vec{0}$

5.50 $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

5.51 $\vec{\nabla} \cdot f\vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}f + f\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

5.52 $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$

5.53 $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$

5.54 $\vec{\nabla} \times f\vec{A} = (\vec{\nabla}f) \times \vec{A} + f\vec{\nabla} \times \vec{A}$

5.55 Dokažte platnost vektorové identity $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$.

5.56 Dokažte platnost vektorové identity $\vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}A^2 - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$.

Příklady 5.48 - 5.56 - pomocí vektorových identit v kartézských souřadnicích.

5.57 Středově symetrické (izotropní) fyzikální pole je určeno vektorem $\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r}$, kde \vec{r} je polohový vektor, r je jeho velikost. Dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{2}{r}$.

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{r}$$

5.58 Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = \ln\left(\frac{A}{r}\right) + B$, kde A je kladná konstanta, r je velikost polohového vektoru \vec{r} . Konstanta B nastavuje hodnotu potenciálu ϕ ve vzdálenosti A od bodu $x, y, z = [0, 0, 0]$. Určete vektor intenzity \vec{E} tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}$.

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

5.59 Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = -Ar^3 + B$, kde konstanta A škáluje velikost r polohového vektoru \vec{r} , konstanta B nastavuje hodnotu potenciálu ϕ v bodě $x, y, z = [0, 0, 0]$. Určete vektor intenzity \vec{E} tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 12A\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 12Ar$.

$$\vec{E} = 3A\vec{r}r = 3A(x, y, z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 12Ar = 12A\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

5.60 Hypotetické centrální fyzikální pole, definované pro vzdálenost $r \geq 1$, je určeno potenciálem $\phi = -Ar^2 \ln r^2 + B$, kde konstanta A škáluje velikost r polohového vektoru \vec{r} , konstanta B nastavuje hodnotu potenciálu ϕ v minimální definované vzdálenosti od bodu $x, y, z = [0, 0, 0]$. Určete vektor intenzity \vec{E} tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A(6 \ln r^2 + 10)$.

$$\vec{E} = 2A\vec{r}(\ln r^2 + 1) = 2A(x, y, z)[\ln(x^2 + y^2 + z^2) + 1], \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A(6 \ln r^2 + 10)$$

5.61 Hypotetické fyzikální pole je určeno nesymetrickým potenciálem $\phi = \frac{Ax}{r}$, kde A je kladná konstanta a r je velikost polohového vektoru \vec{r} . Určete vektor intenzity \vec{E} tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{2\phi}{r^2}$.

$$\vec{E} = \frac{-A(y^2 + z^2), Axy, Axz}{r^3}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{2Ax}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2Ax}{r^3}$$

5.62 Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = Ae^{-r}$, kde A je kladná konstanta, r je velikost polohového vektoru \vec{r} . Určete vektor intenzity \vec{E} tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = Ae^{-r} \left(\frac{2}{r} - 1 \right)$.

$$\vec{E} = Ae^{-r} \frac{\vec{r}}{r} = Ae^{-\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = Ae^{-\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1 \right)$$

5.63 Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = A^{-r}$, kde A je kladná konstanta, r je velikost polohového vektoru \vec{r} . Určete vektor intenzity \vec{E} tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A^{-r} \ln A \left(\frac{2}{r} - \ln A \right)$.

$$\vec{E} = A^{-r} \ln A \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A^{-\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \ln A \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \ln A \right)$$

5.64 Pomocí Kroneckerova delta a Levi-Civitova symbolu ověřte vektorové identity z příkladů (5.48)-(5.56) v Einsteinově notaci.

Pomocí rovnic (2.54) a (5.14)-(5.17).

Kapitola 6

Křivkový integrál^{1 2}

6.1 Křivkový integrál 1. druhu

Křivkovým integrálem 1. druhu nazýváme integrál $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$, kde (v \mathbb{R}^3) $f(x, y, z)$ je hladká (po částech hladká³) skalární funkce podél křivky \mathcal{C} a ds je délkový element křivky: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ (Pythagorova věta v diferenciálním tvaru). Je-li křivka \mathcal{C} uzavřená, vyznačíme to kroužkem přes integrační znak, tedy \oint . Stanovíme-li například souřadnici x jako nezávisle proměnnou a $y(x)$, $z(x)$ jako závisle proměnné, můžeme psát

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \, dx. \quad (6.1)$$

Nalezneme-li vhodný parametr t , potom bude parametrizovaná rovnice (6.1) s funkcemi $f(t) = f[x(t), y(t), z(t)]$, $s(t) = s[x(t), y(t), z(t)]$, mít tvar

$$\int_{\mathcal{C}} f(t) \frac{ds(t)}{dt} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \, dt. \quad (6.2)$$

Pomocí křivkového integrálu 1. druhu lze určit některé geometrické a fyzikální charakteristiky dané křivky. Položíme-li $f = 1$, výsledkem bude délka křivky \mathcal{C} . Položíme-li $f = \tau$ (délková hustota křivky), dostáváme $\tau \, ds = dm$, tedy hmotnost elementu křivky, výsledkem integrace bude hmotnost křivky \mathcal{C} ,

$$m = \int_{\mathcal{C}} dm = \int_{\mathcal{C}} \tau \, ds. \quad (6.3)$$

Pokud položíme například $f = z\tau$, dostáváme tzv. statický moment S_z křivky vzhledem k ose z , jeho vydělením hmotností dostáváme z -ovou souřadnici středu hmotnosti z_T křivky \mathcal{C} (obdobně pro ostatní souřadnicové směry), tedy

$$x_T = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x \, dm = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x\tau \, ds, \quad y_T = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} y \, dm, \quad z_T = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} z \, dm. \quad (6.4)$$

Položíme-li $f = r^2\tau$, kde r je vzdálenost obecného bodu křivky od zvolené přímky v prostoru (osy o), dostáváme moment setrvačnosti J_o křivky \mathcal{C} vzhledem k této ose. Momenty setrvačnosti

¹Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nejsou uváděny příslušné jednotky.

²Doporučená literatura k této kapitole: Děmidovič (2003), Kvasnica (2004), Bartsch (2008), Rektorys (2009).

³Po částech hladká křivka se skládá z konečného počtu hladkých křivek. Totéž platí pro plochy, funkce, atd.

křivky \mathcal{C} např. vzhledem k jednotlivým kartézským souřadnicovým osám potom budou

$$J_x = \int_{\mathcal{C}} (y^2 + z^2) dm = \int_{\mathcal{C}} (y^2 + z^2) \tau ds, \quad J_y = \int_{\mathcal{C}} (z^2 + x^2) dm, \quad J_z = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) dm. \quad (6.5)$$

• **Příklady:**

6.1 V kartézských souřadnicích i pomocí vhodné parametrizace vypočítejte délku kružnice s poloměrem R .

$$s = 2\pi R$$

6.2 Vypočítejte délku křivky $s = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) ds$, kde \mathcal{C} je křivka s parametrizací $x = a \sin t$, $y = a \cos t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

$$s = \pi a^3$$

6.3 Vypočítejte délku křivky $s = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) ds$, kde \mathcal{C} je křivka s parametrizací $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

$$s = a^3 (2\pi^2 + 4\pi^4)$$

6.4 Vypočítejte délku jednoho oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

$$s = 8a$$

6.5 Vypočítejte délku úseku paraboly $y = x^2$, ohraničeného body $[-2, 4]$ a $[2, 4]$.

$$s = 2\sqrt{17} + \ln \sqrt{4 + \sqrt{17}} \approx 9,2936$$

6.6 Kolikrát delší bude skutečná trajektorie s šikmého vrhu (s počátečním a koncovým bodem ve stejné výšce)

- (a) s maximálním možným doletem D ,
- (b) pokud počáteční (elevační) úhel $\alpha = 30^\circ$,
- (c) pokud elevační úhel $\alpha = 60^\circ$,
- (d) pokud elevační úhel bude takový aby maximální výška trajektorie se rovnala doletu,

než příslušný dolet? Dokažte, že pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\frac{s}{D} \rightarrow \infty$, a rovněž že pro $\alpha = 0$, $\frac{s}{D} \rightarrow 1$.

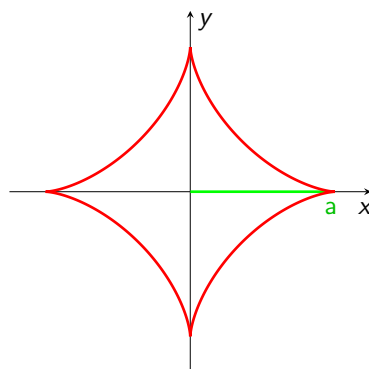
$$s = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\cos \alpha} + \ln \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \cotg \alpha \right] D$$

$$(a) s = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln \sqrt{1 + \sqrt{2}} \right) D \approx 1,15D, \quad (b) s = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} \ln \sqrt{3}}{2} \right) D \approx 1,05D,$$

$$(c) s = \left(1 + \frac{\ln \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \right) D \approx 1,38D, \quad (d) s = \left(\frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{\ln \sqrt{4 + \sqrt{17}}}{4} \right) D \approx 2,32D$$

6.7 Přímým výpočtem v kartézských souřadnicích a také pomocí vhodné parametrizace vypočítejte hmotnost astroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ s délkovou hustotou $\tau = x^{4/3} + y^{4/3}$ (viz obrázek 6.1). Parametrizace astroidy může být například: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, kde t neznačí čas, nýbrž úhlový parametr.

$$m = 4a^{7/3}$$



Obrázek 6.1: Astroida. Geometrický význam konstanty a je vyznačen zelenou barvou.

6.8 Pomocí parametrizace $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, vypočítejte hmotnost jednoho „závitu“ válcové šroubovice s délkovou hustotou $\tau = \frac{z^2}{x^2 + y^2}$.

$$m = \frac{8\pi^3}{3} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sqrt{a^2 + b^2}$$

6.9 Pomocí vhodné parametrizace a s použitím obecných koeficientů vypočítejte hmotnost jednoho „závitu“ válcové šroubovice s délkovou hustotou $\tau = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$m = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \operatorname{arctg} \frac{2\pi b}{a}$$

6.10 Pomocí parametrizace $x = at \cos t$, $y = at \sin t$, $z = bt$, vypočítejte hmotnost jednoho „závitu“ kuželové šroubovice s délkovou hustotou $\tau = 2\sqrt{x^2 + y^2} - z$.

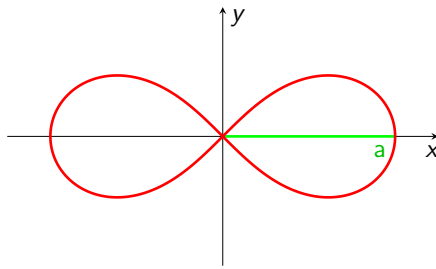
$$m = \frac{2a - b}{3a^2} \left[\sqrt{(a^2 + b^2 + 4\pi^2 a^2)^3} - \sqrt{(a^2 + b^2)^3} \right]$$

6.11 Dokažte vztah $s = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{f^2 + \dot{f}^2} d\phi$, kde s je délka hladké křivky, vyjádřené v polárních souřadnicích $r = f(\phi)$, a kde $\dot{f} = df/d\phi$.

z transformačních vztahů pro polární souřadnice a z definice křivkového integrálu

6.12 Dokažte vztah $s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2 + \dot{g}^2 (f^2 \sin^2 \theta + \dot{f}^2)} d\theta$, kde s je délka hladké křivky, vyjádřené v kulových souřadnicích $r = f(\phi)$, $\phi = g(\theta)$, a kde $\dot{f} = df/d\phi$, $\dot{g} = dg/d\theta$.

z transformačních vztahů pro kulové souřadnice a z definice křivkového integrálu



Obrázek 6.2: Bernoulliho lemniskáta. Geometrický význam konstanty a je vyznačen zelenou barvou.

- 6.13 Pomocí vhodné transformace souřadnic vypočítejte hmotnost Bernoulliho lemniskáty (obrázek 6.2) s kartézskou rovnicí $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, s délkovou hustotou $\tau = |y|$. Vyjděte z principu uvedeného v příkladu 6.11 nebo použijte transformační rovnice: $x = a \cos t / (1 + \sin^2 t)$, $y = a \sin t \cos t / (1 + \sin^2 t)$, kde $t = \arcsin(\operatorname{tg} \phi)$ je úhlový parametr (rozvažte vždy správné integrační meze pro zvolený parametr v rámci příslušného kvadrantu).

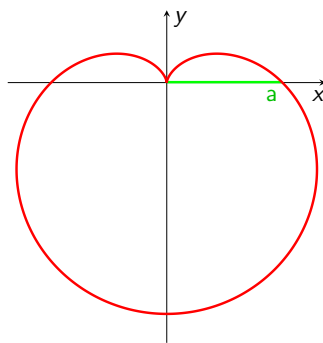
$$m = 2a^2(2 - \sqrt{2})$$

- 6.14 Příímým výpočtem v kartézských souřadnicích a také pomocí vhodné transformace souřadnic vypočítejte hmotnost nehomogenní křivky s délkovou hustotou $\tau = x + y$, která vznikne průnikem ploch $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$, v 1. oktantu.

$$m = \sqrt{2}a^2$$

- 6.15 Vypočítejte hmotnost oblouku elipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ v 1. kvadrantu. Délková hustota $\tau = xy$.

$$m = \frac{38}{5}$$



Obrázek 6.3: Kardioida. Geometrický význam konstanty a je vyznačen zelenou barvou.

- 6.16 Vypočítejte celkovou délku s a hmotnost m kardioidy (obrázek 6.3) s polární rovnicí $r = a(1 - \sin \phi)$, s délkovou hustotou $\tau = |x|$.

$$s = 8a, \quad m = \frac{32a^2}{5}$$

6.17 Určete souřadnice těžiště T půlkružnice (procházející 1. a 2. kvadrantem) a čtvrtkružnice (procházející 1. kvadrantem), obojí s délkovou hustotou $\tau = y$. Určete jejich momenty setrvačnosti, pokud se budou otáčet okolo svých geometrických os.

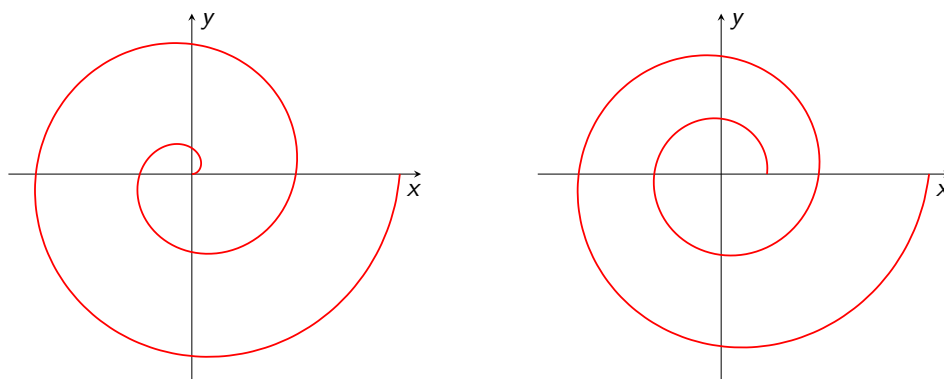
$$T = \left[0, \frac{\pi a}{4}\right], T = \left[\frac{a}{2}, \frac{\pi a}{4}\right], J = 2a^4, J = a^4$$

6.18 Určete souřadnice těžiště T jednoho oblouku cykloidy z příkladu 6.4 s homogenní délkovou hustotou $\tau(x, y) = 1$.

$$T = \left[\pi a, \frac{4a}{3}\right]$$

6.19 Drát má tvar kružnice $x^2 + y^2 = a^2$. Vypočítejte jeho moment setrvačnosti J , pokud se drát otáčí okolo svého průměru. Jeho délková hustota $\tau = |x| + |y|$.

$$J = 4a^4$$



Obrázek 6.4: „Dva závity“ spirály s polárním úhlem $\phi \in \langle 0, 4\pi \rangle$. Vlevo: Archimedova spirála, vpravo: logaritmická spirála.

6.20 Vypočítejte délku ℓ „dvou závity“ (viz obrázek 6.4) a moment setrvačnosti J následujících křivek s konstantní délkovou hustotou τ , rotujících okolo osy z (procházející počátkem, kolmo k vyobrazené rovině):

- Archimédovy spirály, dané v polárních souřadnicích předpisem $r = \alpha\phi$, kde α je kladná konstanta a polární úhel $\phi \in \langle 0, 4\pi \rangle$,
- logaritmické spirály, dané v polárních souřadnicích předpisem $r = \alpha e^{\beta\phi}$, kde α a β jsou kladné konstanty a kde polární úhel $\phi \in \langle 0, 4\pi \rangle$.
- jak se změní úloha (b), pokud počátek spirály bude v bodě $[0, 0]$?

Výsledek také vyjádřete jako funkci hmotnosti křivky $m = \tau\ell$ a největší vzdálenosti křivky od osy rotace $R = r_{\max}$.

$$(a) \ell = \frac{\alpha}{2} \left[4\pi\sqrt{16\pi^2 + 1} + \ln(4\pi + \sqrt{16\pi^2 + 1}) \right],$$

$$J = \frac{\tau\alpha^3}{8} \left[4\pi(32\pi^2 + 1)\sqrt{16\pi^2 + 1} - \ln(4\pi + \sqrt{16\pi^2 + 1}) \right] \approx 0,492 mR^2,$$

$$(b) \ell = \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\beta^2 + 1} (e^{4\pi\beta} - 1), J = \frac{\tau\alpha^3}{3\beta} \sqrt{\beta^2 + 1} (e^{12\pi\beta} - 1) = (1 + e^{-4\pi\beta} + e^{-8\pi\beta}) \frac{mR^2}{3},$$

$$(c) \ell = \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\beta^2 + 1} e^{4\pi\beta}, J = \frac{\tau\alpha^3}{3\beta} \sqrt{\beta^2 + 1} e^{12\pi\beta} = \frac{mR^2}{3}$$

6.2 Křivkový integrál 2. druhu

Křivkovým integrálem 2. druhu nazýváme integrál $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ obecného vektorového pole $\vec{F}(x, y, z)$ podél křivky \mathcal{C} , kde $d\vec{s}$ je tečný vektor elementu ds dané křivky (viz odstavec 6.1). Explicitní zápis integrálu 2. druhu v kartézské souřadné soustavě (v \mathbb{R}^3) bude mít tvar

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz, \quad (6.6)$$

kde F_x, F_y, F_z jsou jednotlivé složky vektoru \vec{F} . Analogicky k rovnici (6.2) bude mít parametrizovaný křivkový integrál 2. druhu tvar

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[F_x(t) \frac{dx(t)}{dt} + F_y(t) \frac{dy(t)}{dt} + F_z(t) \frac{dz(t)}{dt} \right] dt. \quad (6.7)$$

Typickým příkladem integrálu 2. druhu je výpočet vykonané práce jako integrálu vektoru síly \vec{F} podél orientované křivky \mathcal{C} .

• Příklady:

6.21 Přímým výpočtem v kartézských souřadnicích i pomocí vhodné parametrizace vypočítejte křivkový integrál druhého druhu $\oint_{\mathcal{C}} x dx + y dy$, kde \mathcal{C} je kladně orientovaná kružnice s poloměrem a .

0

6.22 Přímým výpočtem v kartézských souřadnicích i pomocí vhodné parametrizace vypočítejte křivkový integrál druhého druhu $\int_{\mathcal{C}} x^2 dx + y^2 dy$, kde křivka \mathcal{C} je kladně orientovaná půlkružnice s poloměrem a v 1. a 2. kvadrantu.

$-\frac{2a^3}{3}$

6.23 Přímým výpočtem v kartézských souřadnicích i pomocí vhodné parametrizace vypočítejte křivkový integrál druhého druhu $\int_{\mathcal{C}} (x+1) dy + y dx$, kde křivka \mathcal{C} je kladně orientovaná čtvrtkružnice s poloměrem a v 1. kvadrantu.

a

6.24 Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu $\int_{\mathcal{C}} x dx + y dy + (xz - y) dz$, kde křivka \mathcal{C} je daná parametricky $x = t^2, y = 2t, z = 4t^3, t \in \langle 0, 1 \rangle$.

$\frac{5}{2}$

- 6.25 Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu $\oint_C (2 - y) dx + (1 + x) dy$, kde křivka C je obvod trojúhelníka ve směru vrcholů $A = [0, 0]$, $B = [1, 1]$, $C = [0, 2]$.

2

- 6.26 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (y, z, x)$, působící po kladně orientované uzavřené křivce, která je daná průnikem ploch $z = xy$ a $x^2 + y^2 = 1$.

$W = -\pi$

- 6.27 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = \left(\frac{y}{x}, x\right)$, působící po křivce $xy = 1$ od bodu $\left[3, \frac{1}{3}\right]$ do bodu $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

$W = \ln 6 - \frac{5}{3}$

- 6.28 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (x - y, x + y)$, působící po dráze $y = x^2$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$.

$W = \frac{38}{3}$

- 6.29 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (y, -x, z)$, působící po obvodě trojúhelníka, jehož vrcholy jsou tvořeny průsečíky roviny $3x + 2y + 6z = 6$ se souřadnicovými osami v pořadí x, y, z .

$W = -6$

- 6.30 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (yz, xy, yz)$, působící po obvodě trojúhelníka, jehož vrcholy jsou tvořeny průsečíky roviny $2x + 3y + 4z = 12$ se souřadnicovými osami v pořadí x, y, z .

$W = 22$

- 6.31 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (x^2 + y, 3y^2, 0)$, která působí po uzavřené křivce, sestávající z kladně orientované půlkružnice o poloměru a v 1. a 2. kvadrantu a úsečky (průměru).

$W = -\frac{\pi a^2}{2}$

- 6.32 Vypočítejte práci, kterou by vykonalo tíhové pole při jízdě tobogánem s přesně třemi otáčkami, pokud by tíhové pole vypadalo $\vec{F}_g = -mg(0, 0, z)$. Tobogán si lze představit jako válcovou šroubovici, použijte obecné koeficienty.

$W = 18\pi^2 b^2 mg$

- 6.33 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (x^2 + y, 3y^2, 0)$, která působí v matematicky kladném směru po půlkružnici o poloměru a . Půlkružnice má střed v počátku souřadného systému a prochází 2. a 3. kvadrantem roviny xy kartézské souřadné soustavy. Je toto silové pole konzervativní?

$W = -\frac{\pi a^2}{2} - 2a^3$, pole není konzervativní.

6.34 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (x^2, -y, z)$ působící v matematicky kladném směru po křivce dané předpisem $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $z = 2$, z počátečního bodu $[1, -1, 2]$ do koncového bodu $[0, 0, 2]$. Je toto silové pole konzervativní ?

$W = \frac{1}{6}$, pole je konzervativní.

6.35 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (2x^2 - y, x, z)$, která působí v matematicky záporném směru po polovině závitu válcové šroubovice o poloměru R s osou $(0, 0, z)$, procházející počátkem souřadnicového systému. Počáteční bod dráhy působící síly má souřadnice $[0, R, \frac{\pi b}{2}]$, koncový bod má souřadnice $[0, -R, -\frac{\pi b}{2}]$. Je toto silové pole konzervativní ?

$W = -\pi R^2$, pole není konzervativní.

6.36 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (3x - y, x, z)$, která působí v matematicky kladném směru po dráze jednoho závitu válcové šroubovice o poloměru R s osou $(0, 0, z)$, procházející počátkem souřadnicového systému. Počáteční bod dráhy působící síly má souřadnice $[0, -R, -\frac{\pi b}{2}]$, koncový bod má souřadnice $[0, -R, \frac{3\pi b}{2}]$, transformační rovnice šroubovice jsou: $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = bt$. Je toto silové pole konzervativní ?

$W = \pi (2R^2 + \pi b^2)$, pole není konzervativní.

6.37 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (x^3, y, z^3)$, která působí nejprve v matematicky kladném směru po křivce, dané předpisem $x^2 + (y-3)^2 = 4$, $z = 5$, z bodu $[0, 1, 5]$ do bodu $[2, 3, 5]$ a potom po úsečce do bodu $[3, 1, 5]$. Je toto silové pole konzervativní ?

$W = \frac{81}{4}$, pole je konzervativní.

6.38 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F}(x, y) = (x - y, x)$, která působí po následující uzavřené křivce: nejprve po úsečce z bodu $[1, 1]$ do bodu $[1, 2]$, dále po čtvrtkružnici se středem v bodě $[1, 1]$ v matematicky záporném směru do bodu $[2, 1]$ a nakonec po úsečce zpět do výchozího bodu. Je toto silové pole konzervativní ?

$W = -\frac{\pi}{2}$, pole není konzervativní.

6.39 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$, která působí po následující uzavřené křivce: nejprve po úsečce z bodu $[0, 0]$ do bodu $[2, 1]$, dále po úsečce do bodu $[2, 2]$ a nakonec po čtvrtkružnici se středem v bodě $[2, 0]$ v matematicky kladném směru zpět do výchozího bodu. Jak se vykonaná práce změní, pokud působící síla $\vec{F}(x, y) = (y, x)$?

$W = 2(\pi - 1)$, práce konzervativní síly po uzavřené křivce by byla nulová.

6.40 Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$, která působí po následující uzavřené křivce: nejprve po úsečce z bodu $[0, 0]$ do bodu $[1, 0]$, dále po úsečce do bodu $[1, 1]$ a nakonec po čtvrtkružnici se středem v bodě $[1, 0]$ v matematicky kladném směru zpět do výchozího bodu. Jak se vykonaná práce změní, pokud působící síla $\vec{F}(x, y) = (y, x)$?

$W = \frac{\pi}{2}$, konzervativní síla - práce by byla nulová.

Kapitola 7

Dvojný a trojný integrál^{1 2}

Na integrál funkce $f(x, y)$ dvou proměnných x, y (dvojný integrál), která je spojitá na dvourozměrné oblasti $\mathcal{S} = (a, b) \times (c, d)$, kde $a \leq x \leq b$ a $c \leq y \leq d$, je možné aplikovat tzv. *Fubiniho* (Fubiniovu) větu o výpočtu n -rozměrných integrálů pomocí n výpočtů jednoduchých integrálů,

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \quad (7.1)$$

Platí-li v tomto případě $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$, zjednoduší se rovnice (7.1) do výrazu

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy. \quad (7.2)$$

Definujme nyní jinou oblast \mathcal{S} , která již není obdélníkem a je ohraničená přímkami $x = a$, $x = b$, kde $a \leq x \leq b$, a grafy funkcí $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$, tedy $\mathcal{S} = (a, b) \times [\phi_1(x), \phi_2(x)]$. Integrál funkce $f(x, y)$, spojitě na oblasti \mathcal{S} , je potom definován jako

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (7.3)$$

Pokud v případě (7.3) na intervalu $\langle a, b \rangle$, nebo na jeho části, platí $\phi_1(x) < y < \phi_2(x)$, potom tato oblast přispívá kladně k celkovému integrálu, v opačném případě $[\phi_2(x) < y < \phi_1(x)]$ se jedná o záporný příspěvek k celkovému integrálu (viz obrázek 7.1). Toto můžeme porovnat také s integrálem funkce jedné proměnné na obrázku 1.2, který lze takto pojmout jako dvojný integrál kartézského plošného elementu $dx dy$ na oblasti $\mathcal{S} = (a, b) \times [0, f(x)]$.

Zcela obdobné zásady platí i na třírozměrné oblasti $\mathcal{V} = (a, b) \times (a, b) \times (e, f)$, kde $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $e \leq z \leq f$. Zde je integrál spojitě funkce $f(x, y, z)$ tří proměnných (trojný integrál) definován jako

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left[\int_e^f f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx, \quad (7.4)$$

¹Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nejsou uváděny příslušné jednotky.

²Doporučená literatura k této kapitole: Děmidovič (2003), Kvasnica (2004), Bartsch (2008), Rektorys (2009), Plch et al. (2012).

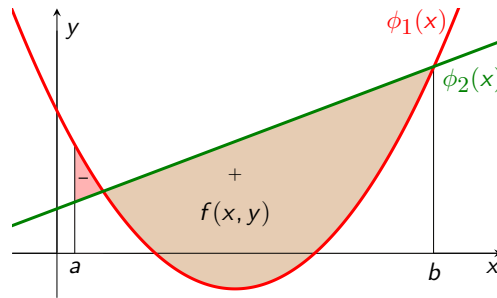
³Rovnice (7.1) neplatí v případě, kdy integrál absolutní hodnoty funkce v integrandu diverguje, tj. $\iint_{\mathcal{S}} |f(x, y)| dx dy \rightarrow \pm\infty$. Podrobnosti o takových případech jsou nad rámec těchto skript, zájemcům doporučuji uvedenou literaturu.

kde lze opět pořadí integrování zaměnit analogicky k rovnici (7.1). Platí-li v tomto případě $f(x, y, z) = g(x) \cdot h(y) \cdot k(z)$, zjednoduší se rovnice (7.4) do součinu

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy \cdot \int_e^f k(z) dz. \quad (7.5)$$

Obdobně jako v rovnici (7.3) je na třírozměrné oblasti \mathcal{V} , která není pravoúhlým kvádrem a je tedy ohraničená způsobem $\mathcal{V} = (a, b) \times [\phi_1(x), \phi_2(x)] \times [\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)]$, kde $a \leq x \leq b$ a kde funkce $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ jsou spojitě na intervalu $\langle a, b \rangle$ a funkce $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ jsou spojitě na oblasti $\mathcal{S} = (a, b) \times [\phi_1(x), \phi_2(x)]$, integrál funkce $f(x, y, z)$ spojitě na oblasti \mathcal{V} definován jako

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx. \quad (7.6)$$



Obrázek 7.1: Grafické znázornění oblasti integrace $\mathcal{S} = (a, b) \times [\phi_1(x), \phi_2(x)]$ spojitě funkce $f(x, y)$, ilustrující vzorec (7.3). Graf funkce $\phi_1(x)$ je vyobrazen červenou křivkou, graf funkce $\phi_2(x)$ je vyobrazen zelenou křivkou. Dílčí oblast, která kladně přispívá k velikosti celkového integrálu (kde $\phi_2(x) > \phi_1(x)$), je vyznačena okrovou (hnědou) barvou, dílčí oblast, která přispívá k velikosti celkového integrálu záporně (kde $\phi_2(x) < \phi_1(x)$), je vyznačena červeně.

Transformaci souřadnic dvojného integrálu lze definovat (viz obrázek 7.2) pomocí vzájemně jednoznačného zobrazení Φ , zadaného transformačními rovnicemi $x = \xi(u, v)$, $y = \eta(u, v)$. Pokud $A \subset \mathbb{R}^2(x, y)$ a $B \subset \mathbb{R}^2(u, v)$ jsou uzavřené oblasti (vyznačené v obrázku 7.2 barevnými plochami) a funkce $f(x, y)$ je spojitá na oblasti $A = \Phi(B)$, potom platí

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f[\xi(u, v), \eta(u, v)] J(u, v) du dv. \quad (7.7)$$

Výraz

$$J(u, v) = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right|, \quad (7.8)$$

v rovnici (7.7) je *Jakobián* dvourozměrné souřadnicové transformace. Trojný integrál funkce $f(x, y, z)$ lze transformovat pomocí vzájemně jednoznačného zobrazení Ψ s transformačními rovnicemi $x = \xi(u, v, w)$, $y = \eta(u, v, w)$, $z = \zeta(u, v, w)$ s obdobně uzavřenými oblastmi $A \subset$

$\mathbb{R}^3(x, y, z)$, $B \subset \mathbb{R}^3(u, v, w)$, kdy funkce $f(x, y, z)$ je spojitá na oblasti $A = \Phi(B)$. Potom analogicky k rovnici (7.7) platí,

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f[\xi(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w)] J(u, v, w) du dv dw. \quad (7.9)$$

Výraz

$$J(u, v, w) = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \right| \quad (7.10)$$

v rovnici (7.9) je Jakobián trojrozměrné souřadnicové transformace. Významné a často používané jsou Jakobiány souřadnicových transformací z kartézské do válcové souřadné soustavy, kdy $(u, v, w) = (\rho, \phi, z)$, s transformačními rovnicemi $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = z$, kde $J = \rho$, a z kartézské do kulové souřadné soustavy, kdy $(u, v, w) = (r, \theta, \phi)$, s transformačními rovnicemi $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$, kde $J = r^2 \sin \theta$ (srovnej s plošnými a objemovými elementy jednotlivých souřadnicových soustav, odvozenými v kapitole 4).

7.1 Plošný integrál 1. druhu

Plošným integrálem 1. druhu (analogicky ke křivkovému integrálu 1. druhu v odstavci 6.1) nazýváme integrál skalární funkce $\iint_S f(x, y, z) dS$, která je spojitá na hladké (po částech hladké) ploše S , kde dS je plošný element plochy S . Stanovíme-li například souřadnice x a y jako nezávisle proměnné a souřadnici $z = \varphi(x, y)$ jako závisle proměnnou, můžeme tečné vektory \vec{t}_x, \vec{t}_y k ploše S ve směrech souřadnicových os x, y určit jako parciální derivace všech proměnných (viz odstavec 5.1) podle příslušných nezávislých proměnných, tedy

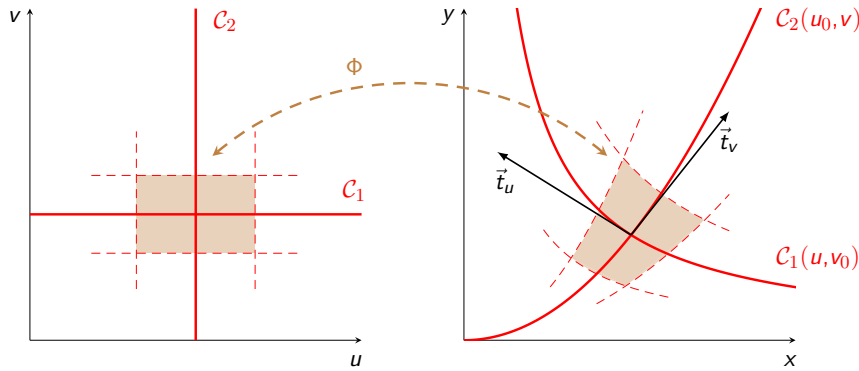
$$\vec{t}_x = \left[\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right] = \left(1, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad \vec{t}_y = \left[\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right] = \left(0, 1, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right). \quad (7.11)$$

Vektor $\vec{\nu}$ normály plochy S (tj. vektor kolmý k ploše S) určíme jako vektorový součin tečných vektorů $\vec{t}_x \times \vec{t}_y$ (jejichž pořadí ve vektorovém součinu závisí na požadované orientaci normály), jehož velikost (viz rovnice (2.1)) bude $\|\vec{\nu}\| = \|\vec{t}_x \times \vec{t}_y\|$, tedy

$$\vec{\nu} = \vec{t}_x \times \vec{t}_y = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, 1 \right), \quad \|\vec{\nu}\| = \|\vec{t}_x \times \vec{t}_y\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2}. \quad (7.12)$$

Samotný plošný element je vektorem, orientovaným ve směru normálového vektoru $\vec{\nu}$, kde velikost plošného elementu je určena maximální možnou velikostí normálového vektoru $\|\vec{\nu}\|_{\max}$, to znamená takového, který je zkonstruován jako vektorový součin dvou vzájemně kolmých tečných vektorů (v ortogonálních souřadnicových systémech toto splňují parciální derivace podle dvou vybraných souřadnicových směrů). Ve zvolené kartézské parametrizaci tedy můžeme psát

$$d\vec{S} = \vec{\nu} dx dy = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, 1 \right) dx dy, \quad dS = \|\vec{\nu}\| dx dy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2} dx dy. \quad (7.13)$$



Obrázek 7.2: Schéma transformace obecných souřadnic v \mathbb{R}^2 , popsané rovnicí (7.7), kde Φ symbolizuje vzájemně jednoznačné zobrazení. C_1, C_2 jsou souřadnicové křivky, pro které platí $C_1: x = x(u, v_0), y = y(u, v_0)$, $C_2: x = x(u_0, v), y = y(u_0, v)$, čárkované čáry, ohraničující zvýrazněnou plochu, můžeme označit jako: $C_1^+(u, v_0 + \Delta v), C_1^-(u, v_0 - \Delta v), C_2^+(u_0 + \Delta u, v), C_2^-(u_0 - \Delta u, v)$. Tečné vektory k souřadnicovým křivkám C_1, C_2 v bodě $[u_0, v_0]$ můžeme stanovit jako $\vec{t}_u|_{u_0, v_0} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right)_{u_0, v_0}$, $\vec{t}_v|_{u_0, v_0} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right)_{u_0, v_0}$.

Zjevně tedy platí $d\vec{S} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} dS = \vec{n} dS$, kde \vec{n} je jednotkový normálový vektor. Explicitní zápis plošného integrálu 1. druhu v orthonormální kartézské bázi na oblasti $\mathcal{S} = (a, b) \times [\phi_1(x), \phi_2(x)]$ a $z = \varphi(x, y)$, tedy bude (srovnej rovnice (7.1), (7.3)) :

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, \varphi) dS = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y, \varphi) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2} dx dy. \quad (7.14)$$

Nalezneme-li vhodné parametry u, v (např. θ, ϕ na kulové ploše), můžeme funkci f i plochu S parametrizovat pomocí transformačních rovnic $x = \xi(u, v), y = \eta(u, v), z = \zeta(u, v)$ (viz rovnice (7.9)). Tečné vektory \vec{t}_u, \vec{t}_v k dané ploše S v souřadnicových směrech u, v (viz obrázek 5.1) stanovíme jako parciální derivace funkce dané plochy (viz odstavec 5.1) podle příslušných směrů, tedy

$$\vec{t}_u = \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right), \quad \vec{t}_v = \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial v}, \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right). \quad (7.15)$$

Normálový vektor \vec{v}' (který nebude totožný s vektorem \vec{v} z rovnice (7.12), bude mít sice stejný směr ale různou délku) určíme opět jako vektorový součin tečných vektorů $\vec{v}' = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$, jeho velikost $\|\vec{v}'\| = \|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\|$. Analogicky k rovnici (7.13) dostáváme:

$$d\vec{S} = \vec{v}' du dv, \quad dS = \|\vec{v}'\| du dv = \|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\| du dv. \quad (7.16)$$

Plošný integrál 1. druhu v parametrickém vyjádření bude mít explicitní tvar

$$\int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} f(\xi, \eta, \zeta) \left\| \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right) \times \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial v}, \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right) \right\| du dv. \quad (7.17)$$

Vzájemná souvislost mezi rovnicemi (7.13) a (7.16) je dána rovnicí (7.7), z níž vyplývá: $\vec{v} dx dy = \vec{v}' J(u, v) du dv$ a zároveň $\|\vec{v}\| dx dy = \|\vec{v}'\| J(u, v) du dv$, kde $J(u, v)$ je Jakobián souřadnicové transformace, daný rovnicí (7.8).

Například pro kulovou plochu o poloměru R se středem v počátku souřadnic, s kartézskou rovnicí $z(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, s vnější normálou, bude mít rovnice (7.13) podobu

$$d\vec{S} = \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right) dx dy, \quad dS = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad (7.18)$$

jejím zintegrováním v mezích $x \in \langle -R, R \rangle$, $y \in \langle -\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2} \rangle$ dostáváme $S = 2\pi R^2$, což je obsah části kulové plochy nad rovinou $z = 0$. Parametrizovaná rovnice (7.16) bude mít podobu

$$d\vec{S} = (R^2 \sin^2 \theta \cos \phi, R^2 \sin^2 \theta \sin \phi, R^2 \sin \theta \cos \theta) d\theta d\phi, \quad dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad (7.19)$$

její integrací podle proměnných $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ a $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ dostáváme $S = 4\pi R^2$. Vzhledem k tomu, že Jakobián, odpovídající rovnici (7.8) bude v tomto případě $R^2 \sin \theta \cos \theta$, snadno se z rovnic (7.18), (7.19) přesvědčíme o platnosti vztahu $\|\vec{v}\| dx dy = \|\vec{v}'\| J(\theta, \phi) d\theta d\phi$.

Pomocí plošného integrálu 1. druhu lze určit některé geometrické a fyzikální charakteristiky dané plochy: Položíme-li $f = 1$, výsledkem bude celková velikost plochy S . Položíme-li $f = \sigma$ (plošná hustota), dostáváme $\sigma dS = dm$, tedy hmotnost elementu plochy S , výsledkem integrace bude celková hmotnost m dané plochy,

$$m = \iint_S dm = \iint_S \sigma dS. \quad (7.20)$$

Pokud položíme například $f = z\sigma$, dostáváme tzv. statický moment S_z dané plochy vzhledem k ose z , jeho vydělením hmotností dostáváme z -ovou souřadnici středu hmotnosti z_T plochy (obdobně pro ostatní souřadnicové směry), tedy

$$x_T = \frac{1}{m} \iint_S x dm = \frac{1}{m} \iint_S x \sigma dS, \quad y_T = \frac{1}{m} \iint_S y dm, \quad z_T = \frac{1}{m} \iint_S z dm. \quad (7.21)$$

Položíme-li $f = r^2\sigma$, kde r je vzdálenost obecného bodu plochy od zvolené přímky v prostoru (osy o), dostáváme moment setrvačnosti J_o dané plochy vzhledem k této ose. Momenty setrvačnosti plochy S např. vzhledem k jednotlivým kartézským souřadnicovým osám potom budou

$$J_x = \iint_S (y^2 + z^2) dm = \iint_S (y^2 + z^2) \sigma dS, \quad J_y = \iint_S (z^2 + x^2) dm, \quad J_z = \iint_S (x^2 + y^2) dm. \quad (7.22)$$

• Příklady:

V kartézských souřadnicích i pomocí vhodné parametrizace vypočítejte obsah plochy $S \in \mathbb{R}^2$, ohraničené následujícími křivkami:

$$7.1 \quad y = x^2, y = ex^2, y = \frac{1}{x}, y = \frac{4}{x} \quad 1$$

$$7.2 \quad y = x^2, y = 16x^2, y = \frac{2\sqrt[3]{2}}{x^2}, y = \frac{16}{x^2} \quad 8$$

$$7.3 \quad y = x^3, y = \frac{x^3}{3}, y = \frac{1}{x}, y = \frac{e}{x} \quad \frac{(e-1)\ln 3}{4}$$

7.4 $y = 1, y = e, y = e^{0,2x}, y = e^{0,4x}$

2,5

7.5 Vypočítejte plošný integrál 1. druhu $\iint_S xyz \, dS$, kde S je kartézská souřadnicová plocha S_z (viz kapitola 4), $z = 3, x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 2, 3 \rangle$. $\frac{15}{4}$ 7.6 Vypočítejte plošný integrál 1. druhu $\iint_S dS$, kde S je válcová souřadnicová plocha S_ρ , $\rho = 2, z \in \langle 0, 5 \rangle$.20 π 7.7 Vypočítejte plošný integrál 1. druhu $\iint_S (x - y) \, dS$, kde S je kulová souřadnicová plocha S_ϕ , $\phi = \frac{\pi}{4}, r \leq 2$.

0

V kartézských souřadnicích i pomocí vhodné parametrizace vypočítejte plošné integrály 1. druhu:

7.8 $\iint_S x^2 z \, dS$, kde $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$.

 $\frac{\pi R^5}{4}$

7.9 $\iint_S \sqrt{2} x^2 z \, dS$, kde $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \in \langle 0, H \rangle\}$.

 $\frac{2\pi R^5}{5}, R = H$

7.10 $\iint_S (x^2 + y^2) \, dS$, kde $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$.

 $\frac{4}{3}\pi R^4$

7.11 $\iint_S x^2 y^2 \, dS$, kde $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$.

 $\frac{2}{15}\pi R^6$

7.12 $\iint_S x^2 z^2 \, dS$, kde $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$.

 $\frac{2}{15}\pi R^6$

7.13 $\iint_S y^2 \, dS$, kde $S = \left\{z = H - \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}, z \in \langle 0, H \rangle\right\}$.

 $\frac{\pi R^3}{4}\sqrt{R^2 + H^2}$

7.14 $\iint_S z \, dS$, kde $S = \{x + y + z = 1, x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 - x \rangle\}$.

 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

7.15 $\iint_S \frac{1}{x^2 + y^2 + z} \, dS$, kde $S = \{x^2 + y^2 + z = H, z \geq 0\}$.

 $\frac{\pi}{6H} \left[(1 + 4H)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$ Pomocí vhodné parametrizace, případně v kartézských souřadnicích, vypočítejte obsah plochy $S \in \mathbb{R}^3$:

7.16 $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 \leq a^2, z \geq 0, a \leq R\}$ (kulový vrchlík) $2\pi R \left[R - \sqrt{R^2 - a^2} \right]$

7.17 $S = \{x^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$

$$(a) |x| \leq |y| \leq a \quad 2a^2(\pi - 2)$$

$$(b) |x| > |y| \quad 4a^2$$

$$7.18 \ S = \{x^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \leq a^2, z \geq 0\} \quad 4a^2$$

7.19 Prostorová křivka, daná průnikem kulové plochy $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ a válcové plochy $S' = \{(x - a)^2 + y^2 = a^2\}$, kde $a = R/2$, vymezuje na povrchu kulové plochy uzavřenou plochu (tzv. Vivianiho okno). Vypočítejte obsah této plochy.

$$2R^2(\pi - 2)$$

7.20 Vypočítejte obsah části zemského povrchu, ohraničeného v jednom směru dvěma sousedními poledníky (například 15. a 16.) a ve druhém směru dvěma sousedními rovnoběžkami:

(a) 0. (rovníkem) a 1.,

(b) 49. a 50.,

(c) 89. a 90. (pólem).

Obsahy jednotlivých ploch udejte v km^2 . Poloměr Země, $R = 6371 \text{ km}$, považujte za konstantu.

$$(a) \text{ cca } 12\,364 \text{ km}^2$$

$$(b) \text{ cca } 8\,030 \text{ km}^2$$

$$(c) \text{ cca } 108 \text{ km}^2$$

7.21 Vypočítejte hmotnost kulového vrchlíku $S = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}, z \geq 0\right\}$ s plošnou hustotou $\sigma(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$.

$$R^3 \left(\frac{11}{12}\pi + \sqrt{3} \right)$$

7.22 Vypočítejte polohu středu hmotnosti plochy $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$, jejíž plošná hustota σ je dána funkcí $\sigma = x^2 + z^2$.

$$x_T = 0, y_T = 0, z_T = \frac{9R}{16}$$

7.23 Vypočítejte polohu středu hmotnosti plochy $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \in \langle 0, H \rangle\}$, jejíž plošná hustota σ je dána funkcí $\sigma = x^2 + z^2$.

$$x_T = 0, y_T = 0, z_T = \frac{4H}{5}$$

7.24 Spirálová plocha s konstantní plošnou hustotou σ je zadána parametricky ve tvaru $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v, u \in \langle 0, a \rangle, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Vypočítejte:

(a) hmotnost této plochy,

(b) polohu jejího těžiště,

(c) moment setrvačnosti vzhledem k její geometrické ose.

- (a) $\pi\sigma \left[a\sqrt{1+a^2} + \ln \left(a + \sqrt{1+a^2} \right) \right]$
 (b) $(0, 0, \pi)$
 (c) $\frac{\pi\sigma}{4} \left[(2a^3 + a)\sqrt{1+a^2} - \ln \left(a + \sqrt{1+a^2} \right) \right]$

7.25 Vypočítejte následující parametry plochy z příkladu 7.13, pokud její plošná hustota bude $\sigma = x^2z$:

- (a) hmotnost této plochy,
 (b) polohu jejího těžiště,
 (c) moment setrvačnosti vzhledem k její geometrické ose.

- (a) $\frac{\pi}{20}HR^3\sqrt{R^2+H^2}$
 (b) $z_T = \frac{H}{3}$
 (c) $\frac{\pi}{42}HR^5\sqrt{R^2+H^2}$

7.26 Vypočítejte následující parametry plochy z příkladu 7.14, pokud její plošná hustota bude $\sigma = x^2 + y^2$:

- (a) hmotnost této plochy,
 (b) polohu jejího těžiště.

- (a) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$
 (b) $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right)$

7.27 Vypočítejte hmotnost plochy z příkladu 7.15, pokud její plošná hustota bude $\sigma = x^2$:

$$\frac{\pi}{16} \left[(4R^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{5}R^2 - \frac{2}{15} \right) + \frac{2}{15} \right]$$

7.28 Vypočítejte celkovou tlakovou sílu, kterou působí kapalina o konstantní hustotě ρ na všechny stěny uzavřené nádoby, tvořené plochou z příkladu 7.13 a odpovídající podstavou (atmosférický tlak zanedbejte).

$$\pi\rho gH \left(\frac{2}{3}R\sqrt{R^2+H^2} + R^2 \right)$$

7.29 Vypočítejte celkovou tlakovou sílu, kterou působí kapalina o konstantní hustotě ρ na všechny stěny uzavřené nádoby, tvořené plochou z příkladu 7.15 a odpovídající podstavou (atmosférický tlak zanedbejte).

$$\frac{\pi}{8}\rho g \left[(4R^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{5}R^2 - \frac{2}{15} \right) + \frac{2}{15} \right] + \pi\rho gR^4$$

7.30 Plášť vodojemu ve tvaru kužele, stojícího „špičkou“ dolů, o poloměru horní vodorovné plochy $R = 3$ m a výšce $H = 4$ m je dimenzován tak, aby odolal celkové tlakové síle 10^6 N. Je dimenzován dostatečně, nedostatečně, nebo je přibližně na hranici konstrukční odolnosti? Uvažujte hodnoty konstant $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$. Vliv atmosférického tlaku zanedbejte.

$F_p \approx 6,3 \times 10^5 \text{ N}$. Plášť vodojemu je dimenzován dostatečně.

7.31 Nádoba ve tvaru kužele stojícího „špičkou“ dolů je naplněna speciální kapalinou, v níž tlak roste s hloubkou jako $p = \rho_0 g h^2$, kde ρ_0 je hustota kapaliny na hladině a h je hloubka daného místa v nádobě. Poloměr horní vodorovné plochy nádoby $R = 0,5$ m a výška nádoby $H = 1$ m. Určete tlakovou sílu, které musí nádoba odolat. Uvažujte hodnoty konstant $\rho_0 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$. Vliv atmosférického tlaku zanedbejte.

$F_p \approx 3000 \text{ N}$.

7.32 Plášť kulového vodojemu o poloměru $R = 2$ m je dimenzován tak, aby odolal celkové tlakové síle 10^6 N. Je dimenzován dostatečně, nedostatečně, nebo je zhruba na hranici konstrukční odolnosti? Uvažujte hodnoty konstant $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$. Vliv atmosférického tlaku zanedbejte.

$F_p \approx 10^6 \text{ N}$. Plášť vodojemu je dimenzován zhruba na hranici konstrukční odolnosti.

7.33 Mísa ve tvaru polokoule o poloměru $R = 1$ m je naplněna speciální kapalinou, v níž tlak roste s hloubkou jako $p = \rho_0 g h^{\frac{3}{2}}$, kde ρ_0 je hustota kapaliny na hladině a h je hloubka daného místa v nádobě. Určete tlakovou sílu, které musí nádoba odolat. Uvažujte hodnoty konstant $\rho_0 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$. Vliv atmosférického tlaku zanedbejte.

$F_p \approx 25\,000 \text{ N}$.

7.2 Plošný integrál 2. druhu

Plošným integrálem 2. druhu nazýváme integrál $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ obecného vektorového pole $\vec{F}(x, y, z)$, definovaného na po částech hladké ploše S , jejíž orientace je určena jednotkovým normálovým vektorem $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Explicitní zápis plošného integrálu 2. druhu na po částech hladké ploše, tvořené souřadnicovými plochami kartézské soustavy, bude mít tvar

$$\int_y \int_z F_x dy dz \Big|_{x=\text{konst.}} + \int_z \int_x F_y dz dx \Big|_{y=\text{konst.}} + \int_x \int_y F_z dx dy \Big|_{z=\text{konst.}}, \quad (7.23)$$

kde F_x, F_y, F_z jsou jednotlivé složky vektoru \vec{F} . Analogicky k rovnici (7.17) bude parametrizovaný plošný integrál 2. druhu, kde $x = \xi(u, v)$, $y = \eta(u, v)$, $z = \zeta(u, v)$, mít tvar

$$\int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \left[F_x(\xi, \eta, \zeta) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{pmatrix} + F_y(\xi, \eta, \zeta) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial v} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \end{pmatrix} + F_z(\xi, \eta, \zeta) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} \right] du dv. \quad (7.24)$$

Pořadí parametrů u a v ve vektorových součinech je dáno požadovanou orientací normály plochy. Typickou fyzikální aplikací plošného integrálu 2. druhu je výpočet toku Φ vektorového pole \vec{F} danou plochou \vec{S} .

• **Příklady:**

7.34 Určete tok vektorového pole $\vec{F} = (1, 1, 1)$ kartézskou souřadnicovou plochou S_z (viz kapitola 4), kde $z = 3$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $y \in \langle 2, 3 \rangle$, ve směru kladné normály této plochy.

$$\Phi_F = 1$$

7.35 Určete tok vektorového pole $\vec{F} = (x, xy, xz)$ kartézskou souřadnicovou plochou S_x , kde $x = 5$, $y \in \langle 0, 5 \rangle$, $z \in \langle 0, 5 \rangle$, ve směru záporné normály této plochy.

$$\Phi_F = 125$$

7.36 Určete tok vektorového pole $\vec{F} = (x, 2, 3)$ válcovou souřadnicovou plochou S_ρ , kde $\rho = 2$, $z \in \langle 0, 5 \rangle$, ve směru vnější normály této plochy.

$$\Phi_F = 20\pi$$

7.37 Pomocí plošného integrálu 2. druhu určete tok vektorového pole $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ uzavřenou plochou $S = \{(x, y, z) \mid x \in \langle A, 2A \rangle, y \in \langle B, 2B \rangle, z \in \langle C, 2C \rangle\}$.

$$\Phi_F = 3ABC(A + B + C)$$

7.38 Pomocí plošného integrálu 2. druhu určete tok vektorového pole $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ uzavřenou plochou $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = R^2, z \in \langle 0, H \rangle\}$.

$$\Phi_F = \pi R^2 H^2$$

7.39 Pomocí plošného integrálu 2. druhu určete tok vektorového pole $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ plochou, danou předpisem $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

$$\Phi_F = \frac{12}{5}\pi R^5$$

7.40 Je dáno silové pole $\vec{F} = (x^3 - x^2, y^3 - y^2, z^3 - z^2)$. Pomocí plošného integrálu 2. druhu vypočítejte jeho tok povrchem tělesa $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \langle 0, R \rangle, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

$$\Phi_F = \frac{3\pi R^4}{40}(4R - 5)$$

7.41 Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (z^2, x^2, y^2)$ kruhovou plochou o poloměru R se středem v bodě $x, y, z = [A, B, C]$, ležící v rovině $z = C$, ve směru její kladné normály.

$$\frac{\pi R^4}{4} + \pi B^2 R^2$$

7.42 Pomocí plošného integrálu 2. druhu určete tok vektorového pole $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ uzavřenou plochou, tvořenou povrchem tělesa z příkladu 7.15.

$$\Phi_F = \frac{\pi R^2 H^2}{3}$$

- 7.43 Pomocí plošného integrálu 2. druhu určete tok vektorového pole $\vec{F} = (x^3 - y^3, x^3 + y^3, z)$ povrchem tělesa $\mathcal{V} = \left\{ (x, y, z) \mid z \in \langle 0, H \rangle, x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{H^2} (H - z)^2 \right\}$.

$$\Phi_F = \frac{\pi R^2 H}{30} (9R^2 + 10)$$

- 7.44 Pomocí plošného integrálu 2. druhu vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (x, y, z)$ povrchem tělesa z příkladu 8.42. Proč je výsledná hodnota trojnásobkem výsledné hodnoty z uvedeného příkladu ?

$$\Phi_F = \frac{3\pi^2 a^3}{4}$$

- 7.45 Pomocí plošného integrálu 2. druhu vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ uzavřenou plochou, tvořenou povrchem tělesa z příkladu 8.42.

$$\Phi_F = \frac{27}{64} \pi^2 a^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \pi^2 a^5$$

- 7.46 Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (y, z, x)$ rovinnou plochou ve tvaru obdélníka s vrcholy v bodech $[1, 0, 0]$, $[3, 0, 1]$, $[3, 2, 1]$, $[1, 2, 0]$, ve směru normály $\vec{\nu}$ této plochy jejíž složka ν_x je kladně orientovaná.

$$-6$$

- 7.47 Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (3, z, y)$ rovinnou plochou ve tvaru obdélníka s vrcholy v bodech $[0, 0, 1]$, $[0, 1, 3]$, $[2, 1, 3]$, $[2, 0, 1]$, ve směru normály $\vec{\nu}$ této plochy jejíž složka ν_y je kladně orientovaná.

$$7$$

- 7.48 Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (3, z, y)$, rovinnou plochou ve tvaru obdélníka s vrcholy v bodech $[0, 0, 1]$, $[0, 2, 2]$, $[5, 2, 2]$, $[5, 0, 1]$, ve směru normály $\vec{\nu}$ této plochy jejíž složka ν_y je kladně orientovaná.

$$-\frac{5}{2}$$

- 7.49 Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (y, z, x)$ rovinnou plochou ve tvaru lichoběžníka s vrcholy v bodech $[1, 1, 1]$, $[1, 3, 3]$, $[2, 4, 5]$, $[2, 1, 2]$, ve směru normály $\vec{\nu}$ této plochy jejíž složka ν_y je kladně orientovaná.

$$\frac{53}{6}$$

- 7.50 Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (x, z, y)$ rovinnou plochou ve tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech $[3, 0, 2]$, $[1, 2, 0]$, $[0, 0, 7]$, ve směru normály $\vec{\nu}$ této plochy jejíž složka ν_y je kladně orientovaná.

$$\frac{98}{3}$$

7.3 Objemový integrál

Objemovým integrálem označujeme trojný integrál skalární funkce $f(x, y, z)$ přes oblast (těleso) $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^3$ s objemem V :

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz. \quad (7.25)$$

Pomocí objemového integrálu lze určit některé geometrické a fyzikální charakteristiky těles: Položíme-li $f = 1$, výsledkem bude velikost objemu V tělesa \mathcal{T} . Položíme-li $f = \rho$ (objemová hustota hmoty), dostáváme $\rho dV = dm$, tedy hmotnost elementu tělesa \mathcal{T} , výsledkem integrace bude celková hmotnost M tělesa,

$$M = \iiint_{\mathcal{T}} dm = \iiint_V \rho dV. \quad (7.26)$$

Pokud položíme například $f = z\rho$, dostáváme tzv. statický moment S_z tělesa vzhledem k ose z , jeho vydělením hmotností dostáváme z -ovou souřadnici středu hmotnosti z_T tělesa (obdobně pro ostatní souřadnicové směry), tedy

$$x_T = \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{T}} x dm = \frac{1}{M} \iiint_V x \rho dV, \quad y_T = \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{T}} y dm, \quad z_T = \frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{T}} z dm. \quad (7.27)$$

Položíme-li $f = r^2\rho$, kde r je vzdálenost obecného bodu tělesa od zvolené přímky v prostoru (osy o), dostáváme moment setrvačnosti J_o tělesa \mathcal{T} vzhledem k této ose. Momenty setrvačnosti tělesa \mathcal{T} např. vzhledem k jednotlivým kartézským souřadnicovým osám potom budou

$$J_x = \iiint_{\mathcal{T}} (y^2 + z^2) dm = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho dV, \quad J_y = \iiint_{\mathcal{T}} (z^2 + x^2) dm, \quad J_z = \iiint_{\mathcal{T}} (x^2 + y^2) dm. \quad (7.28)$$

Příklady k problematice objemového integrálu jsou součástí následujícího odstavce 7.4.

7.4 Geometrické a fyzikální charakteristiky útvarů

- **Vypočítejte objem:**

7.51 elipsoidu o poloosách a, b, c ,

$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$

7.52 kužele o poloměru podstavy R a výšce H ,

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

7.53 tělesa $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \mid z \in \langle 0, H - x^2 - y^2 \rangle\}$, kde $H = R^2$,

$$V = \frac{\pi R^2 H}{2}$$

7.54 tělesa $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \mid z \in \langle 0, H - x^2 - y^2 \rangle\}$, $x^2 + y^2 \leq R^2$, $H > R^2$, $V = \pi R^2 \left(H - \frac{R^2}{2} \right)$

7.55 anuloidu (toroidu) o poloměru osy toru R a poloměru trubice a ,¹ $V = 2\pi^2 Ra^2$

¹ Podrobný popis anuloidu - viz odstavec B.6 v příloze B.

$$7.56 \text{ tělesa } \mathcal{A} = \left\{ (x, y, z) \mid z \in \left\langle \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\rangle \right\}, \quad V = \frac{\pi R^3}{3}$$

$$7.57 \text{ tělesa } \mathcal{A} = \left\{ (x, y, z) \mid z \in \left\langle \frac{R}{2}, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\rangle \right\}, \quad V = \frac{5}{24} \pi R^3$$

7.58 tělesa \mathcal{A} , jehož povrch vznikne rotací asteroidy z příkladu 6.7 okolo osy y ,

$$V = \frac{32}{105} \pi a^3$$

7.59 tělesa \mathcal{A} , jehož povrch vznikne rotací kardioidy z příkladu 6.16 okolo osy y .

$$V = \frac{8}{3} \pi a^3$$

• **Vypočítejte velikost plochy:**

7.60 kulové slupky o poloměru R ,

$$S = 4\pi R^2$$

7.61 pláště kužele o poloměru podstavy R a výšce H ,

$$S = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$$

7.62 pláště tělesa z příkladu 7.53,

$$S = \frac{\pi}{6} \left[(1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$$

7.63 celého povrchu tělesa z příkladu 7.54,

$$S = \frac{\pi}{6} \left[(1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] + 2\pi R(H - R^2) + \pi R^2$$

7.64 pláště tělesa z příkladu 7.56,

$$S = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \pi R^2$$

7.65 celého povrchu tělesa z příkladu 7.57,

$$S = \frac{7}{4} \pi R^2$$

7.66 pláště anuloidu (toroidu) o poloměru osy toru R a poloměru trubice a ,¹

$$S = 4\pi^2 Ra$$

7.67 ohraničené asteroidou z příkladu 6.7,

$$S = \frac{3}{8} \pi a^2$$

7.68 která vznikne rotací asteroidy z příkladu 6.7 okolo osy y ,

$$S = \frac{12}{5} \pi a^2$$

7.69 ohraničené kardioidou z příkladu 6.16,

$$S = \frac{3}{2} \pi a^2$$

7.70 která vznikne rotací kardioidy z příkladu 6.16 okolo osy y ,

$$S = \frac{32}{5} \pi a^2$$

7.71 hyperbolického paraboloidu, daného předpisem $z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 4$,

$$S = \frac{\pi}{6} \left(17^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \approx 36,18$$

7.72 hyperbolického paraboloidu, daného předpisem $z = xy$, $x^2 + y^2 \leq 4$. Jaký by musel být poloměr ρ válce, jehož pláštěm je hyperbolický paraboloid ohraničen, aby jeho plocha byla stejná jako v příkladu 7.71?

$$S = \frac{2\pi}{3} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \approx 21,32, \quad \rho = \left[\left(\frac{17^{\frac{3}{2}} + 3}{4} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \approx 2,44$$

• Ve vhodně zvolené soustavě souřadnic vypočítejte polohu středu hmotnosti:

7.73 homogenní polokoule o poloměru R , $z_T = \frac{3}{8}R$

7.74 homogenního kužele o poloměru podstavy R a výšce H , $z_T = \frac{H}{4}$

7.75 homogenního symetrického jehlanu o hraně podstavy A a výšce H ,

$$z_T = \frac{H}{4}$$

7.76 homogenního tělesa z příkladu 7.53, $z_T = \frac{H}{3}$

7.77 homogenního tělesa z příkladu 7.54, $z_T = \frac{3H^2 - 3HR^2 + R^4}{3(2H - R^2)}$

7.78 homogenního tělesa z příkladu 7.56, $z_T = \frac{9}{16}R$

7.79 homogenní plochy z příkladu 7.70 a homogenního tělesa z příkladu 7.59,

$$y_T = -\frac{25}{32}a, \quad y_T = -\frac{4}{5}a$$

7.80 homogenního tělesa, ohraničeného „seshora“ plochou $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ a „zespoda“ plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$z_T = \frac{3R}{8(2 - \sqrt{2})} \approx 0,64R$$

7.81 tělesa z příkladu 7.57, $z_T = \frac{27}{40}R$

7.82 poloviny homogenního elipsoidu o poloosách a , b , c , s rovinou podstavy, vymezenou poloosami a , b .

$$z_T = \frac{3}{8}c$$

• Vypočítejte moment setrvačnosti vzhledem k ose symetrie:

7.83 homogenní koule o hmotnosti M a poloměru R , $J = \frac{2}{5}MR^2$

7.84 homogenního válce o hmotnosti M a poloměru R , $J = \frac{MR^2}{2}$

7.85 homogenního kužele o hmotnosti M , poloměru podstavy R a výšce H ,
 $J = \frac{3}{10}MR^2$

7.86 homogenního tělesa z příkladu 7.53, $J = \frac{MR^2}{3}$

7.87 homogenního tělesa z příkladu 7.54, $J = \frac{3H - 2R^2}{6H - 3R^2}MR^2$

7.88 homogenního tělesa z příkladu 7.56, $J = \frac{MR^2}{4}$

7.89 tělesa z příkladu 7.57, $J = \frac{53}{200}MR^2$

7.90 homogenního elipsoidu o hmotnosti M a poloosách a , b , c , rotujícího okolo poloosy c ,
 $J = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)$

7.91 homogenního tělesa, jehož povrch vznikne rotací asteroidy z příkladu 6.7 okolo osy y ,
 $J = \frac{64}{143}Ma^2$

7.92 homogenního tělesa, jehož povrch vznikne rotací kardioidy z příkladu 6.16 okolo osy y ,
 $J = \frac{24}{35}Ma^2$

7.93 homogenního tělesa, ohraničeného shora plochou $z = H - 2(x^2 + y^2)$ a zespoda plochou $z = 0$. Výsledek vyjádřete jako funkci hmotnosti daného tělesa a délky $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{H/2}$ v rovině $z = 0$,
 $J = \frac{MR^2}{3}$

7.94 prázdné uzavřené válcové nádoby, tj. sestávající z pláště a obou podstav, vytvořené z materiálu zanedbatelné tloušťky s konstantní plošnou hustotou σ , s poloměrem R a výškou $H = R$. Výsledek vyjádřete v jednotkách celkové hmotnosti nádoby M a poloměru R ,
 $J = \frac{3}{4}MR^2$

7.95 prázdné uzavřené kuželové nádoby, tj. sestávající z pláště a podstavy, vytvořené z materiálu zanedbatelné tloušťky s konstantní plošnou hustotou σ , s poloměrem R a výškou H . Výsledek vyjádřete v jednotkách celkové hmotnosti nádoby M a poloměru R ,

$$J = \frac{MR^2}{2}$$

7.96 prázdné uzavřené nádoby, tvořené celým pláštěm tělesa (tj. sestávající z vlastního pláště i podstavy) z příkladu 7.53, vytvořené z materiálu zanedbatelné tloušťky s konstantní plošnou hustotou σ . Výsledek vyjádřete v jednotkách celkové hmotnosti nádoby M a poloměru podstavy R ,

$$J = M \frac{(1 + 4R^2)^{3/2} \left(\frac{3}{5}R^2 - \frac{1}{10} \right) + \frac{1}{10} + 3R^4}{(1 + 4R^2)^{3/2} - 1 + 6R^2}$$

7.97 prázdné uzavřené nádoby, tvořené celým pláštěm tělesa (tj. sestávající z vlastního pláště i podstavy) z příkladu 7.56, vytvořené z materiálu zanedbatelné tloušťky s konstantní plošnou hustotou σ . Výsledek vyjádřete v jednotkách celkové hmotnosti nádoby M a poloměru podstavy R .

$$J = \frac{(9\sqrt{3} + 20) MR^2}{(\sqrt{3} + 2) 24}$$

7.98 Odvoďte moment setrvačnosti homogenní polokruhové desky zanedbatelné tloušťky s poloměrem R , rotující

- (a) okolo osy, procházející jejím středem, kolmé k rovině desky,
- (b) okolo osy, ležící v rovině desky, procházející její základnou (průměrem),
- (c) okolo osy, ležící v rovině desky, procházející jejím středem hmotnosti rovnoběžně s její základnou.

Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti desky M a poloměru R .

$$(a) \quad J = \frac{MR^2}{2}$$

$$(b) \quad J = \frac{MR^2}{4}$$

$$(c) \quad \text{pomocí Steinerovy věty: } z_T = \frac{4}{3\pi}R, \quad J = \frac{MR^2}{4} - \left(\frac{4}{3\pi} \right)^2 MR^2 \approx \frac{7}{100}MR^2$$

7.99 Odvoďte moment setrvačnosti homogenní desky zanedbatelné tloušťky, jejíž okraj má tvar asteroidy z příkladu 6.7, rotující okolo osy procházející jejím středem kolmo k její rovině. Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti desky M a délky poloosy a .

$$J = \frac{7}{32}Ma^2$$

7.100 Odvoďte moment setrvačnosti J_k duté koule o poloměru R s kulovou koncentrickou dutinou o poloměru H , s konstantní hustotou ρ . Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti M duté koule, jejího poloměru R a poloměru dutiny H . Pomocí limitního přechodu (případně jiným způsobem) následně odvoďte moment setrvačnosti J_s homogenní kulové slupky s poloměrem R .

$$J_k = \frac{2}{5}M \frac{R^5 - H^5}{R^3 - H^3}, \quad J_s = \frac{2}{3}MR^2$$

7.101 Odvoďte moment setrvačnosti homogenní krychle o hraně A , rotující

- (a) okolo osy, procházející jejím středem a středy dvou protilehlých stran,
- (b) okolo osy, procházející jejím středem a středy dvou protilehlých hran,
- (c) okolo osy, procházející hranou krychle (vypočítejte přímou integrací a ověřte pomocí Steinerovy věty).

Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti M krychle a délky její hrany A .

$$(a) \quad J = \frac{MA^2}{6}$$

$$(b) \quad J = \frac{MA^2}{6}$$

$$(c) \quad J = \frac{2}{3}MA^2$$

Kapitola 8

Integrální věty^{1 2}

8.1 Greenova věta

Věta, nazvaná podle matematika a fyzika George Greena (1793 - 1841), dává do souvislosti integrál přes oblast $D \in \mathbb{R}^2$ a integrál po uzavřené křivce \mathcal{C} , ohraničující oblast D . Pro vektorové pole $\vec{F} = [F_1(x, y), F_2(x, y)]$, spojitě diferencovatelné v $D(x, y)$, platí následující formulace Greenovy věty:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial \vec{D}} (F_1 dx + F_2 dy), \quad (8.1)$$

kde $\partial \vec{D}$ značí matematicky kladně orientovanou uzavřenou hranici oblasti D (křivku \mathcal{C}). Stoke-sova věta (viz odstavec 8.2) je zobecněním Greenovy věty pro \mathbb{R}^3 .

• Příklady:

8.1 Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál $\oint_{\mathcal{C}} e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy]$, kde \mathcal{C} je kladně orientovaná uzavřená křivka ohraničující oblast $D: 0 < x < \pi, 0 < y < \sin x$.

$$\frac{1}{5} (1 - e^\pi)$$

8.2 Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál $\oint_{\mathcal{C}} y^2 dx + x^2 dy$, kde \mathcal{C} je kladně orientovaná uzavřená křivka ohraničující oblast $D: 0 < x < 3, 0 < y < 2 - \frac{2}{3}x$.

2

8.3 Pomocí Greenovy věty vypočítejte obsah kruhu o poloměru R .

$$\text{Pomocí identity } S = \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dS = \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \right\} = \oint_{\partial \vec{S}} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad S = \pi R^2$$

8.4 Pomocí plošného integrálu i pomocí Greenovy věty vypočítejte obsah elipsy s poloosami a, b .

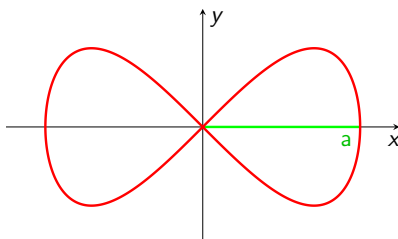
¹Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nejsou uváděny příslušné jednotky.

²Doporučená literatura k této kapitole: Děmidovič (2003), Kvasnica (2004), Arfken & Weber (2005), Bartsch (2008), Rektorys (2009).

Stejným způsobem jako v předešlém příkladě, $S = \pi ab$

- 8.5 Pomocí plošného integrálu i pomocí Greenovy věty vypočítejte obsah trojúhelníka s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[2, 1]$, $[1, 2]$.

$$S = \frac{3}{2}$$



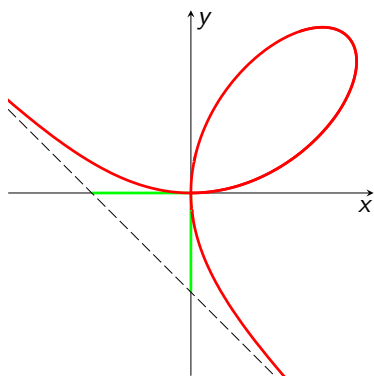
Obrázek 8.1: Geronova (Huygensova) lemniskáta, geometrický význam konstanty a je vyznačen zelenou barvou.

- 8.6 Pomocí plošného integrálu i pomocí Greenovy věty vypočítejte obsah plochy, uzavřené křivkou, danou obecnou rovnicí $x^4 - a^2(x^2 - y^2) = 0$, kde a je konstanta, tzv. Geronovy (Huygensovy) lemniskáty (viz obrázek 8.1, viz také příklad 8.42).

$$S = \frac{4a^2}{3}$$

- 8.7 Pomocí plošného integrálu i pomocí Greenovy věty vypočítejte obsah plochy, uzavřené astroidou z příkladu 6.7.

$$S = \frac{3\pi}{8} a^2$$



Obrázek 8.2: Descartův list. Geometrický význam konstanty a je vyznačen zelenou barvou.

- 8.8 Pomocí plošného integrálu i pomocí Greenovy věty vypočítejte obsah plochy, uzavřené smyčkou křivky, dané obecnou rovnicí $x^3 + y^3 = 3axy$ (tzv. Descartova listu, viz obrázek 8.2). Vhodnou parametrizací je například: $x = x(t)$, $y = tx(t)$, kde $t = \operatorname{tg} \phi$.

$$S = \frac{3}{2} a^2$$

8.2 Stokesova věta (Stokesův-Kelvinův teorém)

Stokesova věta srovnává tok rotace vektorového pole \vec{F} plochou S , definovanou v \mathbb{R}^3 a integrál tohoto pole po uzavřené křivce s , ohraničující tuto plochu. Matematický zápis Stokesovy věty má tvar

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad (8.2)$$

kte \vec{F} je dané vektorové pole, \vec{n} je jednotkový normálový vektor plochy S , ∂S je uzavřená hranice plochy S (hladká nebo po částech hladká hraniční křivka s , orientovaná tečným vektorem $d\vec{s}$ jejího délkového elementu ds).

• Příklady:

- 8.9 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 - y, x, 0)$ která působí po celé kružnici o poloměru R se středem v bodě $[0, 0, 0]$ v matematicky kladném směru a jejíž začátek i konec jsou v bodě $[R, 0, 0]$. Změní se velikost práce, pokud síla bude působit v matematicky záporném směru ?

$$W = 2\pi R^2, \text{ změni: } W = -2\pi R^2$$

- 8.10 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 - y, x, 0)$ která působí po obvodu čtverce postupně z bodu $[0, 0, 3]$ do bodů $[1, 0, 3]$, $[1, 1, 3]$, $[0, 1, 3]$ a zpět do počátečního bodu. Změní se velikost práce, pokud síla bude působit v opačném směru ?

$$W = 2, \text{ změni: } W = -2$$

- 8.11 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 - x^2, x - 1, 0)$ která působí po obvodu trojúhelníka postupně z bodu $[0, 0, 1]$ do bodů $[2, 0, 1]$, $[0, 1, 1]$ a zpět do počátečního bodu. Změní se velikost práce, pokud síla bude působit v opačném směru ?

$$W = 1, \text{ změni: } W = -1$$

- 8.12 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 - x^2, x - 1, 0)$ která působí po obvodu trojúhelníka postupně z bodu $[0, 0, 0]$ do bodů $[2, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ a zpět do počátečního bodu. Změní se velikost práce, pokud síla bude působit v opačném směru ?

$$W = 1, \text{ změni: } W = -1$$

- 8.13 Pomocí Stokesovy věty ověřte výpočet práce síly z příkladu 6.38.

$$W = \oint_{\partial V} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS, \text{ rot } \vec{F} = (0, 0, 2), \vec{n} = (0, 0, -1), S = \frac{\pi}{4}, W = -\frac{\pi}{2}$$

- 8.14 Pomocí Stokesovy věty ověřte výpočet práce síly z příkladu 6.39.

$$W = \oint_{\partial V} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS, \text{ rot } \vec{F} = (0, 0, 2), \vec{n} = (0, 0, 1), S = \pi - 1, W = 2(\pi - 1)$$

8.15 Pomocí křivkového integrálu 2. druhu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = [y^2, (x+y)^2, 0]$, působící po obvodě trojúhelníka ve směru vrcholů v bodech $[3, 0, 0]$, $[0, 3, 0]$, $[3, 3, 0]$.

$$W = -18$$

8.16 Pomocí křivkového integrálu 2. druhu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = [y, (x+y)^2, 0]$, působící v matematicky záporném směru po křivce $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

$$W = \pi$$

8.17 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$, působící nejprve po křivce $y^2 = R^2 - x^2$ z bodu $[R, 0, 0]$ do bodu $[0, R, 0]$, dále po křivce $z^2 = R^2 - y^2$ z bodu $[0, R, 0]$ do bodu $[0, 0, R]$ a nakonec po křivce $x^2 = R^2 - z^2$ z bodu $[0, 0, R]$ zpět do výchozího bodu.

$$W = -\frac{\pi R^2}{2}$$

8.18 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$, působící nejprve po křivce $y^2 = R^2 - x^2$ z bodu $[R, 0, 0]$ do bodu $[0, R, 0]$, dále po křivce $z^2 = R^2 - y^2$ z bodu $[0, R, 0]$ do bodu $[0, 0, R]$ a nakonec po křivce $x^2 = R^2 - z^2$ z bodu $[0, 0, R]$ zpět do výchozího bodu.

$$W = -2R^3$$

8.19 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$, působící po povrchu tělesa z příkladu 7.53

- nejprve po křivce $y^2 = R^2 - x^2$ z bodu $[0, -R, 0]$ v matematicky kladném směru do bodu $[R, 0, 0]$, dále po křivce $z = H - x^2$ z bodu $[R, 0, 0]$ do bodu $[0, 0, H]$ a nakonec po křivce $z = H - y^2$ z bodu $[0, 0, H]$ zpět do výchozího bodu,
- nejprve po křivce $y^2 = R^2 - x^2$ z bodu $[R, 0, 0]$ v matematicky kladném směru do bodu $[0, R, 0]$, dále po křivce $z = H - y^2$ z bodu $[0, R, 0]$ do bodu $[0, 0, H]$ a nakonec po křivce $z = H - x^2$ z bodu $[0, 0, H]$ zpět do výchozího bodu,
- nejprve po křivce $y^2 = R^2 - x^2$ z bodu $[0, -R, 0]$ v matematicky kladném směru do bodu $[0, R, 0]$, dále po křivce $z = H - y^2$ z bodu $[0, R, 0]$ do bodu $[0, 0, H]$ a nakonec po křivce $z = H - y^2$ z bodu $[0, 0, H]$ zpět do výchozího bodu.

$$(a) W = -\frac{\pi R^2}{4}$$

$$(b) W = -\frac{\pi R^2}{4} - \frac{4}{3}R^3$$

$$(c) W = -\frac{\pi R^2}{2} - \frac{4}{3}R^3$$

8.20 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$, působící po povrchu tělesa z příkladu 7.13

- (a) nejprve po křivce $y^2 = R^2 - x^2$ z bodu $[R, 0, 0]$ v matematicky kladném směru do bodu $[0, R, 0]$, dále nejkratším možným způsobem z bodu $[0, R, 0]$ do bodu $[0, 0, H]$ a nakonec opět nejkratším možným způsobem z bodu $[0, 0, H]$ zpět do výchozího bodu,
- (b) nejprve po křivce $y^2 = R^2 - x^2$ z bodu $[0, -R, 0]$ v matematicky kladném směru do bodu $[0, R, 0]$, dále nejkratším možným způsobem z bodu $[0, R, 0]$ do bodu $[0, 0, H]$ a nakonec opět nejkratším možným způsobem z bodu $[0, 0, H]$ zpět do výchozího bodu.

$$(a) \quad W = -\frac{R}{3}(2R^2 + HR + H^2)$$

$$(b) \quad W = -\frac{2}{3}H^2R$$

8.21 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, -z^2, x^2)$, působící po povrchu tělesa z příkladu 7.53

- (a) nejprve po křivce $y^2 = R^2 - x^2$ z bodu $[0, -R, 0]$ v matematicky kladném směru do bodu $[R, 0, 0]$, dále po křivce $z = H - x^2$ z bodu $[R, 0, 0]$ do bodu $[0, 0, H]$ a nakonec po křivce $z = H - y^2$ z bodu $[0, 0, H]$ zpět do výchozího bodu,
- (b) nejprve po křivce $y^2 = R^2 - x^2$ z bodu $[R, 0, 0]$ v matematicky kladném směru do bodu $[0, R, 0]$, dále po křivce $z = H - y^2$ z bodu $[0, R, 0]$ do bodu $[0, 0, H]$ a nakonec po křivce $z = H - x^2$ z bodu $[0, 0, H]$ zpět do výchozího bodu.

$$(a) \quad W = \frac{2}{3}R^3(2H + 1) + \frac{R^4}{2} - \frac{4}{5}R^5 = \frac{8}{15}R^5 + \frac{R^4}{2} + \frac{2}{3}R^3$$

$$(b) \quad W = \frac{2}{3}R^3(2H - 1) - \frac{R^4}{2} - \frac{4}{5}R^5 = \frac{8}{15}R^5 - \frac{R^4}{2} - \frac{2}{3}R^3$$

8.22 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty dokažte, že práce síly $\vec{F}(x, y, z) = (z^2, x^2, y^2)$ působící v matematicky kladném směru po křivce dané průnikem ploch $S_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ a $S_2 = \{x - z = 0\}$, je nulová.

Úlohu lze řešit jak v kulovém tak v pootočeném válcovém souřadném systému (transformace bází).

8.23 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (z^3, x^2, y)$ působící po obvodu rovnoběžníka z výchozího bodu $[0, 0, 0]$ ve směru bodů $[A, 0, A]$, $[A, A, A]$, $[0, A, 0]$ a zpět do výchozího bodu.

$$W = A^3 - A^2$$

8.24 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (z^3, x^2, y)$ působící po obvodu trojúhelníka z výchozího bodu $[0, 0, 0]$ ve směru bodů $[A, 0, 0]$, $[0, B, C]$ a zpět do výchozího bodu.

$$W = \frac{A^2B}{3} - \frac{AC^3}{4}$$

8.25 Pomocí křivkového integrálu i Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, xz, y^2)$ působící po obvodu plochy dané předpisem $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2, z = 6\}$, po vykonání 1 okruhu z bodu $[R, 0, 6]$ do stejného bodu, v matematicky záporném směru.

$$-6\pi R^2$$

8.26 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (z^2, x^2, y^2)$ působící po obvodu plochy dané předpisem $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2, x, y, z \in \langle 0, R \rangle\}$, ve směru bodů $[0, 0, 0]$, $[R, 0, R]$, $[0, R, R]$ a zpět do bodu $[0, 0, 0]$.

$$W = 2R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$$

8.27 Pomocí křivkového integrálu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (z^2, x^2, y^2)$ působící po obvodu plochy dané předpisem $S = \{(x, y, z) | x^2 + (y - R)^2 + z^2 = R^2, x \in \langle -R, 0 \rangle, y, z \in \langle 0, R \rangle\}$, ve směru bodů $[-R, R, 0]$, $[0, R, R]$, $[0, 0, 0]$ a zpět do bodu $[-R, R, 0]$.

$$W = 2R^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$$

8.28 Pomocí křivkového integrálu 2. druhu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (z^2, x^2, y^2)$ působící po obvodu plochy dané předpisem: $S = \{(x, y, z) | x^2 + (y + R)^2 + z^2 = R^2, x \in \langle -R, 0 \rangle, y \in \langle -R, 0 \rangle, z \in \langle 0, R \rangle\}$, ve směru bodů $[-R, -R, 0]$, $[0, -R, R]$, $[0, 0, 0]$ a zpět do bodu $[-R, -R, 0]$.

$$W = 2R^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right)$$

8.29 Pomocí křivkového integrálu 2. druhu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (xz, -yz, 0)$ působící po plášti válce o poloměru R , jehož osa prochází bodem $[-R, 0, 0]$ a splývá s vektorem $(0, 0, z)$. Síla působí po uzavřené trajektorii z počátečního bodu $[0, 0, 0]$ ve směru bodů $[-R, R, 0]$, $[-R, R, H]$, $[0, 0, H]$ a zpět do bodu $[0, 0, 0]$.

$$W = 0$$

8.30 Pomocí křivkového integrálu 2. druhu i pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}(x, y, z) = (xz^2, xz^2, yz^2)$ působící po povrchu válce o poloměru R , jehož osa prochází bodem $[R, 0, 0]$ a splývá s vektorem $(0, 0, z)$, $z \in \langle 0, H \rangle$. Síla působí po uzavřené trajektorii z počátečního bodu $[R, R, H]$ po hraně pláště válce do bodu $[0, 0, H]$, dále po úsečce do bodu $[2R, 0, H]$, a opět po hraně pláště válce zpět do bodu $[R, R, H]$.

$$W = \frac{\pi R^2 H^2}{2}$$

8.3 Gaussova (Gaussova-Ostrogradského) věta¹

Gaussova věta, nazývaná také Gaussův teorém nebo teorém divergence, říká, že tok vektorového pole uzavřenou plochou S se rovná integrálu divergence tohoto pole přes objem V , ohraničený

¹Pokud není uvedeno jinak, myslí se vždy tok ve směru vnější normály uvedené uzavřené plochy.

touto plochou, definovanou v \mathbb{R}^3 (obecně v \mathbb{R}^n). Matematický zápis Gaussovy věty má tvar

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV = \oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS, \quad (8.3)$$

kde \vec{F} je obecné vektorové pole, \vec{n} je jednotkový vektor vnější normály plochy S , ∂V značí hraniční oblast objemu V (hraniční plochu S).

• **Příklady:**

8.31 Pomocí Gaussovy věty odvoďte vztah pro výpočet objemu válce o poloměru R a výšce H .

$$\text{Pomocí identity } V = \int_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV \ (\operatorname{div} \vec{F} = 1) = \oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS, \quad V = \pi R^2 H$$

8.32 Pomocí Gaussovy věty odvoďte vztah pro výpočet objemu koule o poloměru R .

$$\text{Stejným způsobem jako v předešlém příkladě, } V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

8.33 Pomocí Gaussovy věty odvoďte vztah pro výpočet objemu kužele o poloměru R a výšce H .

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

8.34 Pomocí Gaussovy věty odvoďte vztah pro výpočet objemu anuloidu (toroidu) o poloměru osy toru R a poloměru trubice a (viz příklad 7.55).

$$V = 2\pi^2 R a^2$$

8.35 Pomocí Gaussovy věty určete tok vektorového pole $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ uzavřenou plochou, určenou předpisem $S = \{(x, y, z) \mid x \in \langle A, 2A \rangle, y \in \langle B, 2B \rangle, z \in \langle C, 2C \rangle\}$.

$$\Phi_F = 3ABC(A + B + C)$$

8.36 Pomocí Gaussovy věty určete tok vektorového pole $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ uzavřenou plochou, určenou předpisem $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = R^2, z \in \langle 0, H \rangle\}$.

$$\Phi_F = \pi R^2 H^2$$

8.37 Pomocí Gaussovy věty určete tok vektorového pole $\vec{F} = [(x-1)^2, (y-1)^2, z^2]$ povrchem tělesa, určeného předpisem $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0, z \in \langle 0, H \rangle\}$.

$$\frac{4}{3} R^3 H + \frac{\pi R^2 H^2}{2} - 2\pi R^2 H$$

8.38 Pomocí Gaussovy věty určete tok vektorového pole $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ uzavřenou plochou, tvořenou povrchem tělesa z příkladu 7.53.

$$\Phi_F = \frac{\pi R^2 H^2}{3}$$

8.39 Pomocí Gaussovy věty určete tok vektorového pole $\vec{F} = (x^3 - y^3, x^3 + y^3, z)$ uzavřenou plochou, tvořenou povrchem tělesa $\mathcal{V} = \left\{ (x, y, z) \mid z \in \langle 0, H \rangle, x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{H^2}(H - z)^2 \right\}$.

$$\Phi_F = \frac{\pi R^2 H}{30} (9R^2 + 10)$$

8.40 Pomocí Gaussovy věty určete tok vektorového pole $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ plochou, určenou předpisem $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

$$\Phi_F = \frac{12}{5} \pi R^5$$

8.41 Je dáno silové pole $\vec{F} = (x^3 - x^2, y^3 - y^2, z^3 - z^2)$. Pomocí Gaussovy věty určete jeho tok povrchem tělesa, určeného předpisem $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \langle 0, R \rangle, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

$$\Phi_F = \frac{3\pi R^4}{40} (4R - 5)$$

8.42 Pomocí Gaussovy věty odvoďte vztah pro výpočet objemu osově symetrického tělesa \mathcal{M} s osou $(0, 0, z)$: $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \sin \theta, z \leq a \sin \theta \cos \theta, \theta \in \langle 0, \pi \rangle\}$. Povrch tělesa je vytvořen rotací rovinné křivky, tzv. Geronovy (Huygensovy) lemniskáty, okolo osy ležící v rovině křivky a procházející jejím středem - viz obrázek 8.1 (kde osa y bude nyní osou z), viz také příklad 8.6.

$$V = \frac{\pi^2 a^3}{4}$$

8.43 Pomocí Gaussovy věty ověřte výpočet objemu tělesa z příkladu 7.58.

$$V = \frac{32}{105} \pi a^3$$

8.44 Pomocí Gaussovy věty odvoďte vztah pro výpočet objemu osově symetrického tělesa \mathcal{M} vytvořeného rotací uzavřené smyčky Descartova listu z příkladu 8.8 okolo osy y , vyznačené v obrázku 8.2. Určete rovněž maximální délku L smyčky, tj. délku podél přímky, půlící 1. kvadrant v uvedeném obrázku a souřadnice horizontálního i vertikálního maxima, vše jako funkci konstanty a .

$$V = \frac{4\pi^2 a^3}{3\sqrt{3}}, L = \frac{3}{\sqrt{2}} a, (2^{\frac{2}{3}} a, 2^{\frac{1}{3}} a), (2^{\frac{1}{3}} a, 2^{\frac{2}{3}} a)$$

8.45 Pomocí Gaussovy věty určete polohu středu hmotnosti homogenního tělesa z příkladu 8.44 ve směru svislé osy, vyznačené v obrázku 8.2.

$$z_T = \frac{27\sqrt{3}}{16\pi} a$$

8.46 Pomocí Gaussovy věty odvoďte moment setrvačnosti homogenního tělesa \mathcal{M} z příkladu 8.42, rotujícího okolo osy $(0, 0, z)$. Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti tělesa M a poloměru a .

$$J = \frac{Ma^2}{2}$$

8.47 Pomocí Gaussovy věty odvoďte moment setrvačnosti homogenního tělesa \mathcal{A} z příkladu 7.58, rotujícího okolo stejné osy y . Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti tělesa M a poloosy a .

$$J = \frac{32}{143}Ma^2$$

8.48 Pomocí Gaussovy věty určete moment setrvačnosti homogenního tělesa z příkladu 8.44, rotujícího okolo svislé osy, vyznačené v obrázku 8.2. Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti tělesa M a maximálního rozměru R smyčky v horizontálním směru.

$$J = \frac{81\sqrt{3}}{40\pi} \frac{MR^2}{2^{4/3}}$$

8.49 Pomocí Gaussovy věty vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (x, y, z)$ uzavřenou plochou, tvořenou povrchem tělesa z příkladu 8.42. Proč je výsledná hodnota trojnásobkem výsledné hodnoty z uvedeného příkladu ?

$$\Phi_F = \frac{3\pi^2 a^3}{4}$$

8.50 Pomocí Gaussovy věty vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ uzavřenou plochou, tvořenou povrchem tělesa z příkladu 8.42.

$$\Phi_F = \frac{27}{64}\pi^2 a^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \pi^2 a^5$$

8.51 Pomocí Gaussovy věty vypočítejte tok Φ vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z^2)$ uzavřenou plochou, tvořící povrch tělesa: $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0, z \in \langle 0, |x| \rangle\}$.

$$\Phi_F = \pi$$

8.52 Pomocí Gaussovy věty vypočítejte tok Φ vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z^2)$ uzavřenou plochou, tvořící povrch tělesa: $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0, \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{1}{2}\}$.

$$\Phi_F = \pi$$

8.53 Pomocí plošného integrálu 2. druhu i pomocí Gaussovy věty vypočítejte tok Φ vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z^2)$ uzavřenou plochou, tvořící povrch tělesa: $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 9 \wedge z - 3x^2 - 3y^2 \geq 0\}$.

$$\Phi_F = 21\pi \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

8.54 Pomocí plošného integrálu 2. druhu i pomocí Gaussovy věty vypočítejte tok Φ vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, 0, 0)$ uzavřenou plochou, tvořící povrch tělesa: $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 5, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 1\}$.

$$\Phi_F = \frac{128}{15}$$

8.55 Určete kapacitu válcového kondenzátoru, který tvoří dvě souosé vodivé válcové slupky (elektrody) s poloměry R_1 a R_2 a délkou H , kde $R_1 < R_2$. Na vnitřní elektrodu je přiveden náboj $+Q$, na vnější elektrodu náboj $-Q$. Zanedbejte nepravidelnosti elektrického pole na obou koncích elektrod.

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln(R_2/R_1)}$$

8.56 Určete kapacitu kulového kondenzátoru, který tvoří dvě soustředné vodivé kulové slupky (elektrody) s poloměry R_1 a R_2 , kde $R_1 < R_2$. Na vnitřní elektrodu je přiveden náboj $+Q$, na vnější elektrodu náboj $-Q$.

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Kapitola 9

Taylorův rozvoj¹

Možnost nahrazení libovolné matematické funkce polynomem byla formulována počátkem 18. století matematiky Jamesem Gregorym a Brookem Taylorem. V případě nekonečněkrát diferencovatelné funkce půjde za určitých, přesně definovaných podmínek o nekonečnou mocninnou řadu. Rozvoj funkce do řady je jedním z nejpoužívanějších nástrojů pro vyjádření přibližné hodnoty funkcí, který tvoří základ mnoha principů numerické matematiky, atd.

9.1 Rozvoj funkce jedné proměnné

Obecný zápis Taylorova rozvoje nekonečněkrát diferencovatelné funkce jedné proměnné, jejíž všechny derivace v obecném bodě x_0 jsou konečné a spojitě, lze vyjádřit pomocí nekonečné řady

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} (x - x_0)^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \Big|_{x_0} (x - x_0)^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \Big|_{x_0} (x - x_0)^n, \quad (9.1)$$

kde řád derivace charakterizuje řád Taylorova rozvoje, stupeň mocniny určuje stupeň členu Taylorova polynomu (v případě funkce jedné proměnné se obojí shoduje). Položíme-li $x_0 = 0$, dostáváme tzv. Maclaurinovu řadu (rozvoj) jako speciální případ Taylorova rozvoje.

• Příklady:

9.1 Napište Taylorův rozvoj následujících funkcí v uvedených bodech x_0 :

$$(a) \quad f(x) = e^x, \quad x_0 = 0, \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$(b) \quad f(x) = e^x, \quad x_0 = 1, \quad e + e(x - 1) + \frac{1}{2}e(x - 1)^2 + \frac{1}{6}e(x - 1)^3 + \dots$$

$$(c) \quad f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0, \quad x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$$

$$(d) \quad f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0, \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots$$

¹Doporučená literatura k této kapitole: Děmidovič (2003), Kvasnica (2004), Rektorys (2009), Zemánek & Hasil (2012).

$$\begin{aligned}
 \text{(e)} \quad f(x) &= \ln x, \quad x_0 = 1, & x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots \\
 \text{(f)} \quad f(x) &= \sin x \cos x, \quad x_0 = 0, & x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{4x^7}{315} + \dots \\
 \text{(g)} \quad f(x) &= \operatorname{tg} x, \quad x_0 = 0, & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \\
 \text{(h)} \quad f(x) &= \operatorname{tg}^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, & 1 + 4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 8\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{40}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots
 \end{aligned}$$

9.2 Napište Taylorův rozvoj následujících funkcí v uvedených bodech x_0 :

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x) &= \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1, & 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + \dots \\
 \text{(b)} \quad f(x) &= \frac{1}{x^2}, \quad x_0 = 1, & 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + \dots \\
 \text{(c)} \quad f(x) &= e^{-x^2}, \quad x_0 = 0, & 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120} + \dots \\
 \text{(d)} \quad f(x) &= e^x \sin x, \quad x_0 = 0, & x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{630} + \dots \\
 \text{(e)} \quad f(x) &= \sin^2 x \cos^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, & \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \frac{32}{45}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 + \dots
 \end{aligned}$$

9.3 Napište rozvoj následujících funkcí do 4. stupně v bodě $x_0 = 0$ (Maclaurinův rozvoj):

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x) &= e^{3x}, & 1 + 3x + \frac{9}{2}(x^2 + x^3) + \frac{27}{8}x^4 + \dots \\
 \text{(b)} \quad f(x) &= \frac{x^2 - x + 1}{2x + 1}, & 1 - 3x + 7x^2 - 14x^3 + 28x^4 + \dots \\
 \text{(c)} \quad f(x) &= \ln(1 - \sin^2 x), & -x^2 - \frac{x^4}{6} + \dots \\
 \text{(d)} \quad f(x) &= \frac{e^{-x^3}}{(x-1)^3}, & -1 - 3x - 6x^2 - 9x^3 - 12x^4 + \dots \\
 \text{(e)} \quad f(x) &= \frac{\sinh(x^2 + 2\sin^4 x)}{1 + x^{10}}, & x^2 + 2x^4 + \dots \\
 \text{(f)} \quad f(x) &= \sqrt{\cos(3x + x^3)}. & 1 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{75}{32}x^4 + \dots
 \end{aligned}$$

9.4 Řešte následující neurčité integrály pomocí vhodného rozvoje integrandu do Taylorovy řady v bodě $x_0 = 0$ (Maclaurinova rozvoje)

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \int \frac{e^{x^2}}{x} dx, & \quad \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k! 2k} + C \\
 \text{(b)} \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, & \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)} + C \\
 \text{(c)} \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, & \quad \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)! 2k} + C
 \end{aligned}$$

$$(d) \int \frac{\sin x \cos x}{x} dx. \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!(2k-m+1)!} \right] + C$$

9.5 Pomocí Taylorova rozvoje určete hodnoty uvedených limit následujících funkcí:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, \quad \frac{1}{2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{e^{x^2} - e^{x^3}}, \quad 1$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 - e^x}{\ln(x+1)}}, \quad i$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 - 5x^2 + x^4} - 1 + x^2}{x^4}, \quad -\frac{9}{5}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2} - \ln \cos x}{x \sin x}, \quad \frac{1}{3}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x \operatorname{arctg} x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1}, \quad -\frac{4}{3}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x \sin x}{[\ln(1+x)]^4}, \quad -\frac{1}{24}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right], \quad \frac{1}{2}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \sqrt{3 \left(1 - \frac{x}{\operatorname{tg} x} \right)}. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} = -1$$

9.6 Vypočítejte přibližnou hodnotu následujících integrálů s chybou nepřevyšující 10^{-3}

$$(a) \text{ tzv. chybové funkce } \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ pro horní mez } x = 1, \quad 0,842\,714\,222$$

$$(b) \text{ tzv. integrálního sinu } \operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \text{ pro horní mez } x = 1, \quad 0,946\,082\,766$$

$$(c) \text{ tzv. integrálního kosinu } \operatorname{Ci} x = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt \quad (x > 0) \text{ pro spodní mez } x = 1. \text{ Tento integrál lze přepsat do tvaru } \operatorname{Ci} x = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt, \text{ kde tzv. Eulerova (Eulerova-Mascheroniho) konstanta } \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0,577\,215\,665, \\ 0,337\,400\,849$$

$$(d) \text{ tzv. exponenciálního integrálu } \operatorname{Ei} x = - \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \text{ pro } x = -1. \text{ Tento integrál lze přepsat do tvaru } \operatorname{Ei} x = \gamma + \ln |x| + \int_0^{-x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt, \text{ kde } \gamma \text{ je stejná Eulerova konstanta jako v příkladu 9.6c,}$$

-0,219 386 753

- (e) exponenciálního integrálu $\text{Ei } x$ popsaného v příkladě 9.6d, kde hodnota horní meze $x = 1$ (tento případ má konečné řešení, protože integrování funkce se singularitou lze za určitých podmínek provést přiřazením tzv. hlavní hodnoty určitého integrálu - viz odstavec 1.3),

1,894 854 554

- (f) tzv. integrálního logaritmu $\text{li } x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{\ln t}$ pro $x_1 = 2$ a $x_2 = 10$ (integrovanou funkci lze rozvinout do vhodné řady pomocí substituce $t = e^u$).

5,073 622 569

- 9.7 Pomocí Taylorova rozvoje dokažte Eulerovu identitu pro $y(x)$: $C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} = A \cos x + B \sin x$. Jaký je vztah mezi jednotlivými koeficienty a čemu se budou rovnat, pokud $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$?

$$A = C_1 + C_2, B = i(C_1 - C_2), C_1 = \frac{1-i}{2}, C_2 = \frac{1+i}{2}, A = 1, B = 1$$

- 9.8 Ověřte platnost klasického vztahu pro kinetickou energii $T = \frac{1}{2}mv^2$ pro malé rychlosti, $v \ll c$. Úplné relativistické vyjádření kinetické energie má tvar $T = E - E_0$, kde E představuje celkovou energii $E = mc^2$, E_0 je tzv. klidová energie, $E_0 = m_0c^2$. Veličiny m a m_0 , tedy relativistická a klidová hmotnost, jsou svázány vztahem $m = \gamma m_0$, kde tzv. Lorentzův faktor $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Pomocí Taylorova rozvoje relativistického vyjádření do druhého řádu.

- 9.9 Napište Taylorův rozvoj funkce $f(x) = \frac{Ax}{(B+x^2)^{3/2}}$, kde A, B jsou konstanty, do třetího řádu. Dále napište:

- (a) Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x)$ v okolí bodu $x_0 = 0$,
 (b) Třetí stupeň tohoto polynomu v okolí bodu $x_0 = 1$.

$$(a) T_3(x)|_{x_0=0} = \frac{A}{B^{3/2}}x - \frac{3A}{2B^{5/2}}x^3$$

$$(b) T_3^{\text{III}}(x)|_{x_0=1} = -\frac{A(3B^2 - 24B + 8)}{2(B+1)^{9/2}}(x-1)^3$$

- 9.10 Ukažte, že

- (a) Planckův zákon $B_\nu(T)$ pro malé frekvence ν přejde na Rayleighův-Jeansův zákon, známý v radiové fyzice,
 (b) Převed'te Planckův zákon ve formě $B_\nu(T)$ na tvar $B_\lambda(T)$ a dokažte přechod na Rayleighův-Jeansův zákon pro velké vlnové délky λ .

$$(a) B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \rightarrow \frac{2\nu^2}{c^2} kT$$

$$(b) B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \rightarrow \frac{2c}{\lambda^4} kT$$

9.2 Rozvoj funkce více proměnných

V případě nekonečněkrát diferencovatelné funkce dvou proměnných x, y , splňující v obecném bodě $[x_0, y_0]$ podmínku konečnosti a spojitosti všech derivací podle obou proměnných, lze obecný tvar Taylorova rozvoje zapsat jako

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0) \\ & + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)^2 + \frac{2 \partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0)^2 \right] \\ & + \frac{1}{3!} \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)^3 + \frac{3 \partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)^2 (y - y_0) \right. \\ & \left. + \frac{3 \partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)(y - y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0)^3 \right] + \dots, \quad (9.2) \end{aligned}$$

kde řád derivace opět charakterizuje řád Taylorova rozvoje, stupeň mocniny určuje stupeň členu Taylorova polynomu. Obecně lze tedy Taylorův rozvoj funkce více proměnných zapsat:

$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} \left(\frac{\partial^{n_1+\dots+n_k} f}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_k^{n_k}} \right) \Big|_{x_{01}, \dots, x_{0k}} \frac{(x_1 - x_{01})^{n_1} \dots (x_k - x_{0k})^{n_k}}{n_1! \dots n_k!}. \quad (9.3)$$

• Příklady:

9.11 Spočítejte všechny nenulové členy Taylorova rozvoje funkce $f(x, y) = x^2 y$ a pro jednotlivé řády rozvoje vyčíslete vždy hodnotu $f(2,1; 2,9)$. Výsledky porovnejte s hodnotou, udanou kalkulačkou.

$$T_0 = 12, T_1 = 12,8, T_2 = 12,79, T_3 = 12,789 \text{ (kalkulačkou } 12,789)$$

9.12 Pomocí Taylorova rozvoje funkce $f(x, y) = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}$ do prvního, druhého a třetího řádu vyčíslete vždy přibližnou hodnotu $f(1,1; 2,05)$. Výsledky porovnejte s hodnotou, udanou kalkulačkou.

$$T_1 = 3,1\overline{66}, T_2 = 3,169\ 120, T_3 = 3,168\ 984 \text{ (kalkulačkou } 3,168\ 990\dots)$$

9.13 Spočítejte všechny nenulové členy Taylorova rozvoje funkce $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ a pro jednotlivé řády rozvoje vyčíslete vždy hodnotu $f(0,95; 1,05; 1,1)$. Výsledky porovnejte s hodnotou, udanou kalkulačkou.

$$T_0 = 0, T_1 = 0, T_2 = 0,0525, T_3 = 0,054\ 25 \text{ (kalkulačkou } 0,054\ 25)$$

9.14 Pomocí Taylorova rozvoje funkce $f(x, y, z) = \frac{1}{xyz}$ do prvního, druhého, třetího a čtvrtého řádu vyčíslete vždy přibližnou hodnotu $f(0,9; 2,1; 3,1)$. Výsledky porovnejte s hodnotou, udanou kalkulačkou.

$T_1 = 0,169\overline{444}$, $T_2 = 0,170\,602\dots$, $T_3 = 0,170\,634\dots$, $T_4 = 0,170\,648\dots$, (kalkulačkou 0,170 678...)

9.15 Vypočítejte Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ v bodech

(a) $P_1 = [0, 0]$,

(b) $P_2 = [1, 2]$.

(a) $T_1(0, 0) = 1 - x^2 - y^2$

(b) $T_2(1, 2) = e^{-5} [x(x + 8y - 20) + y(7y - 40) + 56]$

9.16 Vypočítejte Taylorův polynom funkce z příkladu 9.12

(a) třetího stupně v bodě $[0, 0]$,

(b) druhého stupně v bodě $[1, 2]$.

(a) $T_3(0, 0) = 1 + 2x^2 + \frac{y^2}{2}$

(b) $T_2(1, 2) = \frac{1}{3} [4x + y - 8(x - 1)(y - 2) - 5] + \frac{5}{27} \left[2(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(y - 2)^2 \right]$

9.17 Vypočítejte Taylorův polynom třetího stupně funkce z příkladu 9.14 v bodě $[1, 1, 1]$.

$$T_3(1, 1, 1) = -x^3 - y^3 - z^3 - x^2y - x^2z - xy^2 - xz^2 - y^2z - yz^2 - xyz + 6(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz) - 15(x + y + z) + 20$$

9.18 Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 2}$ v bodě $[2, 1]$.

$$2x - y - 2 + \frac{1}{2} [-3(x - 2)^2 + 4(x - 2)(y - 1) - 2(y - 1)^2]$$

9.19 Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x, y) = \sqrt{e^{2x} - y^2 + 1}$ v bodě $[0, 1]$.

$$2 + x - y + \frac{1}{2} [x^2 + 2x(y - 1) - 2(y - 1)^2]$$

9.20 Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y} - 1}$ v bodě $[2, 1]$.

$$1 + \frac{x}{2} - y + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4}(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \right]$$

9.21 Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ v bodě $[0, 1]$.

$$1 + 2(y - 1) + \frac{1}{2} [-x^2 + 2(y - 1)^2]$$

9.22 Napište Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2yz}$ v bodě $[1, 1, 1]$.

$$T_3(1, 1, 1) = -4x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y - 3x^2z - 2xy^2 - 2xz^2 - 2y^2z - yz^2 - 2xyz + 7(3x^2 + z^2 + 2xy + 2xz) + 8y^2 + 9yz - 2(21x + 11z) - 23y + 36$$

Kapitola 10

Fourierovy řady¹

Metoda rozkladu obecných periodických funkcí na součet nekonečného počtu sinových a kosinových vln byla pojmenována po francouzském matematiku Jean-Baptiste Josephu Fourierovi (1768–1830). Fourierovy řady jsou v různé míře aplikovány ve většině fyzikálních oborů, např. v akustice, optice, kvantové fyzice, atd. Princip formulovaný nejprve pro Fourierovy řady byl později zobecněn v tzv. Fourierově analýze. Libovolná periodická funkce $f(x)$ s periodou T , integrovatelná v intervalu $\langle x_0, x_0 + T \rangle$, může být vyjádřena jako následující nekonečná suma (Fourierova řada):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x), \quad (10.1)$$

kde $\omega = 2\pi/T$. Fourierovy koeficienty a_k, b_k lze stanovit následujícím způsobem:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx, \quad (10.2)$$

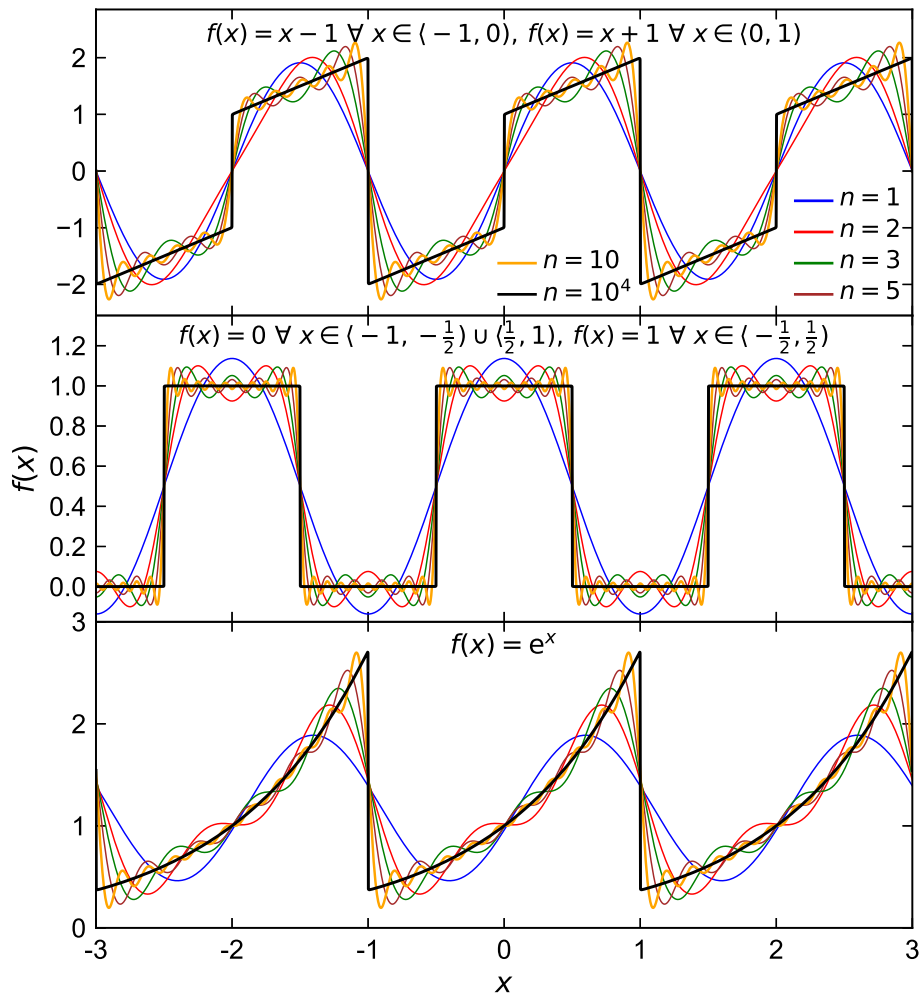
$$a_k = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos(k\omega x) dx, \quad (10.3)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin(k\omega x) dx. \quad (10.4)$$

V principu je možné rozepsat jako Fourierovu řadu i funkci, která uvnitř periody T obsahuje singularitu (například funkce $1/x$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$), s použitím rovnice (1.57) v kapitole 1.3. Takové funkce ale zpravidla vedou na integrály typu $\text{Si } x$, $\text{Ci } x$, $\text{Ei } x$ a podobně (viz příklad 9.6 v kapitole 9.1), řešitelné pouze numericky, samotná Fourierova řada potom obsahuje v singulárním bodě rovněž singularitu, Fourierovy koeficienty mohou být komplexní výrazy a navíc odpovídající rozvoj takové funkce v zásadě nemá fyzikální význam.

Pro větší názornost, obrázek 10.1 ukazuje složené grafy Fourierových řad liché funkce $f(x) = x - 1$ pro $x \in \langle -1, 0 \rangle$, $f(x) = x + 1$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ (horní graf), sudé funkce $f(x) = 0$ pro $x \in \langle -1, -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$, $f(x) = 1$ pro $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ (prostřední graf) a obecné funkce $f(x) = e^x$ (spodní graf), kdy u všech funkcí je základní interval $x \in \langle -1, 1 \rangle$, pro různá n , odlišená různými barvami. Takto vyznačená n jsou tedy nejvyšší n_{\max} , která tvoří horní mez sumace v rovnici (10.1), namísto ideálního ∞ . Jednotlivá n ovšem odpovídají pouze těm k v rovnici (10.1), pro které jsou Fourierovy koeficienty a_k a/nebo b_k nenulové, tedy $n = k$ v horním a spodním grafu na obrázku 10.1, kdežto $n = 2k - 1$ v prostředním grafu. Grafy názorně ilustrují, jak pro vyšší n se Fourierovy řady více a více podobají původní funkci se zadanou periodicitou, kdy pro $n \sim 10^4$ je už prakticky nelze odlišit.

¹Doporučená literatura k této kapitole: [Děmidovič \(2003\)](#), [Kvasnica \(2004\)](#), [Arken & Weber \(2005\)](#).



Obrázek 10.1: Grafy průběhu Fourierových řad funkcí $f(x) = x-1$ pro $x \in \langle -1, 0 \rangle$, $f(x) = x+1$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ (horní graf), $f(x) = 0$ pro $x \in \langle -1, -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$, $f(x) = 1$ pro $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ (prostřední graf) a $f(x) = e^x$ (spodní graf), kdy u všech funkcí je základní interval $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Jednotlivé barvy (viz legenda v horním grafu) vyznačují nejvyšší n , do něhož jsou jednotlivé řady počítány (vysvětlení indexu n - viz popis v textu).

Fourierova transformace je zobecněním komplexních Fourierových řad. Nahradíme-li diskrétní Fourierovy koeficienty a_k, b_k spojitou funkcí $F(\xi) d\xi$, potom za předpokladu $1/T \rightarrow \xi$ (frekvence) přejde (záměnou sumy za integrál) diskrétní Fourierova řada do spojitě podoby

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi. \quad (10.5)$$

Ve fyzice a v technických aplikacích se Fourierova transformace zapisuje častěji pomocí *úhlové frekvence* $\omega = 2\pi\xi$. Fourierova transformace $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ (kde \hat{f} je tzv. *Fourierův obraz* funkce f , tj. vzoru) a zpětná Fourierova transformace $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$ jsou potom (při jisté ztrátě symetrie) definovány jako:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (10.6)$$

Zavedeme dále pojem *konvoluce* dvou funkcí $f(x), g(x)$ (viz obrázek 10.2), která je definována jako:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy, \quad (10.7)$$

kde ovšem x a y neznamenají dva různé souřadnicové směry, ale pouze dvě různé proměnné. Fourierův obraz konvoluce funkcí $f(x), g(x)$ potom bude:

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) e^{-i\omega x} dx dy. \quad (10.8)$$

Pomocí transformace $\begin{cases} x - y = z \\ y = y \end{cases}$, jejíž Jakobián $\det \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, dostáváme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(z) e^{-i\omega(y+z)} dy dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-i\omega z} dz = \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega). \quad (10.9)$$

Výsledný vztah můžeme tedy zapsat jednoduchým způsobem,

$$\widehat{(f * g)} = \widehat{f} \widehat{g}, \quad (10.10)$$

Fourierův obraz konvoluce dvou funkcí $f(x), g(x)$ se rovná součinu jejich Fourierových obrazů.

Příklad konvoluce dvou funkcí $f * g$, které jsou původně zadány například ve tvaru

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 3e^{-x} & x \in \langle 0, \infty \rangle, \end{cases} \quad (10.11)$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 & x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0 & x \in (2, \infty), \end{cases} \quad (10.12)$$

znázorňuje obrázek 10.2. Funkce f, g transformujeme podle rovnice (10.7) následujícím způsobem:

$$f(x) = 3e^{-x} \rightarrow f(y) = 3e^{-y}, \quad (10.13)$$

$$g(x) \rightarrow g(x - y) = g(z), \quad (10.14)$$

kde potom pro funkci $g(z)$ (konvoluční jádro), platí $g(z) = 1$, pro $z \in \langle 0, 2 \rangle$ (a tedy $y \in \langle x, x - 2 \rangle$) a $g(z) = 0$ pro $z \notin \langle 0, 2 \rangle$ (a tedy $y \notin \langle x, x - 2 \rangle$), zároveň také platí $dz = -dy$. Protože $f(y) = 0$ pro $y < 0$, dostáváme tak tři oblasti integrace rovnice (10.7):

$$x - 2 < 0 \wedge x < 0 \quad (\text{obrázek 10.2a}), \quad (10.15)$$

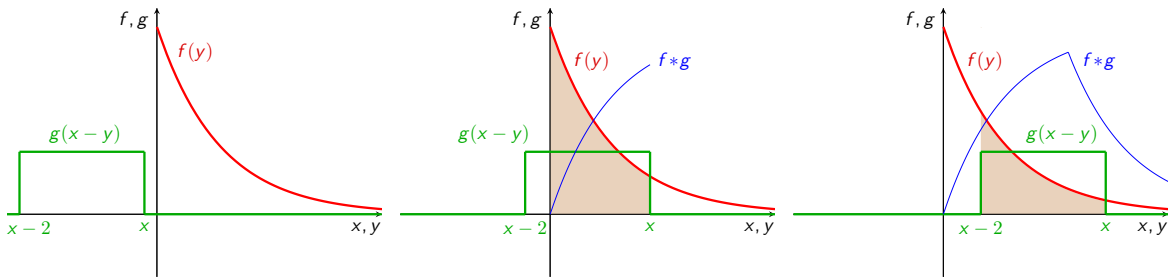
$$x - 2 < 0 \wedge x \geq 0 \quad (\text{obrázek 10.2b}), \quad (10.16)$$

$$x - 2 \geq 0 \wedge x > 0 \quad (\text{obrázek 10.2c}). \quad (10.17)$$

Integrace rovnice (10.7) bude mít pro tyto tři oblasti podobu:

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \\ 3 \int_0^x e^{-y} dy = 3(1 - e^{-x}) & \text{pro } x \in \langle 0, 2 \rangle, \\ 3 \int_{x-2}^x e^{-y} dy = 3e^{-x}(e^2 - 1) & \text{pro } x \in (2, \infty). \end{cases} \quad (10.18)$$

Výsledkem konvoluce dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ bude tedy funkce $(f * g)(x)$, jejíž hodnota se pro každé $x \in (-\infty, \infty)$ bude rovnat velikosti zvýrazněné plochy na obrázku 10.2.



Obrázek 10.2a

Obrázek 10.2b

Obrázek 10.2c

Obrázek 10.2: Schéma konvoluce $f * g$ funkcí $f(x)$, $g(x)$, původně popsanych rovnicemi (10.11) a (10.12). V obrázku 10.2a platí, že v rovnicích (10.13), (10.14) je $x \in (-\infty, 0)$, v obrázku 10.2b je $x \in (0, 2)$, v obrázku 10.2c je $x \in (2, \infty)$. Tvar výsledné funkce $(f * g)(x)$ je zakreslen modrou barvou, funkce je popsána v rovnici (10.18), její hodnota se pro každé x bude rovnat velikosti zvýrazněné plochy.

10.1 Fourierovy řady

• Příklady:

Napište Fourierovu řadu pro následující periodické funkce s periodou T :

$$10.1 \quad f(x) = \frac{x^2}{\pi}, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle, \quad T = 2\pi \quad \frac{\pi}{3} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$

$$10.2 \quad f(x) = \frac{x^2}{\pi}, \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad T = 2\pi \quad \frac{4\pi}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2\pi} \cos(kx) - \frac{1}{k} \sin(kx) \right]$$

$$10.3 \quad f(x) = |x|, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle, \quad T = 2\pi \quad \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(kx)$$

$$10.4 \quad f(x) = x|x|, \quad x \in \langle -L, L \rangle, \quad T = 2L \quad \frac{2L^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2 - \pi^2 k^2)(-1)^k - 2}{k^3} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$10.5 \quad f(x) = \frac{|x^3|}{x}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad T = 2 \quad \frac{2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2 - \pi^2 k^2)(-1)^k - 2}{k^3} \sin(k\pi x)$$

$$10.6 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ x - 1 & x \in \langle 1, 2 \rangle \end{cases}, \quad T = 2 \quad \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^k}{k^2\pi^2} \cos(k\pi x) - \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi x) \right]$$

$$10.7 \quad f(x) = e^{ax}, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle, \quad \text{konstanta } a \neq 0, \quad T = 2\pi$$

$$\frac{2}{\pi} \sinh(a\pi) \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{a^2 + k^2} [a \cos(kx) - k \sin(kx)] \right] \right\}$$

$$10.8 \quad f(x) = (x - 1)(x - 3), \quad x \in \langle 1, 3 \rangle, \quad T = 2 \quad -\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\pi x)$$

$$10.9 \quad f(x) = \frac{x}{2L}, \quad x \in \langle 0, 2L \rangle, \quad T = 2L \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$10.10 \quad f(x) = x^4, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad T = 2 \quad \frac{1}{5} + \frac{8}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2 \pi^2 - 6}{k^4} \cos(k\pi x)$$

$$10.11 \quad f(x) = \operatorname{sgn} \left[\sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right], \quad x \in \langle 0, 2L \rangle, \quad T = 2L$$

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \left[\frac{(2k+1)\pi}{L} x \right]$$

$$10.12 \quad f(x) = \begin{cases} -x & x \in \langle -1, 0 \rangle \\ x & x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}, \quad T = 2 \quad \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos[(2k+1)\pi x]$$

$$10.13 \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ -1 & x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle \\ 0 & |x| \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{cases}, \quad T = 2\pi \quad \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k-2} \left\{ 1 - \cos \left[(4k-2) \frac{\pi}{2} \right] \right\} \sin[(4k-2)x]$$

$$10.14 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle -1, -\frac{1}{2} \rangle \\ \cos 3\pi x & x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ 0 & x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \end{cases}, \quad T = 2$$

$$-\frac{1}{3\pi} + \frac{6 \cos(2\pi x)}{5\pi} + \frac{\cos(3\pi x)}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{\tilde{k}^2 - 9} \cos \left(\frac{\tilde{k}\pi}{2} \right) \cos(\tilde{k}\pi x), \quad \text{kde } \tilde{k} = 2k - 4$$

$$10.15 \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle -1, 0 \rangle \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ x & x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}, \quad T = 2 \quad \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2} \cos(k\pi x) - \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi x) \right]$$

$$10.16 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ -\frac{4}{\pi} x & x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle \end{cases}, \quad T = \pi \quad 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[2(2k-1)x]}{(2k-1)^2}$$

$$10.17 \quad f(x) = \begin{cases} x(1-x) & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & x \in \langle -1, 0 \rangle \end{cases}, \quad T = 2$$

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k^2} [1 + (-1)^k] \cos(k\pi x) - \frac{2}{k^3 \pi} [1 - (-1)^k] \sin(k\pi x) \right\}$$

$$10.18 \quad f(x) = |\sin x|, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle, \quad T = 2\pi \quad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)} \cos(2kx)$$

$$10.19 \quad f(x) = |\cos x|, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle, \quad T = 2\pi \quad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k^2 - 1)} \cos(2kx)$$

$$10.20 \quad f(x) = \sin x \cos x, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle \qquad \pi \sin(2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^k}{4 - k^2\pi^2} \sin(k\pi x)$$

$$10.21 \quad f(x) = |x| + a, \quad x \in \langle -L, L \rangle, \text{ kde } a \text{ je konstanta.}$$

$$a + \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{L} x \right]$$

$$10.22 \quad f(x) = \begin{cases} x - a & x \in \langle -L, 0 \rangle \\ x + a & x \in \langle 0, L \rangle \end{cases}, \text{ kde } a \text{ je konstanta.}$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a - (a+L)(-1)^k}{k} \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right)$$

$$10.23 \quad (\text{a}) \quad f(x) = x, \quad x \in \langle 2, 3 \rangle \qquad \frac{5}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2k\pi x)$$

$$(\text{b}) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle -3, -2 \rangle \\ 0, & x \in \langle -2, 2 \rangle \\ x, & x \in \langle 2, 3 \rangle \end{cases}$$

$$-\frac{6}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{k} - \frac{2}{3k} \cos \left(\frac{2k\pi}{3} \right) + \frac{1}{k^2\pi} \sin \left(\frac{2k\pi}{3} \right) \right] \sin \left(\frac{k\pi}{3} x \right)$$

10.2 Fourierova analýza ★

• Příklady: ★

Určete konvoluci funkcí $(f * g)(x)$:

$$10.24 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 2 & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases} \qquad f * g = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 2x & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$10.25 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ e^{-2x} & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases} \qquad f * g = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ e^{-x}(1 - e^{-x}) & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ e^{-x} & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$10.26 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ e^{-x} & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases} \qquad f * g = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2}(e^{-x} + \sin x - \cos x) & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \sin x & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

★ jsou označeny odstavce a příklady, určené primárně studentům vyšších ročníků bakalářského studia

$$10.27 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \sin x & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases} \\ g(x) = 1$$

$$f * g = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - \cos x & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$10.28 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \sin x & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases} \\ g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & x \in (\frac{\pi}{2}, \infty) \end{cases}$$

$$f * g = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ \sin x - \cos x & x \in (\frac{\pi}{2}, \infty) \end{cases}$$

$$10.29 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \sin x & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases} \\ g(x) = \sin(ax), \quad a > 0$$

$$f * g = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{a^2 - 1} [a \sin x - \sin(ax)] & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases}$$

$$10.30 \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \sin x & x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases} \\ g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - \frac{2}{\pi}x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & x \in (\frac{\pi}{2}, \infty) \end{cases}$$

$$f * g = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - \frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi} \sin x - \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ \frac{2}{\pi}(\sin x + \cos x) - \cos x & x \in (\frac{\pi}{2}, \infty) \end{cases}$$

10.31 Určete Fourierův obraz funkce:

(a) $f(x) = 1$ pro $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$, $f(x) = 0$ pro $x \notin \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$,

(b) $f(x) = e^{-bx}$ pro $x \in \langle 0, \infty \rangle$, $f(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$, $b > 0 = \text{konst.}$,

(c) $f(x) = e^{-b|x|}$ pro $x \in (-\infty, \infty)$,

(d) $f(x) = e^{-bx^2}$ pro $x \in (-\infty, \infty)$,

(e) $f(x) = 1 + x$ pro $x \in \langle -1, 0 \rangle$, $f(x) = 1 - x$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $f(x) = 0$ pro $|x| > 1$,

(f) $f(x) = x^2$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$, $f(x) = 0$ pro $|x| > 1$.

(a) $\hat{f}(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$

(b) $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{b + i\omega}$

(c) $\hat{f}(\omega) = \frac{2b}{b^2 + \omega^2}$

(d) $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$

(e) $\hat{f}(\omega) = \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos \omega)$

$$(f) \hat{f}(\omega) = \frac{2}{\omega^3} [(\omega^2 - 2) \sin \omega + 2\omega \cos \omega]$$

10.32 Určete Fourierův obraz funkce:

$$(a) f(x) = \sin x \text{ pro } x \in \langle 0, 2\pi \rangle, f(x) = 0 \text{ pro } x \notin \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \hat{f}(\omega) = \frac{i\omega(1 - e^{-2\pi i\omega})}{1 - \omega^2}$$

$$(b) f(x) = \cos x \text{ pro } x \in \langle 0, 2\pi \rangle, f(x) = 0 \text{ pro } x \notin \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \hat{f}(\omega) = -\frac{1 - e^{-2\pi i\omega}}{\omega^2 - 1}$$

$$(c) f(x) = \sin x \cos x \text{ pro } x \in \langle 0, 2\pi \rangle, f(x) = 0 \text{ pro } x \notin \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \hat{f}(\omega) = -\frac{1 - e^{-2\pi i\omega}}{\omega^2 - 4}$$

$$(d) f(x) = \sin^2 x \cos^2 x \text{ pro } x \in \langle 0, 2\pi \rangle, f(x) = 0 \text{ pro } x \notin \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \hat{f}(\omega) = -\frac{2i(1 - e^{-2\pi i\omega})}{\omega(\omega^2 - 16)}$$

$$(e) f(x) = A^{Bx} \text{ pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, f(x) = 0 \text{ pro } x \notin \langle 0, 1 \rangle. \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega A^B}}{i\omega - B \ln A}$$

10.33 Na příkladech 10.24, 10.25, 10.26 a 10.27 ověřte platnost rovnice (10.10):

$$(a) (10.24): \hat{f}(\omega) = -\frac{2i}{\omega}, \hat{g}(\omega) = -\frac{i}{\omega}, \widehat{(f * g)}(\omega) = -\frac{2}{\omega^2}$$

$$(b) (10.25): \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2 + i\omega}, \hat{g}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega}, \widehat{(f * g)}(\omega) = \frac{1}{2 - \omega^2 + 3i\omega}$$

$$(c) (10.26): \hat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega}, \hat{g}(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2}, \widehat{(f * g)}(\omega) = \frac{1}{(1 + i\omega)(1 - \omega^2)}$$

$$(d) (10.27): \hat{f}(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2}, \hat{g}(\omega) = \frac{1}{i\omega}, \widehat{(f * g)}(\omega) = \frac{1}{i\omega(1 - \omega^2)}$$

Kapitola 11

Úvod do komplexní analýzy¹

11.1 Komplexní čísla

Algebraický zápis komplexního čísla (komplexní proměnné) $z \in \mathbb{C}$ má tvar

$$z = x + iy, \quad (11.1)$$

kde $x = \operatorname{Re} z$ je *reálná* část komplexního čísla a $y = \operatorname{Im} z$ je *imaginární* část komplexního čísla. Tzv. *imaginární jednotka* i je definována jako

$$i \equiv \sqrt{-1}, \quad (11.2)$$

pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$ tedy platí následující periodicky se opakující identity,

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i. \quad (11.3)$$

Číslo z^* (značí se také \bar{z}) nazýváme číslem *komplexně sdruženým* k číslu z , kdy $z^* = x - iy$. Pro součet, součin a podíl dvou komplexních čísel $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, platí následující (snadno odvoditelná) pravidla

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (11.4)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad (11.5)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + i \left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right), \quad (11.6)$$

kde vždy první závorka vyjadřuje reálnou část a druhá závorka vyjadřuje imaginární část výsledného komplexního čísla. Ostatní operace (převrácená hodnota, mocniny, atd.) můžeme odvodit analogickým způsobem.

Zápis komplexního čísla lze provést v *goniometrickém*, případně *exponenciálním* tvaru,

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}, \quad (11.7)$$

kde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je *absolutní hodnota komplexního čísla* (norma, modul) a orientovaný úhel $\varphi = \arccos(x/r) = \arcsin(y/r) = \operatorname{arctg}(y/x)$ je *argument* (fáze) *komplexního čísla*. (jmenovatel rovnice (11.6) demonstruje důležitý vztah $z z^* = |z|^2$). Exponenciální, respektive

¹Doporučená literatura k této kapitole: Jefgafrov et al. (1976), Kvasnica (2004), Arfken & Weber (2005).

goniometrický tvar komplexního čísla umožňuje také snadné násobení, dělení a zejména umocňování a odmocňování (viz Eulerova identita v příkladu 9.7). Napíšeme-li dvě různá komplexní čísla jako $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, budou jejich součin a podíl

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (11.8)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (11.9)$$

Uvedená pravidla lze snadno zobecnit i na libovolný počet komplexních čísel. Pro libovolnou racionální mocninu komplexního čísla $z^{m/n}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, tedy také platí (tzv. *zobecněný Moivreův vzorec*)

$$(x + iy)^{m/n} = r^{m/n} e^{i(m\varphi + 2k\pi)/n} = \quad (11.10)$$

$$= r^{m/n} \left[\cos\left(\frac{m\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{m\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad (11.11)$$

kde $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

• Příklady:

11.1 Zadaná komplexní čísla napište vždy v ostatních tvarech (algebraickém, goniometrickém nebo exponenciálním):

(a) $5\sqrt{3} + 5i$	$10 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$	$10 e^{\frac{\pi i}{6}}$
(b) $3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$	$6 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$	$6 e^{\frac{\pi i}{4}}$
(c) $-12 \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}} \right)$	$8\sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$	$8\sqrt{3} e^{\frac{5\pi i}{6}}$
(d) $-6 + \frac{6i}{\sqrt{3}}$	$\frac{12}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$	$\frac{12}{\sqrt{3}} e^{\frac{5\pi i}{6}}$
(e) $-2(1 + \sqrt{3}i)$	$4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$	$4 e^{\frac{4\pi i}{3}}$
(f) $3 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}(1 + i)$	$3 e^{\frac{5\pi i}{4}}$
(g) $12 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$	$6\sqrt{3} - 6i$	$12 e^{-\frac{\pi i}{6}}$
(h) $-2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$	$-(\sqrt{3} + i)$	$2 e^{\frac{7\pi i}{6}}$
(i) $3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{5\pi}{6} \right)$	$\frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i)$	$2 e^{\frac{5\pi i}{3}}$
(j) $2^{7/10} \left(\sin \frac{3\pi}{20} + i \cos \frac{3\pi}{20} \right)$	$(1 + i)^{7/5}$	$2^{7/10} e^{\frac{7\pi i}{20}}$
(k) $3 e^{-\frac{2\pi i}{3}}$	$-\frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i)$	$3 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$

$$(l) \sqrt{2} e^{\frac{7\pi i}{12}} \qquad (1+i)^{7/3} \qquad \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{7/3}$$

11.2 Napište součet, součin a podíl následujících komplexních čísel:

$$(a) z_1 = 2 + 3i, z_2 = 7 - i \quad z_1 + z_2 = 9 + 2i \quad z_1 z_2 = 17 + 19i \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{11 + 23i}{50}$$

$$(b) z_1 = 12 + i, z_2 = 6 - 3i \quad z_1 + z_2 = 18 - 2i \quad z_1 z_2 = 75 - 30i \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{23 + 14i}{15}$$

$$(c) z_1 = 7 + 3i, z_2 = 3 - 3i \quad z_1 + z_2 = 10 \quad z_1 z_2 = 30 - 12i \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 5i}{3}$$

$$(d) z_1 = 2 + 12i, z_2 = 5 - i \quad z_1 + z_2 = 7 + 11i \quad z_1 z_2 = 22 + 58i \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 + 31i}{13}$$

$$(e) z_1 = 1 - i, z_2^* = 11 + 5i \quad z_1 + z_2 = 12 - 6i \quad z_1 z_2 = 6 - 16i \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{8 - 3i}{73}$$

$$(f) z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), z_2 = 3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$z_1 + z_2 = \frac{-1 + 5\sqrt{3}i}{2} \qquad z_1 z_2 = -6 \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{3}$$

$$(g) z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right), z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} - i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$z_1 + z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 + \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2} \right) i \qquad z_1 z_2 = 3(\sqrt{3} + i) \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3} - (2 + 3\sqrt{3})i}{8}$$

11.3 Napište následující mocniny (odmocniny) komplexních čísel:

$$(a) (1+i)^7 \qquad 8(1-i)$$

$$(b) (-\sqrt{3}+i)^8 \qquad 128(-1+\sqrt{3}i)$$

$$(c) \sqrt[3]{1} \qquad 1, -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$$

$$(d) \sqrt[6]{729} \qquad \pm 3, \pm \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$$

$$(e) \sqrt{-2+2i} \qquad \sqrt[4]{8} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{8} + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{8} + k\pi \right) \right], \quad k = 0, 1$$

$$(f) \sqrt[5]{1+\sqrt{3}i} \qquad \sqrt[5]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$(g) \sqrt[3]{5-\frac{15i}{\sqrt{3}}} \qquad \sqrt[3]{10} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \right) \right], \quad k = 0, 1, 2$$

$$(h) \sqrt[3]{-5+\frac{5i}{\sqrt{3}}} \qquad \sqrt[6]{\frac{100}{3}} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \right) \right], \quad k = 0, 1, 2$$

$$(i) \sqrt{-6 + \frac{6i}{\sqrt{3}}} \quad \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^{1/2} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{12} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12} + k\pi\right) \right], \quad k = 0, 1$$

11.2 Funkce komplexní proměnné

Předpokládejme funkci *jedné* komplexní proměnné $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definovanou na oblasti $G : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2$, případně v polárních souřadnicích $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$, kdy $G : r_1 \leq r \leq r_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Derivaci funkce jedné komplexní proměnné $f'(z)$ definujeme potom na této oblasti jako limitu

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Rozvineme-li tento výraz zvlášť pro obě proměnné x, y (předpokládáme, že funkce $f(z)$ je diferencovatelná ve směrech obou os, reálné i imaginární, kde zvlášť položíme $\Delta y = 0$ a $\Delta x = 0$) způsobem popsaným v rovnicích (1.1) a (5.4), dostáváme

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{df}{dz} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (11.13)$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí obou rovnic dostáváme tzv. *Cauchyho-Riemannovy* podmínky existence derivace komplexní funkce $f(z)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (11.14)$$

Funkce $f(z)$ komplexní proměnné definovaná na oblasti G má tedy derivaci v bodě $z = x + iy$, pokud pro reálně diferencovatelné funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ platí podmínka (11.14). Takovou funkci potom nazýváme *regulární* v bodě z . Funkci $f(z)$ která má *všude* na oblasti G derivaci, nazýváme *analytickou* neboli *holomorfní* na oblasti G . Body oblasti G , v nichž jednoznačná funkce $f(z)$ (tj. taková, kdy pro každé $z \in D_f$ bude množina $f(z)$ jednoprvková) není regulární, nazýváme *singulárními body* nebo *singularitami* funkce $f(z)$. Provedeme-li také druhé derivace rovnic (11.14), dostaneme pro obě funkce u, v tzv. *Laplaceovu* rovnici (viz rovnice (5.21) pro dvě proměnné) $\Delta u = \Delta v = 0$.

Pomocí rovnic (11.13) a (11.14) lze odvodit tzv. *Cauchyův teorém* (důkaz a další podrobnosti viz např. Kvasnica (2004)) pro libovolnou po částech hladkou uzavřenou křivku \mathcal{C} a holomorfní funkci $f(z)$ na oblasti G ,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0 \quad (11.15)$$

a také tzv. *Cauchyovu formuli*, opět pro libovolnou po částech hladkou uzavřenou křivku \mathcal{C} a holomorfní funkci $f(z)$ uvnitř této křivky a na této křivce, kde ζ je libovolný bod *uvnitř* této křivky,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{z - \zeta}. \quad (11.16)$$

Cauchyova formule vyjadřuje tedy hodnotu funkce $f(z)$ (holomorfní uvnitř i na uzavřené křivce \mathcal{C}) v libovolném bodě ζ uvnitř křivky \mathcal{C} pomocí integrálu závislého *pouze* na hodnotách $f(z)$

v bodech ležících na křivce \mathcal{C} . Lze prokázat, že derivace libovolného řádu funkce $f(z)$ holomorfní v oblasti G jsou také holomorfními funkcemi v této oblasti. Platí tedy, že má-li funkce komplexní proměnné první derivaci ve všech bodech oblasti G , pak má tato funkce také všechny derivace libovolného řádu ve všech bodech této oblasti - tato vlastnost nemá obdobu v případě funkcí reálné proměnné (Kvasnica, 2004).

Funkce $f(z)$ má v bodě $z = \zeta$ tzv. izolovanou singularitu (izolovaný pól), pokud platí že funkce $f(z)$ není holomorfní v bodě ζ a zároveň všude v „komplexním“ okolí bodu ζ (tj. ve všech bodech komplexní roviny které „obklopují“ bod ζ) holomorfní je. Izolovaný pól je m -tého řádu právě tehdy, pokud funkci $f(z)$ v okolí bodu $z = \zeta$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - \zeta)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - \zeta} + g(z), \quad (11.17)$$

kde a_{-m}, \dots, a_{-1} jsou koeficienty a $g(z)$ je jednoznačná holomorfní funkce v okolí bodu $z = \zeta$ i v bodě ζ . Koeficient $a_{-1} \equiv \text{Res}$ je tzv. *reziduum* funkce $f(z)$ v bodě $z = \zeta$. Funkce $f(z)$ může mít různé izolované póly v bodech $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p$, v tom případě můžeme funkci $f(z)$ napsat ve tvaru

$$f(z) = g(z) + \frac{\text{Res}_1}{z - \zeta_1} + \frac{\text{Res}_2}{z - \zeta_2} + \dots + \frac{\text{Res}_p}{z - \zeta_p} + \dots, \quad (11.18)$$

kde Res_i je reziduum funkce $f(z)$ v bodě ζ_i a $g(z)$ je jednoznačná holomorfní funkce uvnitř uzavřené křivky \mathcal{C} a na ní.

Z těchto vztahů vyplývá důležitá tzv. *reziduová věta*: máme-li uzavřenou křivku \mathcal{C} v oblasti, kde $f(z)$ je jednoznačnou holomorfní funkcí s výjimkou izolovaných pólů této funkce, potom integrál z funkce $f(z)$ po takové křivce je roven

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}_i, \quad (11.19)$$

hodnota integrálu je tedy zcela určena koeficienty u izolovaného pólu prvního řádu funkce $f(z)$. Výpočet rezidua pro izolovaný pól m -tého řádu v bodě $z = \zeta$ je dán vztahem

$$\text{Res} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow \zeta} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - \zeta)^m f(z)] \right\}. \quad (11.20)$$

V případě že funkce $f(z)$ je podílem dvou komplexních polynomů, $f(z) = P(z)/Q(z)$, kdy $P(z)$ je všude uvnitř křivky \mathcal{C} i na této křivce holomorfní funkcí a $Q(z)$ má v bodě $z = \zeta$ jednoduchý kořen, přejde vztah (11.20) do podstatně jednodušší podoby

$$\text{Res} = \frac{P(\zeta)}{Q'(\zeta)}. \quad (11.21)$$

- Elementární použití reziduové věty si můžeme ukázat na jednoduchém příkladu,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{z^4} dz, \quad (11.22)$$

kde \mathcal{C} značí uzavřenou křivku, obsahující všechny singularity dané funkce $f(z)$. Daná funkce má ovšem jedinou singularitu v nulovém bodě komplexní roviny, o jejímž řádu (viz

rovnice (11.17)) se přesvědčíme rozvojem funkce $f(z)$ do tzv. *Laurentovy řady* (rozšíření Taylorova rozvoje pro komplexní čísla), jejíž obecný předpis má tvar

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n &= \\ &= \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (11.23)$$

kde $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$ (oba koeficienty mohou tedy být i nulové!). Část Laurentovy řady, kde $n \geq 0$, odpovídá holomorfní (analytické) funkci $g(z)$ v rovnici (11.17). Laurentův rozvoj funkce $f(z)$ bude

$$\frac{1}{z^4} \left(0 + z + 0 - \frac{z^3}{3!} + 0 + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \frac{0}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{0}{z^2} - \frac{1}{6z} + 0 + \frac{z}{120} - \dots, \quad (11.24)$$

singularita dané funkce je tedy 4. řádu. Z uvedeného rozvoje lze rovnou vyčíst reziduum funkce $f(z)$ v bodě nula, dané koeficientem $a_{-1} = -1/6$.

Stejného výsledku bychom docílili pomocí vzorce (11.20), tedy

$$\text{Res} = \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^3(\sin z)}{dz^3} = -\frac{1}{6}, \quad (11.25)$$

z rovnice (11.19) pak dostáváme

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{z^4} dz = -\frac{\pi i}{3}. \quad (11.26)$$

- Jako další příklad aplikace reziduové věty lze uvést např. následující jednoduchý integrál reálné funkce $f(x)$, která nemá žádné singularity (izolované póly) na reálné ose:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} \longrightarrow \oint_{\mathcal{C}_+} \frac{dz}{(1+z^2)^3} \quad \text{kde } \zeta_1, \zeta_2 = \pm i. \quad (11.27)$$

Budeme-li integrovat podél uzavřené křivky \mathcal{C}_+ obsahující část reálné osy a např. kladný izolovaný pól (v tomto případě díky jeho třetí mocnině jde o pól třetího řádu), bude podle vztahu (11.20) jeho reziduum

$$\text{Res} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{z-i}{(z-i)(z+i)} \right]^3 \right\} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{12}{(z+i)^5} = -\frac{3i}{16} \quad (11.28)$$

a dosazením do rovnice (11.19) dostáváme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{8}. \quad (11.29)$$

- ★ Příklad výpočtu integrálu holomorfní (analytické) funkce komplexní proměnné

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2 dz}{e^z - 1} = 0 \quad (11.30)$$

po uzavření, po částech hladké křivce \mathcal{C} (tzv. *Jordanova křivka*), bez použití reziduové věty (viz Cauchyův teorém, rovnice (11.15)), uvnitř uzavřené křivky se tedy nenacházejí

žádné singularity. Je zřejmé, že daná funkce bude mít singularity v bodech (x, y) , kde $e^z = e^{x+iy} = 1$, což splňují všechny body $(0, 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$ (viz Eulerova identita v příkladu 9.7). Pro řešení tohoto integrálu uvažujme obdélník s vrcholy (zapsanými ve tvaru komplexních čísel v algebraickém tvaru) $0, R, R + 2\pi i$ a $2\pi i$. Protože v prvním a posledním z těchto vrcholů se nacházejí singularity zadané funkce, musíme se těmito body vyhnout pomocí „malých“ čtvrtkružnic s poloměrem ϵ (viz obrázek 11.1). Tento poloměr ϵ můžeme považovat za absolutní hodnotu prvků komplexní funkce (čísel) na těchto kružnicích (vzhledem ke středům těchto kružnic).

Komplexní funkce může být tedy v tomto případě zapsána jako $z = x + iy$ na přímých částech (úsečkách) a $z = \epsilon e^{i\phi} + x_0 + iy_0$ na čtvrtkružnicích (kde $x_0 + iy_0$ jsou středy příslušných čtvrtkružnic), a tedy $dz = dx + i dy$, $dz = i\epsilon e^{i\phi} d\phi$, můžeme tak celou rovnici (11.30) pro uzavřenou křivku rozepsat jako

$$\int_{\epsilon}^R \frac{x^2}{e^x - 1} dx + \int_0^{2\pi} \frac{(R + iy)^2}{e^{R+iy} - 1} i dy + \int_R^{\epsilon} \frac{(x + 2\pi i)^2}{e^{x+2\pi i} - 1} dx + \int_0^{-\pi/2} \frac{(\epsilon e^{i\phi} + 2\pi i)^2}{e^{\epsilon e^{i\phi} + 2\pi i} - 1} i\epsilon e^{i\phi} d\phi + \int_{2\pi-\epsilon}^{\epsilon} \frac{(iy)^2}{e^{iy} - 1} i dy + \int_{\pi/2}^0 \frac{(\epsilon e^{i\phi})^2}{e^{\epsilon e^{i\phi}} - 1} i\epsilon e^{i\phi} d\phi = 0. \quad (11.31)$$

Dále přejdeme v mezích R a ϵ k limitním hodnotám $R \rightarrow +\infty$ a $\epsilon \rightarrow 0^+$, druhý a poslední integrál v rovnici (11.31) tak budou rovny nule a čtvrtý integrál bude roven $2i\pi^3$. Dostáváme tak

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx - \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 4\pi i x - 4\pi^2}{e^x - 1} dx + 2i\pi^3 + \int_0^{2\pi} \frac{y^2}{e^{iy} - 1} i dy = 0. \quad (11.32)$$

Poslední integrál v rovnici (11.32) rozdělíme na reálnou a imaginární část pomocí jeho převedení na goniometrický tvar a rozšíření výrazem, komplexně sdruženým k jeho jmenovateli,

$$\int_0^{2\pi} \frac{y^2}{e^{iy} - 1} i dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{y^2 \sin y}{1 - \cos y} dy - \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} y^2 dy. \quad (11.33)$$

Protože se vzájemně zruší i první integrál v rovnici (11.32) s prvním členem ve druhém integrálu, můžeme rovnici (11.32) po dosazení rovnice (11.33) přepsat do tvaru

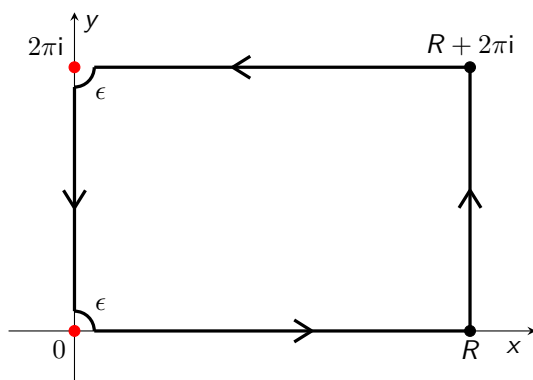
$$4\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{y^2 \sin y}{1 - \cos y} dy + i \left(2\pi^3 - 4\pi \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} y^2 dy \right) = 0. \quad (11.34)$$

Aby byla splněna rovnice (11.30), musí se rovnat nule jak její reálná, tak imaginární část. Z této podmínky pro imaginární část rovnice (11.34) tak můžeme například snadno vyjádřit hodnotu integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}. \quad (11.35)$$

Analogickým způsobem bychom například pomocí takto provedeného integrálu funkce komplexní proměnné

$$\oint_C \frac{z^4 dz}{e^z - 1} = 0, \quad (11.36)$$



Obrázek 11.1: Schéma průběhu křivky \mathcal{C} pro řešení rovnice (11.30). První dvě singularity ($k = 0, k = 1$) jsou vyznačené červenými body.

s využitím řešení integrálu v rovnici (11.35), získali hodnotu integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}. \quad (11.37)$$

Integrály tohoto typu mají zvláštní význam v termodynamice a statistické fyzice, například při řešení Planckovy funkce, výpočtech termodynamických potenciálů, atd.

Problematika funkce komplexní proměnné je samozřejmě oblastí nesmírně rozsáhlou, zde se jedná pouze o její zcela elementární a maximálně stručný „nástin“. Pro další studium doporučuji uvedenou literaturu a příslušné kurzy s tímto tématem související.

• Příklady:

11.4 Ověřte, jestli mohou být následující komplexní funkce $f(z) = f(x + iy)$ holomorfní na otevřených podmnožinách komplexní roviny:

- | | |
|--|-----|
| (a) $3y - 3xi$ | ano |
| (b) $3x^2 + 3y + 6xyi$ | ne |
| (c) $z^2 + \ln z + 1$ | ano |
| (d) $z^3 + 5z - \sin z$ | ano |
| (e) $ z^2 + y $ | ne |
| (f) $\frac{z - 1}{z + 1}$ | ano |
| (g) $\sqrt{z + 1 + i}$ | ano |
| (h) $\exp(-iz^2)$ | ano |
| (i) $\exp\left[\frac{(z + 1)^2}{i}\right]$ | ano |

$$(j) \ln \left(\frac{z+1}{i} \right) \quad \text{ano}$$

11.5 Nalezněte holomorfní funkce komplexní proměnné $f(z)$, pokud je zadaná pouze $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ nebo pouze $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$:

$$(a) u = x e^{3y} \quad \text{holomorfní funkce } f(z) \text{ neexistuje}$$

$$(b) u = x^2 + 3x - y^2 + 5y \quad f(z) = z^2 + 3z - 5iz + C$$

$$(c) u = e^x (\cos y + 2 \sin y) \quad f(z) = (1 - 2i) e^z + C$$

$$(d) u = \sin(2x) \cosh(2y) \quad f(z) = \sin 2z + C$$

$$(e) u = x^2 - y^2 + \sin(x) \cosh(y) \quad f(z) = z^2 + \sin z + C$$

$$(f) u = x^3 - 3xy^2 + \ln |z| \quad f(z) = z^3 + \ln z + C, z \neq 0$$

$$(g) u = x - \frac{x}{x^2 + y^2} \quad f(z) = z - \frac{1}{z} + C, z \neq 0$$

$$(h) v = y - \sin(x) \sinh(y) \quad f(z) = z + \cos z + C$$

$$(i) v = x + \sinh(x) \sin(y) \quad f(z) = iz + \cos(iz) + C$$

11.6 Pomocí reziduové věty vypočítejte následující integrály (kde \mathcal{C} značí uzavřenou křivku obsahující všechny singularity dané funkce $f(z)$, \mathcal{C}_+ značí uzavřenou křivku obsahující pouze jednu libovolnou singularitu dané funkce):

$$(a) \oint_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^2 - 1} dz \quad 2\pi i$$

$$(b) \oint_{\mathcal{C}_+} \frac{z}{z^2 - 1} dz \quad \pi i$$

$$(c) \oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{z^2 + 5} dz \quad 2\pi i \frac{\sinh \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$(d) \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz \quad 2\pi i \sin(1)$$

$$(e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \quad \pi$$

$$(f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 2} dx \quad -\frac{\pi}{e} \sin(1)$$

$$(g) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{6x^2 + 6x + 3} dx \quad \frac{\pi}{3\sqrt{e}} \cos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(h) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x + 3} \quad \left(\text{viz příklad 1.69}\right) \quad \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 dx}{(x^2 + 4)^4} \qquad \frac{5\pi}{512}$$

11.7 ★ Pomocí reziduové věty nebo integrací po uzavřené křivce vypočítejte následující komplexní nebo reálné integrály (\mathcal{C} je jednotková kružnice se středem v bodě $(0, 0)$ komplexní roviny, orientovaná v matematicky kladném směru, \mathcal{C}_+ je jednotková půlkružnice v kladné polorovině komplexní roviny, kde $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, rovněž se středem v bodě $(0, 0)$ komplexní roviny, orientovaná v matematicky kladném směru):

$$(a) \oint_{\mathcal{C}} z^2 dz \qquad 0$$

$$(b) \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz \qquad 2\pi i$$

$$(c) \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z^5} dz \qquad 0$$

$$(d) \oint_{\mathcal{C}_+} \frac{1}{|z|} dz \qquad -2$$

$$(e) \oint_{\mathcal{C}_+} \frac{z}{z^*} dz \qquad -\frac{2}{3}$$

$$(f) \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{2z^2 - 7iz - 3} \qquad -\frac{2\pi}{5}$$

$$(g) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta}, \quad a > 1 \text{ je konstanta} \qquad \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

$$(h) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx \qquad \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + 1} dx, \quad a \in \mathbb{R} \text{ je konstanta} \qquad \pi e^{-|a|}$$

$$(j) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \qquad \pi$$

$$(k) \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 + 9)^2} dx \qquad -\frac{\pi}{6} e^{-3}$$

Kapitola 12

Kombinatorika, počet pravděpodobnosti a základy statistiky¹

12.1 Kombinatorika

Kombinatorika je jednou z nejstarších matematických disciplín, která se zabývá vnitřní strukturou tzv. *konfigurací* diskretních prvků (například čísel nebo jiných objektů), jejich existencí, hledáním počtu různých typů těchto prvků v závislosti na daných podmínkách, atd. Typickými příklady takových konfigurací jsou *kombinace*, *permutace* a *variace*. Kombinatorické principy tvoří matematický základ definice tzv. *statistických rozdělání*, používaných k popisu chování fyzikálních systémů například v kvantové mechanice, statistické fyzice, atd.

- **Kombinace bez opakování:**

Počet k -členných kombinací (kombinací k -té třídy) bez opakování z n prvků ($k, n \in \mathbb{N} \cup 0$), tj. každý prvek se v dané kombinaci může vyskytovat pouze jednou, je dán vztahem

$$C(k, n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}, \quad (12.1)$$

kdy poslední výraz v závorce, tzv. *kombinační číslo*, čteme „ n nad k “. Kombinační číslo je také určujícím faktorem v tzv. *binomické větě*,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad (12.2)$$

pomocí níž lze n -tou mocninu dvojčlenu $x + y$ rozložit na součet $n + 1$ členů.

Kombinace bez opakování je matematickým základem tzv. *Fermiho-Diracovy statistiky*, popisující systémy složené z tzv. *fermionů*, tedy ze vzájemně nerozlišitelných kvantových částic s *antisymetrickou vlnovou funkcí* a *poločíselným spinem* (například protonů, neutronů, elektronů, neutrin, atd.). Typickým jednoduchým příkladem může být počet různých dvojic, které lze vytvořit z celkového počtu 30 lidí, kde podmínka „bez opakování“ vyplývá z faktu, že každý určitý jedinec se v každé dvojici může vyskytovat pouze jednou. Zároveň lze na kombinaci pohlízet jako na variaci kdy tzv. *nezáleží na pořadí* prvků, tj. dvojice $A-B$ je totožná s dvojicí $B-A$. Výsledkem je číslo 435.

¹Doporučená literatura k této kapitole: Kvasnica (2004), Musilová & Musilová (2006).

• **Kombinace s opakováním:**

Počet k -členných kombinací s opakováním z n prvků, tj. daný prvek se v dané kombinaci může vyskytovat vícekrát (přičemž opět nezáleží na pořadí prvků), je dán vztahem

$$C'(k, n) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}. \quad (12.3)$$

Kombinace s opakováním je matematickým základem tzv. *Boseho-Einsteinovy statistiky*, popisující systémy složené z tzv. *bosonů*, tedy ze vzájemně nerozlišitelných kvantových částic se *symetrickou vlnovou funkcí* a *celočíslným spinem* (například fotonů, mezonů, gluonů, jader ${}^4\text{He}$, atd.).

Typickým příkladem může být počet různých způsobů, kterými lze koupit sadu osmi sazenic salátu, pokud mají v obchodě (v dostatečném množství) 6 různých druhů sazenic (v každé sadě se může kterýkoli z šesti druhů sazenic vyskytovat v libovolném počtu od 1 do 8). Výsledkem je číslo 1287.

• **Permutace bez opakování:**

Obecně definujeme permutaci jako uspořádanou n -tici prvků, kdy celkový počet prvků výběrové množiny je rovněž n . Pokud se tyto prvky v každé takové uspořádané n -tici nemohou opakovat, počet různých takových n -tic (permutací bez opakování) je dán vztahem

$$P(n) = n! \quad (12.4)$$

Příklad: kolik různých uspořádání, obsahujících vždy všechna písmena, existuje pro pětici písmen a, b, c, d, e ? Počet takových uspořádaných petic ($n = 5$) bez opakování je dán vztahem $P(5) = 5!$, celkový počet takových uspořádání (permutací) je tedy 120.

• **Permutace s opakováním:**

Pokud je mezi n prvky výběrové množiny k skupin, které mají postupně n_1, n_2, \dots, n_k stejných prvků, potom je počet tzv. permutací s opakováním dán vztahem

$$P'_{n_1, n_2, \dots, n_k}(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}, \quad \text{kdy} \quad n = \sum_{i=1}^k n_i. \quad (12.5)$$

Příklad: kolik různých permutací existuje pro sedmiprvkovou množinu čtyř písmen s možným opakováním a, a, a, b, b, c, d , kdy první písmeno se zde vyskytuje třikrát a druhé písmeno dvakrát? Celkový počet takových permutací bude $7!/(3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!) = 420$.

Výraz (12.5) tvoří rovněž matematický základ zobecněné binomické věty (12.2) pro libovolný počet členů $x_1 + x_2 + \dots + x_m$, kdy pro tzv. *multinomický koeficient*

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \quad (12.6)$$

musí pro všechna $m \in \mathbb{N}$ a $k_i, n \in \mathbb{N} \cup 0$ opět platit $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Takto rozšířenou binomickou větu (12.2) potom zapíšeme jako tzv. *multinomickou větu* ve formě

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}, \quad (12.7)$$

kde součin m prvků $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$ lze zapsat pomocí symbolu pro násobení jako $\prod_{i=1}^m x_i^{k_i}$.

- **Variace bez opakování:**

Variaci definujeme obecně jako uspořádanou k -tici (tj. k -tici, ve které tzv. *záleží na pořadí* prvků), vybranou ze sady, obsahující n prvků. Pokud se tyto prvky v každé takové uspořádané k -tici nemohou opakovat, počet různých takových k -tic, $k \leq n$ (variací bez opakování), je dán vztahem

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (12.8)$$

Typickým příkladem může být následující úloha: kolik barevných trikolór lze vytvořit z celkem šesti barev? Variace bez opakování v tomto případě vyplývá z definice trikolóry (pokud by se některá ze tří barev opakovala, nepůjde o trikolóru). Zároveň záleží na pořadí jednotlivých prvků, tj. například trikolóra s pořadím barev *červená-modrá-zelená* je jiná trikolóra než trikolóra s pořadím barev *zelená-modrá-červená*. Celkový počet trikolór tedy bude $6!/3! = 120$.

- **Variace s opakováním:**

Počet uspořádaných k -tic (kdy opět záleží na pořadí prvků) s opakováním z n prvků, tj. kdy se daný prvek v dané k -tici může vyskytovat vícekrát, je dán vztahem

$$V'(k, n) = n^k. \quad (12.9)$$

Typický příklad: kolik dvojciferných čísel lze vytvořit z číslic 1, 2, 3, 4, 5? Opět zde záleží na pořadí jednotlivých prvků, tj. například číslo 21 je jiné číslo než číslo 12, zároveň ovšem musíme zahrnout i čísla 11, 22, atd., kde se číslice opakují. Celkový počet takových dvojciferných čísel bude $5^2 = 25$.

- **Příklady:**

12.1 Kolik kružnic je definováno 12 body, ležícími v jedné rovině, pokud žádné 3 body neleží v jedné přímce?

220

12.2 Určete, kolika způsoby lze ze sedmi mužů a čtyř žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou právě dvě ženy.

210

12.3 V bedně je 54 výrobků, z nichž 21 je první jakosti, 27 je druhé jakosti a zbytek je vadných. Kolika způsoby lze vybrat skupinu 6 výrobků tak, aby obsahovala 3 výrobky první jakosti, 2 druhé jakosti a jeden vadný výrobek?

147 420

12.4 Hokejové mužstvo má celkem 24 hráčů: 13 útočníků, 8 obránců a 3 brankáře. Kolik různých sestav může trenér vytvořit, jestliže sestava má mít 3 útočníky, 2 obránce a 1 brankáře?

6 552

12.5 Kolik prvků budeme potřebovat, abychom vytvořili šestkrát více kombinací čtvrté třídy (bez opakování prvků) než kombinací druhé třídy?

11

12.6 Trenér curlingu má k dispozici sedm hráčů: Aleše, Bedřicha, Cyrila, Davida, Emila, Filipa a Gustava. Má sestavit čtyřčlenné družstvo.

- (a) kolik družstev může sestavit,
- (b) kolik družstev může sestavit, pokud z trojice Aleš, Bedřich a Cyril hraje jen jeden,
- (c) kolik družstev může sestavit, pokud z trojice Aleš, Bedřich a Cyril hrají nejvýše dva a z dvojice David a Emil jeden nehraje,
- (d) kolik družstev může sestavit, pokud z trojice Aleš, Bedřich a Cyril hrají nejvýše dva a nehraje současně Filip a Gustav.

(a) 35

(b) 12

(c) 18

(d) 21

12.7 Kolik existuje pěticiferných čísel?

90 000

12.8 Kolik čísel lze vytvořit ze sady neopakujících se číslic 7, 3, 5, 2, 4, 8, 1, 9 tak, aby čísla obsahovala letopočet objevení Ameriky?

1 680

12.9 Na Kypru se poznávací značky na autech skládají z bloku 3 písmen, za kterým následuje čtyřciferné číslo. První část se vybírá pouze ze čtrnácti písmen A, B, E, H, I, J, K, M, N, P, T, X, Y, Z.

- (a) Kolik existuje takových poznávacích značek?
- (b) Kolik značek má každé písmeno jiné?
- (c) V kolika značkách je na prvním místě samohláska?
- (d) V kolika značkách je samohláska pouze na 1. a 3. pozici?

(a) $14^3 \cdot 9 \cdot 10^3 = 24\,696\,000$

(b) $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 10^3 = 19\,656\,000$

(c) $4 \cdot 14^2 \cdot 9 \cdot 10^3 = 7\,056\,000$

(d) $4^2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 10^3 = 1\,440\,000$

12.10 Kolika způsoby můžeme sestavit z patnácti lidí libovolně velkou pracovní skupinu? Ve skupině může být 1 až 15 lidí.

32 767

12.11 V nádobě se nachází 10^5 částic ideálního plynu. Jaká je pravděpodobnost, že se všechny zcela náhodně se pohybující částice ocitnou v levé polovině nádoby, pokud částicemi budou

- (a) molekuly NH_3 ?
 (b) jádra ${}^4\text{He}$?

- (a) 2^{-10^5}
 (b) $(10^5 + 1)^{-1}$

12.12 Uvažujme $k = 3$ mince, kdy každá může nabývat dvou „hodnot“, tj. *panna* nebo *orel*. Je zřejmé, že pokud hodíme všemi mincemi zároveň, může nastat celkem $n = 8$ možných výsledků: PPP, PPO, POP, OPP, OOP, OPO, POO, OOO. Každý jednotlivý výsledek nazveme *mikrostavem*, který zohledňuje stav každé mince (nebo částice, pokud půjde o obecný fyzikální systém). Pokud budeme rozlišovat pouze počet hozených panen nebo orlů, specifikujeme tzv. *makrostav* (označme ho například E_i), v tomto případě tedy máme 4 možné makrostavy: 3P, 2P+1O, 1P+2O, 3O. Počet mikrostavů, tvořících makrostav, nazýváme *statistická váha* (násobnost mikrostavu) $W(E_i)$. Pro 4 makrostavy dostáváme v našem případě $W_0 = 1$, $W_1 = 3$, $W_2 = 3$, $W_3 = 1$, kde pořadová čísla jednotlivých makrostavů odpovídají počtu např. panen v daném makrostavu. Pravděpodobnost výskytu určitého makrostavu $P(E_i)$ je dána podílem jeho statistické váhy $W(E_i)$ a celkového počtu mikrostavů n . Entropie S určitého makrostavu E_i bude $S = \ln W$. Vypište počet možných mikrostavů a pravděpodobnosti jednotlivých makrostavů v případě, že házíme

- (a) čtyřmi mincemi
 (b) dvaceti mincemi, který makrostav je nejpravděpodobnější?
 (c) jaká je pravděpodobnost makrostavu s 12 pannami a 8 orly?
 (d) sto mincemi, který makrostav je nejpravděpodobnější?
 (e) napište entropii makrostavů E_0 , E_1 , E_{\max}

(a) $n = 16$, $P_0 = 1/16$, $P_1 = 1/4$, $P_2 = 3/8$, $P_3 = 1/4$, $P_4 = 1/16$

(b) $n = 2^{20}$, $P_0 = 1/2^{20}$, $P_1 = 20/2^{20}$, $P_2 = 190/2^{20}$, ..., $P(E_i) = \frac{20!}{i!(20-i)!2^{20}}$, ..., $P_{20} = 1/2^{20}$, $P_{\max} = P_{10}$

(c) přibližně 0,12

(d) $n = 2^{100}$, $P_0 = 1/2^{100}$, $P_1 = 100/2^{100}$, $P_2 = 4950/2^{100}$, ..., $P(E_i) = \frac{100!}{i!(100-i)!2^{100}}$, ..., $P_{100} = 1/2^{100}$, $P_{\max} = P_{50}$

(e) 0 , $\ln 100 \approx 4,6$, $\ln 100! - 2 \ln 50! \approx 66,78$ - nejpravděpodobnější makrostav má tedy nejvyšší entropii, nejméně pravděpodobný nejnižší (nulovou)

12.13 Mějme 3 částice ideálního plynu a 5 „příhrádek“ - kvantových „krabic“, označme je například a , b , c , d , e . Částice mohou být do jednotlivých příhrádek rozmístěny libovolným způsobem, odpovídajícím ovšem jejich typu (například není možné aby více fermionů bylo v jedné příhrádce). Každou jednotlivou variaci, případně kombinaci, systému částic označme jako mikrostav. Jako „makrostav“ označme soubor mikrostavů, kdy jsou buď všechny tři částice v jedné příhrádce (označme jej jako „makrostav“ „3“), nebo jsou dvě

částice v jedné přihrádce a třetí v jiné (označme je jako „makrostav“ „2/1“), nebo je každá částice v jedné samostatné přihrádce (označme je jako „makrostav“ „1/1/1“). V uvedeném systému se tedy mohou vyskytovat nejvýše 3 „makrostavy“.

- kolik mikrostavů může nastat postupně pro molekuly NH_3 , jádra ^4He , protony?
- kolik „makrostavů“ může nastat postupně pro molekuly NH_3 , jádra ^4He , protony?
- jaká je pravděpodobnost výskytu mikrostavu, kdy všechny tři částice budou v jedné určité přihrádce (například a), postupně pro molekuly NH_3 , jádra ^4He , protony?
- jaká je pravděpodobnost výskytu mikrostavu, kdy každá ze tří částic bude samostatně v přihrádkách a , c , e , postupně pro molekuly NH_3 , jádra ^4He , protony?
- jaká je pravděpodobnost výskytu jednotlivých „makrostavů“ postupně pro molekuly NH_3 , jádra ^4He , protony?

(a) 125, 35, 10

(b) 3, 3, 1

(c) $1/125$, $1/35$, 0

(d) $6/125$, $1/35$, $1/10$

(e) „makrostav“ „3“: $1/25$, $1/7$, 0
 „makrostav“ „2/1“: $12/25$, $4/7$, 0
 „makrostav“ „1/1/1“: $12/25$, $2/7$, 1

12.2 Počet pravděpodobnosti a základy statistiky²

Rozdělení pravděpodobnosti *diskrétní* náhodné veličiny X vyjadřuje tzv. pravděpodobnostní funkce $P(X)$ s hodnotami pravděpodobnosti $p(x_i) = p_i$, kde $\sum_i p_i = 1$. Rozdělení pravděpodobnosti *spojité* náhodné veličiny X udává funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti (hustoty pravděpodobnosti) $f(x)$, pro kterou platí $\int_{\Omega} f(x) dx = 1$, kde Ω je definiční obor veličiny X . Pro hodnoty $x \notin \Omega$ platí $f(x) = 0$. Významná rozdělení pravděpodobnosti jsou:

- Rovnoměrné* rozdělení pravděpodobnosti *diskrétní* i *spojité* náhodné veličiny X , které přiřazuje všem jejím hodnotám stejnou pravděpodobnost. Rovnoměrné rozdělení má ve všech bodech daného intervalu $\langle a, b \rangle$, konstantní hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle \\ 0 & \text{pro } x \notin \langle a, b \rangle \end{cases}. \quad (12.10)$$

- Poissonovo* rozdělení pravděpodobnosti *diskrétní* náhodné veličiny X , které lze vyjádřit pomocí zvoleného parametru $\lambda > 0$ jako

$$p_i = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}. \quad (12.11)$$

²V této kapitole jsou použité příklady z knihy: Musilová & Musilová (2006).

- *Normální* (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti *spojité* náhodné veličiny X , které je definováno hustotou pravděpodobnosti ve tvaru tzv. Gaussovy funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (12.12)$$

kde parametr μ znamená střední hodnotu veličiny X , parametr σ jeho směrodatnou odchylku (viz dále).

Ve statistické fyzice se také střední počet rozlišitelných částic (např. molekul) ve stavu s energií E určuje pomocí tzv. *Maxwellovy-Boltzmannovy* rozdělovací funkce. Pro nerozlišitelné částice platí tzv. *Fermiho-Diracovo* rozdělení pro fermiony (elektrony, protony, neutrina, atd.) a *Boseho-Einsteinovo* rozdělení pro bosony (např. fotony). V matematické statistice se často používá tzv. *Studentovo* rozdělení (viz např. Pánek, 2001), atd. V návaznosti na rozdělení pravděpodobnosti můžeme určit celou řadu *statistických nástrojů*, pomocí nichž můžeme analyzovat náhodnou veličinu X (reprezentující například soubor naměřených hodnot). Mezi nejdůležitější z nich patří:

- *Váha* - v případě *diskrétní* náhodné veličiny X s jednotlivými hodnotami x_i zavádíme tzv. váhu w_i , kterou můžeme zpravidla stanovit na základě tzv. *vnitřních nejistot* (chyb) δx_i hodnot x_i (například chyby měření, atd.), tedy na základě relace

$$w_i \sim \frac{1}{\delta x_i^2}. \quad (12.13)$$

Dále zavedeme tzv. sumu vah S_w a tzv. střední váhu w_s ,

$$S_w = \sum_{i=1}^N w_i, \quad w_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i = \frac{S_w}{N}, \quad (12.14)$$

kde N je celkový počet diskrétních hodnot x_i . Mezi váhami a hodnotami pravděpodobnosti existuje tedy volná relace - pokud suma vah $S_w = 1$, potom $w_i = p_i$. Obdobným způsobem můžeme v případě *spojité* náhodné veličiny zavést tzv. váhovou funkci $w(x)$, jejíž „suma“ bude dána jako $\int_{\Omega} w(x) dx$. Je tedy opět zřejmé, že pokud tento integrál bude normován (bude roven jedné) bude platit $w(x) = f(x)$, váhová funkce se takto stává hustotou pravděpodobnosti.

- *Střední hodnota* (aritmetický průměr), která se obvykle značí \bar{x} , $\langle x \rangle$ nebo také μ . V případě diskrétní náhodné veličiny X bude střední hodnota definována jako suma všech hodnot x_i veličiny X dělená jejich počtem nebo jako suma násobků všech hodnot veličiny X s příslušnými hodnotami pravděpodobnostní funkce, tedy

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i p_i. \quad (12.15)$$

V případě použití druhého vztahu mluvíme také o tzv. očekávané hodnotě, značené $E(X)$, resp. o váženém aritmetickém průměru. Jemný rozdíl mezi těmito pojmy závisí na definici prvku x_i veličiny X , případně na způsobu volby tzv. statistické váhy. Tzv. *váhouvanou* střední hodnotu (váhovaný aritmetický průměr) stanovíme jako

$$\langle x \rangle = \frac{1}{S_w} \sum_{i=1}^N x_i w_i. \quad (12.16)$$

Střední hodnotu (neváhouanou a váhouanou) *spojité* náhodné veličiny X stanovíme jako

$$\langle x \rangle = E(X) = \int_{\Omega} x f(x) dx, \quad \langle x \rangle = \frac{\int_{\Omega} x w(x) dx}{\int_{\Omega} w(x) dx}. \quad (12.17)$$

V případě dále uváděných statistických nástrojů je stanovení jejich váhovaných podob zcela obdobné.

- *Rozptyl a směrodatná odchylka* jsou nejčastěji označovány jako $D(X)$, $\text{var}(X)$, případně $\sigma^2(X)$ (rozptyl) a $\sigma(X)$ (směrodatná odchylka). Rozptyl (disperze) je definován jako střední hodnota druhých mocnin odchylek od střední hodnoty (aritmetického průměru) veličiny X , směrodatná odchylka je odmocninou z rozptylu. Pro *diskrétní* náhodnou veličinu X se stejnou váhou (pravděpodobností) všech hodnot x_i je rozptyl definován jako

$$D(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (12.18)$$

V případě různých pravděpodobností diskrétních hodnot náhodné veličiny X bude rozptyl určen vztahem

$$D(X) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i - \langle x \rangle)^2 = -\langle x \rangle^2 + \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot p_i. \quad (12.19)$$

Pro *spojitou* náhodnou veličinu X je rozptyl definován vztahem

$$D(X) = \int_{\Omega} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx = -\langle x \rangle^2 + \int_{\Omega} x^2 f(x) dx. \quad (12.20)$$

Pro směrodatnou odchylku obecně platí $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

- *Nejpravděpodobnější hodnotu* $P_{\max}(X)$ pro *diskrétní* náhodnou veličinu X stanovíme jako hodnotu x_i s nejvyšší hodnotou pravděpodobnostní funkce p_i , tedy $P_{\max}(X) = (x_i, \max(p_i))$. V případě *spojité* náhodné veličiny X určíme nejpravděpodobnější hodnotu $P_{\max}(X)$ jako maximum funkce hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ v definičním oboru Ω veličiny X , tedy $P_{\max}(X) = \max(f(x))$ pro $x \in \Omega$.
- *Medián* ($\tilde{x}_{0,5}$) a *čtvrtkvantily* ($\tilde{x}_{0,25}$, $\tilde{x}_{0,75}$, také nazývané dolní a horní kvartil) jsou hodnoty x_i , v nichž je monotónně uspořádaný statistický soubor rozdělen na příslušné množství stejně početných částí. Medián tedy dělí statistický soubor na dvě stejně početné poloviny. Výhodou mediánu oproti střední hodnotě je jeho neovlivnitelnost extrémně vychýlenými hodnotami. Například u souboru $\{1, 2, 2, 3, 27\}$ medián $\tilde{x}_{0,5} = 2$, střední hodnota $\langle x \rangle = 7$. V případě *spojité* náhodné veličiny X určíme medián a čtvrtkvantily (případně jakkoli jinak definované kvantily) z integrálních rovnic

$$\int_{-\infty}^{\tilde{x}_{0,5}} f(x) dx = \frac{1}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\tilde{x}_{0,25}} f(x) dx = \frac{1}{4}, \quad \int_{-\infty}^{\tilde{x}_{0,75}} f(x) dx = \frac{3}{4}. \quad (12.21)$$

- *Distribuční funkce* $F(x)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny X s daným rozdělením pravděpodobnosti bude menší nebo rovna x . V případě *diskrétní* náhodné veličiny X bude distribuční funkce $F(x)$ daná předpisem

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i, \quad (12.22)$$

bude tedy v bodech x_i nespojitá a mezi body x_i konstantní. Pro *spojitou* náhodnou veličinu X můžeme distribuční funkci $F(x)$ zapsat jako integrál funkce hustoty pravděpodobnosti,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (12.23)$$

Každá distribuční funkce $F(x)$ je neklesající a zprava spojitá, její asymptotické vlastnosti lze vyjádřit jako $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, pro libovolnou dvojici x_1, x_2 platí $P(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

★ *Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení rychlostí*: Předpokládejme *normální rozdělení* rychlostí $v_x \equiv v$ jednotlivých částic (molekul), ve smyslu rovnice (12.12), ve tvaru

$$f(v) = a e^{-bv^2}, \quad (12.24)$$

s prozatím neznámými konstantami a a b , kde ze symetrie Gaussovy funkce pro kladné a záporné rychlosti můžeme předpokládat střední hodnotu rychlostí μ podle rovnice (12.12) jako nulovou. V trojrozměrném případě musí tedy platit

$$\int_{\Omega} f(v) d^3v = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-Bv^2} dv_x dv_y dv_z = 1, \quad (12.25)$$

kde $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Protože rozdělení rychlostí (pokud je látka jako celek v klidu) je v každém místě vektorového prostoru rychlostí izotropní (stejně v každém směru), můžeme s výhodou přejít do sférického systému (sférického rychlostního prostoru), kde

$$dv_x dv_y dv_z = v^2 \sin \theta dv d\theta d\phi \quad (12.26)$$

(viz analogie s transformací souřadnic v kapitole 4). Rovnici (12.25) můžeme tedy přepsat do jednorozměrného tvaru

$$P(v) = \int_{\Omega} f(v) dv = 4\pi A \int_0^{\infty} v^2 e^{-Bv^2} dv = 1, \quad (12.27)$$

kde v je radiální složka vektoru rychlosti ve sférickém rychlostním prostoru, tedy vlastně velikost rychlosti. Integraci rovnice (12.27) provedeme nejlépe pomocí substituce $Bv^2 = x$,

$$1 = \frac{4\pi A}{2B^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-x} \sqrt{x} dx. \quad (12.28)$$

Samotný integrál v rovnici (12.28) je tzv. *Gama funkce* (zobecněný faktoriál, viz například [Arfken & Weber \(2005\)](#)), definovaná jako

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad (12.29)$$

půjde zde tedy o *funkcionál* $\Gamma(\frac{3}{2})$ (funkcionál je v matematické analýze definován jako zobrazení, které prvkům *prostoru funkcí* přiřazuje reálné nebo komplexní číslo). Pro funkci Γ zjevně platí $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$, lze tedy stanovit $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}/2$, přičemž nalezení hodnoty funkcionálu $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ lze provést obdobným způsobem jako nalezení hodnot integrálů v příkladu 1.97. Z rovnice (12.28) tak dostáváme

$$A = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{3/2}. \quad (12.30)$$

Protože střední kinetická energie částice, pohybující se rychlostí v , je $\langle E_k \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT$ (viz např. Halliday et al. (2001), kapitola 20.5), můžeme napsat rovnici

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m \int_{\Omega} v^2 f(v) dv = 2\pi m \left(\frac{B}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 e^{-Bv^2} dv, \quad (12.31)$$

jejímž řešením, obdobně jako pomocí rovnice (12.28) avšak s použitím funkcionálu $\Gamma(\frac{5}{2})$, dostáváme konstantu B ,

$$B = \frac{m}{2kT}. \quad (12.32)$$

Explicitní tvar Maxwellova-Boltzmannova rozdělení rychlostí ve smyslu rovnice (12.27) tedy bude

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad (12.33)$$

• **Příklady:**

12.14 Střelec provedl $N = 150$ výstřelů na terč, který je tvořen soustavou $n = 5$ mezikruží MK_i , $i = 1, \dots, 5$. Mezikruží MK_i přitom zasáhl N_i -krát, kde $N_1 = 15$, $N_2 = 20$, $N_3 = 35$, $N_4 = 45$, $N_5 = 35$. Za zásah mezikruží MK_i získal i bodů. Náhodnou veličinu X s diskrétním rozdělením definujeme jako počet bodů, získaných pro jeden náhodný výstřel. Určete:

- rozdělení $\{(x_i, p_i)\}$ veličiny X ,
- pravděpodobnost, že pro náhodný výstřel získá střelec alespoň I bodů, $I = 1, 2, 3, 4, 5$,
- střední hodnotu veličiny X ,
- směrodatnou odchylku veličiny X ,
- pravděpodobnost, že při výstřelu získá střelec počet bodů v intervalu $i \in \langle 2, 4 \rangle$.

(a) $\left\{ \left(1, \frac{1}{10}\right), \left(2, \frac{2}{15}\right), \left(3, \frac{7}{30}\right), \left(4, \frac{3}{10}\right), \left(5, \frac{7}{30}\right) \right\}$

(b) $P_1 = 1, P_2 = \frac{9}{10}, P_3 = \frac{23}{30}, P_4 = \frac{8}{15}, P_5 = \frac{7}{30}$

(c) $3,4\bar{3}$

(d) $1,26$

(e) $\frac{2}{3}$

12.15 Na letištních záchodech jsou čtyři kabinky. Je dána distribuční funkce obsazení kabin: $F(0) = 0,1$, $F(1) = 0,35$, $F(2) = 0,6$, $F(3) = 0,95$, $F(4) = 1$. Určete:

- rozdělení náhodné veličiny X , odpovídající počtu obsazených kabin,
- střední hodnotu veličiny X a její rozptyl,
- pravděpodobnost, že budou obsazeny alespoň dvě kabinky.

(a) $\{(0; 0,1), (1; 0,25), (2; 0,25), (3; 0,35), (4; 0,05)\}$

(b) 2; 1,2

(c) 0,65

12.16 Je dána funkce $f(x) = k \cdot x$ pro $0 \leq x \leq 2$ a $f(x) = 0$ v ostatních případech. Určete:

(a) konstantu k tak, aby funkce byla hustotou pravděpodobnosti,

(b) střední hodnotu a rozptyl,

(c) nejpravděpodobnější hodnotu,

(d) medián a čtvrtkvantily $\tilde{x}_{0,25}, \tilde{x}_{0,75}$,

(e) distribuční funkci.

(a) $k = \frac{1}{2}$

(b) $\frac{4}{3}, \frac{2}{9}$

(c) 2

(d) $\tilde{x}_{0,5} = \sqrt{2}, \tilde{x}_{0,25} = 1, \tilde{x}_{0,75} = \sqrt{3}$

(e) $F(x) = 0 \forall x < 0, F(x) = \frac{1}{4}x^2 \forall 0 \leq x \leq 2, F(x) = 1 \forall x > 2$

12.17 Je dána funkce $f(x) = \frac{k}{(x+1)^2}$ pro $x \geq 0$ a $f(x) = 0$ pro $x < 0$. Určete:

(a) konstantu k tak, aby funkce byla hustotou pravděpodobnosti,

(b) distribuční funkci,

(c) nejpravděpodobnější hodnotu, medián a čtvrtkvantily $\tilde{x}_{0,25}, \tilde{x}_{0,75}$.

(a) $k = 1$

(b) $F(x) = 0 \forall x \leq 0, F(x) = \frac{x}{x+1} \forall x > 0$

(c) 0, $\tilde{x}_{0,5} = 1, \tilde{x}_{0,25} = \frac{1}{3}, \tilde{x}_{0,75} = 3$

12.18 Jsou dány funkce $f(x) = \frac{k}{x^2}$ pro $1 \leq x \leq 2$, $f(x) = 0$ v ostatních případech, $g(x) = c(x-x^2)$ pro $0 \leq x \leq 1$, $g(x) = 0$ v ostatních případech. Určete:

(a) konstanty k a c tak, aby funkce byly hustotami pravděpodobnosti,

(b) příslušné distribuční funkce,

(c) nejpravděpodobnější hodnotu, střední hodnotu, rozptyl a medián pro každé z rozdělení.

(a) $k = 2, c = 6$

- (b) $F_1(x) = 0 \forall x < 1, F_1(x) = 2 \frac{x-1}{x} \forall 1 \leq x \leq 2, F_1(x) = 1 \forall x > 2, F_2(x) = 0 \forall x < 0, F_2(x) = 3x^2 - 2x^3 \forall 0 \leq x \leq 1, F_2(x) = 1 \forall x > 1$
- (c) $f : 1, 2 \ln 2, 2 - 4 \ln^2 2, \frac{4}{3}, g : \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{20}, \frac{1}{2}$

12.19 Házíme dvěma kostkami. Náhodnou veličinou X označme součet bodů na obou kostkách při jednom hodu. Určete:

- (a) rozdělení veličiny X ,
- (b) distribuční funkci,
- (c) střední hodnotu, rozptyl a nejpravděpodobnější hodnotu,
- (d) pravděpodobnost, že součet bodů na kostkách bude ležet v intervalu $\langle 5, 7 \rangle$.

- (a) $\left\{ (1, 0), \left(2, \frac{1}{36} \right), \left(3, \frac{1}{18} \right), \left(4, \frac{1}{12} \right), \left(5, \frac{1}{9} \right), \left(6, \frac{5}{36} \right), \left(7, \frac{1}{6} \right), \left(8, \frac{5}{36} \right), \left(9, \frac{1}{9} \right), \left(10, \frac{1}{12} \right), \left(11, \frac{1}{18} \right), \left(12, \frac{1}{36} \right) \right\}$
- (b) $F(x) = 0 \forall x < 2, F(x) = \frac{1}{36} \forall x \in \langle 2, 3 \rangle, F(x) = \frac{1}{12} \forall x \in \langle 3, 4 \rangle, F(x) = \frac{1}{6} \forall x \in \langle 4, 5 \rangle, F(x) = \frac{5}{18} \forall x \in \langle 5, 6 \rangle, F(x) = \frac{5}{12} \forall x \in \langle 6, 7 \rangle, F(x) = \frac{7}{12} \forall x \in \langle 7, 8 \rangle, F(x) = \frac{13}{18} \forall x \in \langle 8, 9 \rangle, F(x) = \frac{5}{6} \forall x \in \langle 9, 10 \rangle, F(x) = \frac{11}{12} \forall x \in \langle 10, 11 \rangle, F(x) = \frac{35}{36} \forall x \in \langle 11, 12 \rangle, F(x) = 1 \forall x \geq 12$
- (c) 7; 5,83; 7
- (d) $\frac{5}{12}$

12.20 Dokažte, že

- (a) veličina μ v rovnici (12.12) je zároveň nejpravděpodobnější hodnotou $P_{\max}(x)$ i střední hodnotou $\langle x \rangle$,
- (b) veličina σ v rovnici (12.12) je rovna směrodatné odchylce veličiny x .

(a) Pomocí vztahu (12.17)

(b) Pomocí vztahu (12.20) a definice směrodatné odchylky

12.21 Pomocí Maxwelllova-Boltzmannova rozdělení rychlostí (rovnice (12.33)) určete:

- (a) nejpravděpodobnější rychlost $P_{\max}(v)$,
- (b) střední rychlost $\langle v \rangle$,
- (c) střední kvadratickou rychlost $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$.

(a) $P_{\max}(v) = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

$$(b) \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$(c) \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Příloha A

Laplaceova transformace ★

Laplaceova transformace je jednou ze základních integrálních transformací, která funkci reálné proměnné (zpravidla vyjadřující čas t) přiřazuje funkci komplexní proměnné (komplexního frekvenčního parametru) $s = \sigma + i\omega$, kde σ a ω jsou reálná čísla. S výhodou se využívá zejména v oblastech matematiky spojených s kmity, oscilacemi a vlnami.

A.1 Definice a přehled elementárních transformací

Uvažujme spojitou nebo po částech spojitou funkci $f(t)$ reálné proměnné $t \geq 0$ (vzor nebo originál), potom její Laplaceův obraz $F(s)$, značený často také jako $\mathcal{L}\{f(t)\}$, je definován jako

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (\text{A.1})$$

Inverzní Laplaceova transformace je potom dána následujícím komplexním integrálem

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} F(s) e^{st} ds, \quad (\text{A.2})$$

kde γ je reálné číslo, takže obrysová (Jordanova) křivka integrace se nachází v oblasti konvergence funkce $F(s)$ a ve valné většině případů lze použít reziduovou větu (viz kapitola 11.2).

Kromě výše uvedené „jednostranné“ Laplaceovy transformace je definována též „oboustranná“ Laplaceova transformace. Pokud $f(t)$ je reálnou nebo komplexní funkcí reálné proměnné $t \in \mathbb{R}$, potom oboustranná Laplaceova transformace je definovaná jako integrál

$$\mathcal{B}\{f\}(s) = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (\text{A.3})$$

kde obvyklé značení \mathcal{B} pochází z „bilateral“. Jedná se o nevlastní integrál, který konverguje pouze pokud existují následující dílčí integrály

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \int_{-\infty}^0 e^{-st} f(t) dt. \quad (\text{A.4})$$

Oboustrannou Laplaceovou transformací se zde dále nebudeme podrobněji zabývat. Zájemce odkazují na literaturu, například [Arfken & Weber \(2005\)](#), [Bracewell \(2000\)](#), atd.

★ jsou označeny odstavce a příklady, určené primárně studentům vyšších ročníků bakalářského studia

- Následující výčet shrnuje Laplaceovy transformace odvozené z definice (A.1), není však úplným výčtem Laplaceových transformací a obsahuje pouze některé nejčastěji používané vzorce. Jsou zde uvedeny také některé funkce, které jsou blíže vysvětlené až v následujícím textu, například Heavisideova nebo Diracova delta funkce.

$$\mathcal{L}\{C\} = \frac{C}{s}, \text{ kde } C \in \mathbb{C} \text{ je konstanta,} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ kde } n \in \mathbb{N}^+ \text{ je konstanta,} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \text{ kde } p \in \mathbb{R}, p > -1, \text{ je konstanta,} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \text{ kde } a \in \mathbb{R} \text{ je konstanta,} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad (\text{A.9})$$

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad (\text{A.10})$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad (\text{A.11})$$

$$\mathcal{L}\{t \sin at\} = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathcal{L}\{t \cos at\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathcal{L}\{\sin at - t \cos at\} = \frac{2a^3}{(s^2 + a^2)^2}, \quad (\text{A.14})$$

$$\mathcal{L}\{\sin at + t \cos at\} = \frac{2as^2}{(s^2 + a^2)^2}, \quad (\text{A.15})$$

$$\mathcal{L}\{\cos at - t \sin at\} = \frac{s(s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^2}, \quad (\text{A.16})$$

$$\mathcal{L}\{\cos at + t \sin at\} = \frac{s(s^2 + 3a^2)}{(s^2 + a^2)^2}, \quad (\text{A.17})$$

$$\mathcal{L}\{\sin(at+b)\} = \frac{s \sin b + a \cos b}{s^2 + a^2}, \text{ kde } a, b \in \mathbb{R} \text{ jsou konstanty,} \quad (\text{A.18})$$

$$\mathcal{L}\{\cos(at+b)\} = \frac{s \cos b - a \sin b}{s^2 + a^2}, \quad (\text{A.19})$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad (\text{A.20})$$

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad (\text{A.21})$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad (\text{A.22})$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad (\text{A.23})$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sinh bt\} = \frac{b}{(s-a)^2 - b^2}, \quad (\text{A.24})$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cosh bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}, \quad (\text{A.25})$$

$$\mathcal{L}\{f(Ct)\} = \frac{1}{C}F\left(\frac{s}{C}\right), \quad (\text{A.26})$$

$$\mathcal{L}\{\theta_c(t) \equiv \theta(t-c)\} = \frac{e^{-cs}}{s}, \text{ kde } \theta_c(t) \text{ je Heavisideova funkce,} \quad (\text{A.27})$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-c)\} = e^{-cs}, \text{ kde } \delta \text{ je Diracova delta funkce,} \quad (\text{A.28})$$

$$\mathcal{L}\{\theta_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s), \quad (\text{A.29})$$

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c), \quad (\text{A.30})$$

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad (\text{A.31})$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\} = \int_s^\infty F(u) du, \quad (\text{A.32})$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(s)}{s}, \quad (\text{A.33})$$

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s), \text{ kde } (f * g)(t) \text{ značí konvoluci dvou funkcí,} \quad (\text{A.34})$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0), \quad (\text{A.35})$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0), \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n)}\} &= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots \\ &\dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\mathcal{L}\{tf^{(n)}\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f^{(n)}\}. \quad (\text{A.38})$$

Při podrobnějším pohledu je zřejmé, že rovnice (A.5) je de facto speciálním případem rovnice (A.6) kde $n = 0$, zatímco rovnice (A.6) je zase speciálním případem rovnice (A.7) s přirozeným p , kdy v samotné rovnici (A.7) Γ znamená Gama funkci (viz rovnice (12.29) a další vysvětlení v rámci příkladu 12.2) a podmínka pro reálné $p > -1$ znamená, že uvažujeme pouze „řádne se chovající“, tedy kladnou Gama funkci.

A.2 „Skoková“ funkce

V tomto odstavci se zaměříme na tzv. skokovou funkci, kdy právě Laplaceova transformace velmi usnadní řešení diferenciálních rovnic obsahujících tuto funkci. Elementární „skoková“ (někdy též „schodová“ nebo jednotkový skok) funkce se nazývá Heavisideova, značí se většinou H nebo θ , někdy též u nebo 1 (zde použijeme značení θ respektive θ_c , ostatní používané symboly jsou vyhrazené pro jiné typy funkcí) a je definovaná jako

$$\theta_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } t < c, \\ 1 & \text{pokud } t \geq c. \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

Pomocí Heavisideovy funkce lze definovat i komplikovanější funkce, například $6\theta_c(t)$ znamená funkci, která je nulová pokud $t < c$ a rovna 6 pokud $t \geq c$. Jiná funkce, $6 - \theta_c(t)$, je rovna 6 pokud $t < c$ a rovna 5 pokud $t \geq c$. Ještě složitější případy mohou být definovány například pro případ libovolné funkce $f(t)$ pro $t > 0$ kdy chceme aby nová funkce $g(t)$ měla stejný průběh jako $f(t)$ ale právě až od jisté zvolené hodnoty $c > 0$ (funkce $g(t)$ je tak „vodorovně posunutou“

funkcí $f(t-c)$ pro $t > c$ a má nulovou hodnotu pro $t < c$). Funkci $g(t)$ tak můžeme zapsat jako

$$g(t) = \theta_c(t)f(t-c). \quad (\text{A.40})$$

Dosadíme-li nyní funkci (A.40) do definice Laplaceovy transformace (A.1), dostáváme

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\theta_c(t)f(t-c) dt. \quad (\text{A.41})$$

Dále, pomocí substituce $u = t - c$ přejde integrál (A.41) do tvaru

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-cs} \int_0^\infty e^{-su}f(u) du = e^{-cs}F(s). \quad (\text{A.42})$$

Můžeme proto formulovat i zpětnou Laplaceovu transformaci skokové funkce (respektive funkce obsahující skokovou funkci),

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = \theta_c(t)f(t-c). \quad (\text{A.43})$$

Pomocí rovnice (A.42) můžeme definovat Laplaceovu transformaci Heavisideovy funkce samotné, položíme-li funkci $f = 1$, tedy

$$\mathcal{L}\{\theta_c(t)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{1\} = \frac{e^{-cs}}{s}. \quad (\text{A.44})$$

Zpětná transformace proto dává

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-cs}}{s}\right\} = \theta_c(t). \quad (\text{A.45})$$

Příklad: Řešte inverzní transformaci funkce (Laplaceova obrazu)

$$F(s) = \frac{3s + 8e^{-20s} - 2se^{-3s} + 6e^{-7s}}{s^2(s+3)} \quad (\text{A.46})$$

Funkci upravíme do podoby, odpovídající levé straně rovnice (A.43),

$$F(s) = (3 - 2e^{-3s})G(s) + (8e^{-20s} + 6e^{-7s})H(s), \quad (\text{A.47})$$

kde

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)}, \quad H(s) = \frac{1}{s^2(s+3)}. \quad (\text{A.48})$$

Pomocí rozkladu na parciální zlomky a inverzní transformace funkcí (obrazů) $G(s)$ a $H(s)$ dostáváme

$$g(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}), \quad h(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}(-1 + e^{-3t}). \quad (\text{A.49})$$

Protože inverzní transformací podle (A.43) dostáváme vzor

$$f(t) = 3g(t) - 2\theta_3(t)g(t-3) + 8\theta_{20}(t)h(t-20) + 6\theta_7(t)h(t-7), \quad (\text{A.50})$$

tedy, konečná podoba hledaného Laplaceova vzoru bude

$$f(t) = 1 - e^{-3t} - 2\theta_3(t)(1 - e^{-3t}) + 8\theta_{20}(t)\left[\frac{t-20}{3} + \frac{1}{9}(-1 + e^{-3t})\right] + 6\theta_7(t)\left[\frac{t-7}{3} + \frac{1}{9}(-1 + e^{-3t})\right], \quad (\text{A.51})$$

kde například $\theta_7(t)$ znamená že $\theta = 0$ pokud $t < 7$ a $\theta = 1$ pokud $t \geq 7$.

A.3 Diracova delta funkce

I když existují různé definice Diracovy delta funkce, určující jsou následující tři její vlastnosti:

$$\delta(t - a) = 0 \quad \forall t \neq a, \quad (\text{A.52})$$

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(t - a) dt = 1 \quad \forall \epsilon > 0, \quad (\text{A.53})$$

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t)\delta(t - a) dt = f(a) \quad \forall \epsilon > 0. \quad (\text{A.54})$$

Diracova delta funkce je tedy rovna nule všude s výjimkou jediného bodu $t = a$, kde lze její hodnotu pokládat za „nekonečnou“. Integrály (A.53) a (A.54) platí pro jakýkoli interval obsahující bod a (pokud tento není jeho koncovým bodem). Navzdory jistě její „neobvyklosti“, je tato „funkce“ velmi užitečná při modelování například rázových vln či působení velmi silných, extrémně krátkodobých sil.

Z výše uvedeného vyplývá, že Laplaceova transformace Diracovy delta funkce má podobu

$$\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t - a) dt = e^{-as} \quad \forall a > 0. \quad (\text{A.55})$$

Dále lze rovněž definovat souvislost mezi Diracovou delta funkcí a Heavisideovou funkcí, uvědomíme-li si, že následující integrál

$$\int_{-\infty}^t \delta(u - a) du = \begin{cases} 0 & \text{pokud } t < a, \\ 1 & \text{pokud } t > a, \end{cases} \quad (\text{A.56})$$

kde, na rozdíl od rovnice (A.39), je ostrá nerovnost pro $t > a$, protože a nesmí být koncovým bodem daného intervalu. Nicméně, toto je zároveň definice Heavisideovy funkce, tedy,

$$\int_{-\infty}^t \delta(u - a) du = \theta_a(t). \quad (\text{A.57})$$

Protože u je vlastně obdobnou nezávisle proměnnou jako t , bude $du/dt = 1$ a tedy

$$\theta'_a(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \delta(u - a) du = \delta(t - a), \quad (\text{A.58})$$

Diracovu delta funkci lze tak považovat za derivaci Heavisideovy funkce.

A.4 Obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, s okrajovými podmínkami

Vzhledem k tomu, že chceme pomocí Laplaceovy transformace řešit také obyčejné diferenciální rovnice, připomeneme zde opět Laplaceovy transformace derivací vzorů. V případě obecné n -té derivace to bude (viz (A.37))

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad (\text{A.59})$$

kde nezávorkované exponenty proměnné s znamenají n -té mocniny. Jelikož se v drtivé většině zabýváme diferenciálními rovnicemi nejvýše druhého řádu, uvedeme zde opět explicitně Laplaceovu transformaci první a druhé derivace (viz (A.35) a (A.36)),

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) \quad (\text{A.60})$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0). \quad (\text{A.61})$$

Zároveň je patrné, že hodnoty funkcí, které se zde objevují, $y(0)$ a $y'(0)$, bývají často i hodnotami počátečních nebo okrajových podmínek v zadání diferenciálních rovnic. Znamená to tedy, že máme-li uvedené vztahy použít k řešení rovnic s podmínkami, budeme potřebovat počáteční či okrajové podmínky v bodě $x = 0$ (pro větší souvislost s předchozím výkladem obyčejných diferenciálních rovnic zde nezávisle proměnnou budeme formálně značit x namísto t).

Dále uvedeme několik typických jednoduchých příkladů, na kterých ukážeme jak se tento postup uplatňuje.

Příklad: Řešte rovnici

$$y'' - 10y' + 9y = 5x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2. \quad (\text{A.62})$$

Pomocí příslušných vzorců pro Laplaceovu transformaci můžeme uvést následující transformovanou rovnici,

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 10[sY(s) - y(0)] + 9Y(s) = \frac{5}{s^2}. \quad (\text{A.63})$$

Po vložení okrajových podmínek a úpravě dostáváme rovnici

$$Y(s) = \frac{5 + 12s^2 - s^3}{s^2(s-9)(s-1)} \quad (\text{A.64})$$

a po jejím rozkladu na parciální zlomky,

$$Y(s) = \frac{50}{81s} + \frac{5}{9s^2} + \frac{31}{81(s-9)} - \frac{2}{s-1}. \quad (\text{A.65})$$

Zpětnou Laplaceovou transformací podle uvedených pravidel (prakticky nejlépe s pomocí tabulovaných vzorců) dostáváme výsledné řešení,

$$y(x) = \frac{50}{81} + \frac{5}{9}x + \frac{31}{81}e^{9x} - 2e^x. \quad (\text{A.66})$$

Příklad: Řešte rovnici

$$2y'' + 3y' - 2y = xe^{-2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2. \quad (\text{A.67})$$

Stejně jako v předchozím příkladu, pomocí příslušných vzorců pro Laplaceovu transformaci, můžeme uvést následující transformovanou rovnici,

$$2[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 3[sY(s) - y(0)] - 2Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2}. \quad (\text{A.68})$$

Po vložení okrajových podmínek a úpravě dostáváme rovnici

$$Y(s) = -\frac{4s^2 + 16s + 15}{(2s - 1)(s + 2)^3} \quad (\text{A.69})$$

a po jejím rozkladu na parciální zlomky,

$$Y(s) = \frac{1}{125} \left[\frac{-192}{2(s - \frac{1}{2})} + \frac{96}{s + 2} - \frac{10}{(s + 2)^2} - \frac{25 \frac{2!}{2!}}{(s + 2)^3} \right], \quad (\text{A.70})$$

kde jsme pro větší názornost souladu s principy zpětné transformace uvedli i vytknutí dvojky ve jmenovateli prvního členu v celkové hranaté závorce a rozšíření číslem 2! v čitateli posledního členu. Zpětnou Laplaceovou transformací podle uvedených (tabelovaných) pravidel dostáváme výsledné řešení,

$$y(x) = \frac{1}{125} e^{-2x} \left(96 - 10x - \frac{25}{2} x^2 - 96 e^{5x/2} \right). \quad (\text{A.71})$$

Příklad: Řešte rovnici

$$y'' - 6y' + 15y = 2 \sin 3x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -4. \quad (\text{A.72})$$

Obdobným způsobem jako v předešlých příkladech můžeme odvodit následující transformovanou rovnici,

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6[sY(s) - y(0)] + 15Y(s) = 2 \frac{3}{s^2 + 9}. \quad (\text{A.73})$$

Po vložení okrajových podmínek a úpravě dostáváme rovnici

$$Y(s) = -\frac{s^3 - 2s^2 + 9s - 24}{(s^2 - 6s + 15)(s^2 + 9)} \quad (\text{A.74})$$

a po jejím rozkladu na parciální zlomky,

$$Y(s) = \frac{1}{10} \left[\frac{s}{s^2 + 9} + \frac{1\frac{3}{3}}{s^2 + 9} - \frac{11(s - 3)}{(s - 3)^2 + 6} - \frac{8\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}}{(s - 3)^2 + 6} \right], \quad (\text{A.75})$$

kde jsme pro větší názornost souladu s principy zpětné transformace uvedli rozšíření zlomky v čitatelích druhého a posledního členu v celkové hranaté závorce. Zpětnou Laplaceovou transformací podle uvedených pravidel dostáváme výsledné řešení,

$$y(x) = \frac{1}{10} \left(\cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x - 11 e^{3x} \cos \sqrt{6}x - \frac{8}{\sqrt{6}} e^{3x} \sin \sqrt{6}x \right). \quad (\text{A.76})$$

Příklad: Řešte rovnici

$$y'' + 4y' = \cos(x - 3) + 4x, \quad y(3) = 0, \quad y'(3) = 7. \quad (\text{A.77})$$

Nejprve musíme rovnici přeformulovat takovým způsobem, abychom dostali okrajové podmínky pro $x = 0$. Toho nejlépe docílíme změnou proměnných,

$$\eta = x - 3 \quad \text{a tedy} \quad x = \eta + 3. \quad (\text{A.78})$$

Původní rovnici (A.77), kde $y = y(x)$, můžeme přepsat do tvaru

$$y'' + 4y' = \cos \eta + 4(\eta + 3), \quad (\text{A.79})$$

kde $y = y(\eta + 3)$. Přepíšeme nyní funkci $y(\eta + 3)$ jako novou funkci $z(\eta)$, pomocí „řetězového pravidla“ pro derivace snadno odvodíme že $y'(\eta + 3) = z'(\eta)$ a $y''(\eta + 3) = z''(\eta)$. Rovněž okrajové podmínky můžeme transformovat jako $y(3) = z(0) = 0$ a $y'(3) = z'(0) = 7$. Původní rovnice (A.77) bude mít pro novou funkci $z(\eta)$ tvar

$$z'' + 4z' = \cos \eta + 4\eta + 12, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 7. \quad (\text{A.80})$$

Opět obdobným způsobem jako v předešlých příkladech můžeme odvodit následující transformovanou rovnici,

$$s^2 Z(s) - sz(0) - z'(0) + 4[sZ(s) - z(0)] = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s}. \quad (\text{A.81})$$

Po vložení okrajových podmínek a úpravě dostáváme rovnici

$$Z(s) = \frac{7s^4 + 13s^3 + 11s^2 + 12s + 4}{s^3(s^2 + 1)(s + 4)} \quad (\text{A.82})$$

a po jejím rozkladu na parciální zlomky, s obdobným zvýrazněním členů důležitých pro názornost zpětné transformace,

$$Z(s) = \frac{17}{16s} + \frac{11}{4s^2} + \frac{1 \frac{2!}{2!}}{s^3} - \frac{273}{272(s + 4)} + \frac{1}{17} \left(\frac{-s}{s^2 + 1} + \frac{4}{s^2 + 1} \right). \quad (\text{A.83})$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme výsledné řešení nejprve pro $z(\eta)$,

$$z(\eta) = \frac{17}{16} + \frac{11}{4}\eta + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{273}{272}e^{-4\eta} + \frac{1}{17}(4 \sin \eta - \cos \eta) \quad (\text{A.84})$$

a po záměně $y(x) = z(\eta) = z(x - 3)$ a úpravách dostáváme řešení rovnice (A.77) ve výsledném tvaru

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{43}{16} - \frac{273}{272}e^{-4(x-3)} + \frac{1}{17}[4 \sin(x - 3) - \cos(x - 3)]. \quad (\text{A.85})$$

Příklad: Řešte rovnici s Heavisideovou a Diracovou delta funkcí na pravé straně:

$$2y'' + 10y = 3\theta_{12}(t) - 5\delta(t - 4), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2. \quad (\text{A.86})$$

Odvodíme transformovanou rovnici,

$$2[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 10Y(s) = \frac{3e^{-12s}}{s} - 5e^{-4s}, \quad (\text{A.87})$$

po dosazení okrajových podmínek a úpravě dostaneme

$$Y(s) = \frac{3e^{-12s}}{s(2s^2 + 10)} - \frac{5e^{-4s}}{2s^2 + 10} - \frac{2s + 4}{2s^2 + 10} = 3e^{-12s}F(s) - 5e^{-4s}G(s) - H(s). \quad (\text{A.88})$$

Po rozkladu jednotlivých členů první pravé části dostáváme jednotlivé funkce $f(t)$, $g(t)$ a $h(t)$,

$$f(t) = \frac{1}{10} (1 - \cos \sqrt{5}t), \quad g(t) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \sin \sqrt{5}t, \quad h(t) = \cos \sqrt{5}t + \frac{2}{\sqrt{5}} \sin \sqrt{5}t. \quad (\text{A.89})$$

Výsledné řešení bude

$$y(t) = 3\theta_{12}(t) f(t - 12) - 5\theta_4(t) g(t - 4) - h(t), \quad (\text{A.90})$$

kde $f(t)$, $g(t)$ a $h(t)$ jsou definovány výše, pro lepší pochopení jednotlivých symbolů viz také řešený příklad v odstavci „skoková funkce“.

Výsledky příkladů z tohoto odstavce lze snadno ověřit standardním postupem při řešení obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu s konstantními koeficienty, uvedeným v kapitole 3.2.1.

A.5 Obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s nekonstantními koeficienty, s okrajovými podmínkami

Uveďme zde také následující identitu: pokud $f(t)$ je po částech spojitá funkce na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ obecného tzv. *exponenciálního řádu* a pokud existují kladné konstanty T a M takové, že $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pro všechna $t \geq T$, potom platí

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0. \quad (\text{A.91})$$

Jinými slovy, funkce která je funkcí obecného *exponenciálního řádu*, neporoste strměji než $Me^{\alpha t}$ pro libovolné M a α a pro všechna dostatečně velká t . Jestli funkce je či není funkcí obecného *exponenciálního řádu* α lze zjistit výpočtem následující limity $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| e^{-\alpha t}$: pokud je tato limita pro určité α konečná, potom je funkce $f(t)$ funkcí *exponenciálního řádu* α , pokud limita diverguje k nekonečnu, funkce není funkcí žádného obecného *exponenciálního řádu*. Téměř všechny funkce, se kterými se setkáme v této kapitole při řešení diferenciálních rovnic, jsou funkcemi nějakého určitého exponenciálního řádu. Dobrým příkladem funkce, která není funkcí exponenciálního řádu, je například $f(t) = \exp(t^3)$, kde snadno ověříme že $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp [t(t^2 - \alpha)] = \infty$, což za daných podmínek platí pro jakékoli α .

Příklad: Řešte rovnici

$$y'' + 3xy' - 6y = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (\text{A.92})$$

Z již dříve odvozených dílčích vztahů (rovnice (A.38), kromě již dříve uvedených vztahů v příkladech rovnic s konstantními koeficienty) víme, že

$$\mathcal{L}\{tf'(t)\} = \mathcal{L}\{xy'\} = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}\{y'\}) = -\frac{d}{ds}[sY(s) - y(0)] = -sY'(s) - Y(s). \quad (\text{A.93})$$

Dosadíme-li všechny tyto již známé identity do dané rovnice, dostáváme

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3[-sY'(s) - Y(s)] - 6Y(s) = \frac{2}{s}. \quad (\text{A.94})$$

Po dosazení okrajových podmínek a malé úpravě dostaneme diferenciální rovnici prvního řádu,

$$Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right)Y(s) = -\frac{2}{3s^2}. \quad (\text{A.95})$$

Na rozdíl od příkladů v předchozí části pro diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, kde jsme rovnou dostali transformovaná řešení, zde dostáváme lineární obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu, kterou je třeba vyřešit, abychom získali konečné transformované řešení. Řešením rovnice (A.95) pro $Y(s)$ bude

$$Y(s) = \frac{1}{s^3} \left(2 + Ce^{\frac{s^2}{6}} \right). \quad (\text{A.96})$$

Vzhledem k tomu, že druhý člen (exponenciální) v závorce v transformovaném řešení (A.96) se nepodobá žádnému z elementárních (tabelovaných) řešení Laplaceových transformací, předpokládejme, že se zde jedná o funkci obecného *exponenciálního řádu* a použijme tedy uvedené pravidlo pro její limitu. To znamená

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^3} \left(2 + Ce^{\frac{s^2}{6}} \right) = 0, \quad (\text{A.97})$$

kde první člen konverguje k nule vždy, zatímco druhý člen konverguje k nule pouze pokud $C = 0$. Transformované řešení tak představuje pouze první člen rovnice (A.96), výsledné řešení rovnice (A.92) bude

$$y(x) = x^2, \quad (\text{A.98})$$

o jehož správnosti se lze snadno přesvědčit.

Příklad: Řešte rovnici

$$xy'' - xy' + y = 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -4. \quad (\text{A.99})$$

Z předchozího příkladu víme, že $\mathcal{L}\{xy'\} = -sY'(s) - Y(s)$. Zde budeme rovněž potřebovat obdobnou identitu obsahující druhou derivaci,

$$\mathcal{L}\{xy''\} = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}\{y''\}) = -\frac{d}{ds} [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] = -s^2Y'(s) - 2sY(s) + y(0). \quad (\text{A.100})$$

Dosadíme-li všechny tyto již známé identity do dané rovnice, dostáváme

$$-s^2Y'(s) - 2sY(s) + y(0) - [-sY'(s) - Y(s)] + Y(s) = \frac{2}{s}. \quad (\text{A.101})$$

Po dosazení okrajových podmínek a úpravě dostaneme diferenciální rovnici prvního řádu,

$$Y'(s) + \frac{2}{s}Y(s) = \frac{2}{s^2}. \quad (\text{A.102})$$

Opět zde musíme řešit rovnici prvního řádu abychom dostali transformované řešení,

$$Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{C}{s^2}. \quad (\text{A.103})$$

Toto transformované řešení konverguje k nule pro jakoukoli konstantu C , nemusíme proto použít princip uvedený v rovnici (A.91), abychom se zbavili některého z členů, jako v předchozím příkladu. Inverzní transformace potom dává

$$y(x) = 2 + Cx \quad (\text{A.104})$$

a po dosažení druhé okrajové podmínky,

$$y(x) = 2 - 4x. \quad (\text{A.105})$$

Na předchozích příkladech jsme si ukázali, jak řešit některé obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s nekonstantními koeficienty, kdy jsme ovšem zvolili koeficienty tak, aby bylo možné řešení tímto způsobem vůbec najít. Při jinak zvolených koeficientech by hledání řešení mohlo být značně obtížné; obecně vzato, takové rovnice s nekonstantními koeficienty jsou většinou velmi obtížně řešitelné.

A.6 Užití konvoluce v Laplaceově transformaci

Uvažujme nyní transformovanou rovnici ve formě

$$H(s) = F(s)G(s), \quad (\text{A.106})$$

kteřá není řešitelná pomocí rozkladu na parciální zlomky. Jedním ze způsobů její inverzní transformace je použití konvoluce. Pokud $f(t)$ a $g(t)$ jsou po částech spojitě funkce na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$, potom konvoluce funkcí $f(t)$ a $g(t)$ bude (viz výklad konvoluce výše, v kapitole 10)

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau, \quad (\text{A.107})$$

kde na rozdíl od obecné definice konvoluce (10.7) jsou meze definovány pouze v rozmezí $\langle 0, t \rangle$, což odpovídá spodní mezi pro Laplaceovu transformaci a „praktické“ horní mezi pro konvoluční proměnnou - viz příklady na konvoluce v kapitole 10.

Následující identita nám umožní řešit inverzní Laplaceovu transformaci součinu dvou transformovaných funkcí (Laplaceových obrazů),

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s), \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t). \quad (\text{A.108})$$

Na následujících dvou příkladech si ukážeme, jak může prakticky vypadat užití konvoluce pro řešení Laplaceovy transformace.

Příklad: Použijte konvoluci k nalezení inverzní transformace následujícího Laplaceova obrazu:

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + a^2)^2}. \quad (\text{A.109})$$

Rozepíšme nejprve funkci (A.109) jako součin dvou funkcí,

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + a^2} \frac{1}{s^2 + a^2} = F(s)G(s), \quad (\text{A.110})$$

tedy,

$$f(t) = g(t) = \frac{1}{a} \sin at. \quad (\text{A.111})$$

Pomocí konvoluce těchto funkcí provedeme inverzní transformaci (zde uvedeme pouze výsledek),

$$h(t) = (f * g)(t) = \frac{1}{a^2} \int_0^t \sin a\tau \sin(at - a\tau) d\tau = \frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at). \quad (\text{A.112})$$

Příklad: Řešte následující diferenciální rovnici s s obecnou pravou stranou a okrajovými podmínkami,

$$4y'' + y = g(t), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -7. \quad (\text{A.113})$$

Stejně jako v předchozích příkladech, nalezneme transformovanou funkci

$$4[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + Y(s) = G(s), \quad (\text{A.114})$$

po jejím rozkladu na parciální zlomky a úpravě s již „obvyklými zvýrazněními pro inverzní transformaci“ dostáváme

$$Y(s) = \frac{3s}{s^2 + \frac{1}{4}} - \frac{7\frac{1}{2}}{s^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}G(s)\frac{\frac{1}{2}}{s^2 + \frac{1}{4}}. \quad (\text{A.115})$$

První dva členy na pravé straně rovnice (A.115) lze řešit snadno, třetí člen vyřešíme jako konvoluci dvou funkcí, jednoho konkrétního vzoru a jedné obecné,

$$f(t) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right), \quad g(t). \quad (\text{A.116})$$

Výsledná podoba inverzní transformace v tomto případě bude

$$y(t) = 3 \cos\left(\frac{t}{2}\right) - 14 \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin\left(\frac{\tau}{2}\right) g(t - \tau) d\tau. \quad (\text{A.117})$$

Jak tento poslední příklad ukazuje, pomocí konvoluce lze do značné míry řešit diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami s obecnou funkcí na pravé straně. Toto se může velmi hodit v případech, kdy máme celou řadu takových funkcí pravé strany a potřebujeme například zvolit pouze jednu (nebo některé). Pomocí konvoluce můžeme rovnici takto „předřešit“ a pak pouze dosazovat konkrétní podoby funkce $g(t)$ do konvolučního integrálu.

Příloha B

Křivočaré souřadnice ★

Základní principy, týkající se hlavních křivočarých souřadnicových systémů a transformačních vztahů s nimi spojených, byly již uvedeny v kapitole 4. Kromě *válcové (cylindrické)* a *kulové (sférické)* soustavy existuje dále celá řada speciálních křivočarých souřadnicových soustav, např. eliptická, parabolická, kónická, atd., včetně soustav neortogonálních, tj. takových, kdy jednotlivé souřadnicové směry nesvírají pravý úhel. Zvládnutí matematického aparátu, popisujícího křivočaré souřadnice, jejich vztahy a vzájemné převody, je pro fyzikální praxi nezbytné. V následující příloze si ukážeme podrobněji praktické postupy při počítání v kartézských, válcových, kulových a některých dalších souřadnicových soustavách, včetně odvození metrických tenzorů, diferenciálních operátorů, vektorů polohy, rychlosti a zrychlení, atd.

B.1 Kartézská soustava

Ačkoli kartézská soustava de facto nepatří mezi křivočaré soustavy, uvádíme ji zde jako přirozeně výchozí ortogonální souřadnou soustavou, na níž si názorně ukážeme základní vztahy a geometrické principy, které v rámci složitějších, skutečně křivočarých souřadnicových soustav již pouze analogicky upřesníme a aplikujeme. Její zásadní předností je, že (jednotkové) vektory kartézské báze (v celé příloze B dále implicitně předpokládáme, že se „pohybujeme“ v \mathbb{R}^3 , rovněž zde budeme používat typograficky přehlednější „stříškové“ značení tučně vysázených jednotkových bázových vektorů, tedy například \hat{x} místo \vec{e}_x , atd.),

$$\vec{e}_x = \hat{x} = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_y = \hat{y} = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_z = \hat{z} = (0, 0, 1), \quad (\text{B.1})$$

jsou konstantní (mají stále stejnou velikost a stále stejný směr), derivace těchto vektorů jsou tedy nulové. Pro druhou mocninou vzdálenosti dvou bodů v diferenciálním tvaru platí

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad \text{což lze zobecnit tzv. } \textit{metrickou formou}, \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{B.2})$$

kde indexy i, j značí jednotlivé souřadnicové směry ($i, j = x, y, z$) a zároveň tak určují jednotlivé složky 3×3 metrického tenzoru. *Kovariantní* metrický tenzor g_{ij} kartézské soustavy má tedy elementární tvar jednotkové matice. Význam *kontravariantního* metrického tenzoru g^{ij} kartézské soustavy je formálně určen druhou mocninou velikosti vektoru

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2. \quad (\text{B.3})$$

★ jsou označeny odstavce a příklady, určené primárně studentům vyšších ročníků bakalářského studia

Zároveň musí pro každou metriku obecně platit $g_{ij}g^{ij} = \mathbf{E}$, kovariantní a kontravariantní metrický tenzor tak budou vždy tvořit vzájemně inverzní matice. V kartézské soustavě budou mít tedy tvar

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

B.1.1 Diferenciální operátory

- *Gradient* skalární funkce $f(x, y, z)$ je v kartézské soustavě definován (viz kapitola 5.3) jako vektor ve tvaru

$$\vec{\nabla} f = \text{grad } f = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (\text{B.5})$$

Gradient vyjadřuje v každém bodě skalárního pole *směr největšího (nejstrmějšího) nárůstu* tohoto pole. *Gradient vektoru* (vektorového pole) $\vec{A}(x, y, z)$ je definován jako tenzor druhého řádu (viz kapitola 2.3) ve tvaru

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \text{grad } \vec{A} = \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) (A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}). \quad (\text{B.6})$$

Protože se jedná o tzv. *tenzorový součin*, kdy se jednotlivé vektory báze násobí jako matice, z nichž první je sloupcová a druhá řádková, je třeba pro určení prvků tenzoru vždy zachovávat jejich pořadí. Pomocí maticového formalismu můžeme tenzor gradientu vektorového pole zapsat jako (viz například [Arfken & Weber \(2005\)](#))

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \begin{matrix} & \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{x}} & \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ \hat{\mathbf{y}} & \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \\ \hat{\mathbf{z}} & \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \end{matrix}. \quad (\text{B.7})$$

- *Divergence* vektoru (vektorového pole) $\vec{A}(x, y, z)$ je definována jako skalár (skalární pole)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div } \vec{A} = \hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{B.8})$$

Divergence vektoru v *ortogonálních* soustavách odpovídá stopě tenzoru gradientu vektorového pole, je tedy kontrakcí tohoto tenzoru (viz kapitola 2.3). V obecných *ortogonálních* souřadnicích může být zapsána ve formě

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (h^k A^k) + \Gamma_{jl}^k h^l A^l \right] \delta_j^k = \frac{\partial}{\partial x_j} (h^j A^j) + \Gamma_{jl}^j h^l A^l. \quad (\text{B.9})$$

S využitím rovnice (2.61) lze tento výraz přepsat rovněž do tvaru

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (h_k A_k) - \Gamma_{jk}^l h_l A_l \right] \delta_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_j} (h_j A_j) - \Gamma_{jj}^l h_l A_l. \quad (\text{B.10})$$

Členy h_i jsou tzv. *Laméovy koeficienty* (viz kapitola 4), často také nazývané *škálovací faktory* (nezaměňovat se stejnojmennými Laméovými koeficienty v mechanice kontinua), pojmenované po francouzském matematikovi Gabrieli Lamé, kde v příslušném metrickém tenzoru platí

$$h_i h_i = g_{ii}, \quad h^i h^i = g^{ii} \quad (\text{B.11})$$

(proto nyní uvažujeme jen ortogonální soustavy, jejichž metrické tenzory mají nenulové prvky pouze na hlavní diagonále). Výraz Γ_{jk}^l je tzv. *Christoffelův symbol* (viz kapitola 2.3) pojmenovaný po německém matematikovi a fyzikovi Elwin Bruno Christoffelovi, definující tzv. *členy křivosti* v křivočarých souřadných soustavách,

$$\Gamma_{jk}^l = \frac{1}{2} g^{lm} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_m} \right), \quad (\text{B.12})$$

kde indexy l, m jsou tzv. volné indexy, které mohou kdykoli nabývat kterékoli z hodnot 1, 2, 3, respektive x, y, z . Explicitní výraz pro divergenci vektoru v obecné ortogonální soustavě lze zapsat formou (kde $i \neq j \neq k$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_i h_j h_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (h_j h_k A_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (h_k h_i A_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (h_i h_j A_k) \right], \quad (\text{B.13})$$

Ta je zcela ekvivalentní kompaktnější formě zápisu,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} (h_j h_k A_i) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g} h^i A^i). \quad (\text{B.14})$$

Složky $h^i A^i$ (v literatuře se většinou zkráceně uvádí pouze A^i) vektoru \vec{A} odpovídají (viz rovnice (2.61)) $h^i A^i = g^{ij} (h_j A_j)$, g je determinant metrického tenzoru, který je identický s druhou mocninou příslušného Jakobiánu souřadnicové transformace. Platí tedy

$$\sqrt{|\det g_{ij}|} = J, \quad \sqrt{|\det g^{ij}|} = J^{-1}. \quad (\text{B.15})$$

Obecně platí, že divergencí *tenzoru řádu n* je tenzor řádu $n-1$, divergencí tenzoru druhého řádu tak bude vektor. Kompaktní forma zápisu divergence *tenzoru druhého řádu* bude mít tvar

$$\nabla_j A^{ij} = A_i. \quad (\text{B.16})$$

Explicitní zápis divergence tenzoru druhého řádu v kartézském systému (prakticky se jedná o maticové násobení vektoru s transponovanou maticí; při skalárním součinu dvou vektorů se také jedná o maticové násobení dvou vektorů, kdy druhý z vektorů je transponovaný, tedy sloupcový, viz kapitola 2.3) bude vypadat (viz Arfken & Weber (2005))

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot A_{ij} &= \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix}^T = \\ &= \hat{x} \left(\frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

- *Rotací* vektoru (vektorového pole) $\vec{A}(x, y, z)$ v kartézské soustavě nazýváme vektor

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (\text{B.18})$$

Obecný výraz pro vektor rotace $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ vektoru \vec{A} v libovolné *ortogonální* souřadné soustavě lze definovat způsobem

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \epsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} [\nabla_j (h_k A_k)] \hat{x}_i = \epsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (h_k A_k) - \Gamma_{jk}^l h_l A_l \right] \hat{x}_i. \quad (\text{B.19})$$

V rovnici (B.19) výraz ϵ_{ijk} (kde všechny tři indexy i, j, k mohou odpovídat postupně všem třem souřadnicovým směrům) odpovídá antisymetrickému, (tzv. *Levi-Civitovu*, viz rovnice (2.50)) symbolu, který nabývá hodnoty $+1$ pro sudé permutace indexů, -1 pro liché permutace indexů a 0 pokud se dva nebo více indexů opakuje.

Díky symetrii indexů ve složkách vektoru rotace a díky úplné antisymetričnosti Levi-Civitova ϵ -symbolu, se výrazy $\Gamma_{jk}^l A_l$ v rovnici (B.19) vyruší, celý výraz se tak zjednoduší do podoby

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \epsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (h_k A_k) \right] \hat{x}_i. \quad (\text{B.20})$$

V kartézské soustavě, kde $h_1, h_2, h_3 = 1$, bude rovnice (B.20) odpovídat rovnici (B.18). Zapišeme-li vektor rotace znovu po složkách, dostáváme

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (\text{B.21})$$

- *Laplacián* (Laplaceův operátor) je definován jako divergence gradientu, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ (používá se pro něj symbol Δ), jedná se tedy o skalární operátor, který může působit na skalární funkce, vektory (po jednotlivých složkách), tenzory (po jednotlivých prvcích), aniž by měnil jejich *řád* (t.j. skalár zůstává skalárem, vektor vektorem, atd.). V kartézské soustavě má Laplacián zcela jednoduchý tvar: analogicky k rovnici (B.8), kde složky vektoru \vec{A} nahradíme složkami vektoru gradientu, můžeme psát

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{div grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{B.22})$$

B.1.2 Plochy, objemy

Označme S_k souřadnicovou plochu (viz kapitola 4) s konstantní hodnotou souřadnice x_k , ohraničenou souřadnicovými křivkami $x_i, x_i + \Delta x_i, x_j, x_j + \Delta x_j, i \neq j \neq k$. V kartézské soustavě půjde např. o plochu s konstantní hodnotou $z = z_0$, ohraničenou přímkami $x = x_0, x = x_0 + \Delta x, y = y_0, y = y_0 + \Delta y$. Výpočet velikosti takové plochy je zde samozřejmě zcela triviální, půjde o obdélník (čtverec) s obsahem $\Delta x \Delta y$. Obecný vztah pro výpočet velikosti takové plochy bude mít tvar

$$S_k = \int_{x_{0i}}^{x_{0i} + \Delta x_i} \int_{x_{0j}}^{x_{0j} + \Delta x_j} J'_{ij} dx_i dx_j, \quad (\text{B.23})$$

kde J'_{ij} je druhá odmocnina absolutní hodnoty determinantu (minoru) příslušné submatice metrického tenzoru. V uvedeném případě by se jednalo o determinant $J'_{ij} = \sqrt{|g_{ii}g_{jj} - g_{ij}g_{ji}|}$. Integrand rovnice (B.23) definujeme jako *plošný element* $dS_k = J'_{ij} dx_i dx_j$. V kartézské soustavě budou determinanty všech tří submatic $J'_{ij} = 1$. Dále, označíme-li V objem, vymezený souřadnicovými plochami s konstantními souřadnicemi $x_i, x_i + \Delta x_i, x_j, x_j + \Delta x_j, x_k, x_k + \Delta x_k, i \neq j \neq k$, obecný vztah pro výpočet velikosti takového objemu bude mít tvar

$$V = \int_{x_{0i}}^{x_{0i} + \Delta x_i} \int_{x_{0j}}^{x_{0j} + \Delta x_j} \int_{x_{0k}}^{x_{0k} + \Delta x_k} J dx_i dx_j dx_k, \quad (\text{B.24})$$

kde J je druhá odmocnina absolutní hodnoty determinantu metrického tenzoru (Jakobiánu, viz rovnice (B.15)). Integrand rovnice (B.24) vyjadřuje *objemový element* $dV = J dx_i dx_j dx_k$. V kartézské soustavě opět $J = 1$, vymezený prostor bude mít tvar pravoúhlého kvádru o objemu $\Delta x \Delta y \Delta z$.

B.1.3 Vektory polohy, rychlosti a zrychlení

V kartézské soustavě je zápis vektorů velmi jednoduchý, polohový vektor \vec{r} , vektor rychlosti \vec{v} a vektor zrychlení \vec{a} budou mít postupně tvar,

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = (x, y, z), \quad (\text{B.25})$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} = (v_x, v_y, v_z), \quad (\text{B.26})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z} = (a_x, a_y, a_z), \quad (\text{B.27})$$

kde $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{y} = dy/dt$ a $\dot{z} = dz/dt$.

B.2 Válcová soustava

Válcová soustava může být vhodná pro popis celé řady osově symetrických a rotačních jevů, např. elektrického a magnetického pole okolo přímých vodičů, vírů v tekutinách, galaxií, hvězdných disků, atd. Souřadnicové směry jsou (viz kapitola 4.2): ρ - vzdálenost od osy válcové symetrie, ϕ - azimutální úhel, z - výška. Převod z válcové do kartézské soustavy je dán vztahy¹

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z. \quad (\text{B.28})$$

Pro zpětnou transformaci z kartézské do válcové soustavy platí

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \phi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \phi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (\text{B.29})$$

Jednotkové vektory válcové báze budou mít v kartézské soustavě tvar (viz obrázek 4.1)

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi = (\cos \phi, \sin \phi, 0), & \hat{\phi} &= -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \\ \hat{z} &= (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

¹V dalším popisu budeme rozlišovat ρ pro radiální válcovou souřadnici, r pro radiální kulovou souřadnici.

Jediným konstantním bázevým vektorem tak bude vektor $\hat{\mathbf{z}}$, ostatní bázevé vektory mění směr v závislosti na úhlu ϕ . Nenulové derivace bázevých vektorů ve směru souřadnicových os a nenulové časové derivace bázevých vektorů budou (z rovnice (B.30))

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \phi} &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0) = \hat{\boldsymbol{\phi}}, & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \dot{\phi}, \\ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \phi} &= (-\cos \phi, -\sin \phi, 0) = -\hat{\boldsymbol{\rho}}, & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} \dot{\phi}.\end{aligned}\quad (\text{B.31})$$

Pokud budeme derivovat jednotkové vektory válcové báze ve směru kartézských souřadnicových os, potom např. ve směru osy x dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\cos \phi, \sin \phi, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right) = -\hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\sin \phi}{\rho}, \\ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (-\sin \phi, \cos \phi, 0) = \hat{\boldsymbol{\rho}} \frac{\sin \phi}{\rho}.\end{aligned}\quad (\text{B.32})$$

Obdobně získáme derivace ve všech ostatních směrech. Zpětná transformace jednotkových bázevých vektorů (viz rovnice (B.30)) bude

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cos \phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \phi, \quad \hat{\mathbf{y}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \sin \phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos \phi, \quad \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{B.33})$$

Metrickou formu válcové soustavy snadno odvodíme, uvědomíme-li si, že vzdálenost dvou bodů v prostoru musí být nezávislá na volbě souřadného systému, tedy ds^2 z rovnice (B.2) se musí pro všechny souřadné soustavy rovnat. Z rovnice (B.28) dostaneme,

$$dx = \cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi, \quad dy = \sin \phi d\rho + \rho \cos \phi d\phi, \quad dz = dz, \quad (\text{B.34})$$

dosazením do rovnice (B.2) dostáváme metrickou formu válcové souřadnicové soustavy,

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2. \quad (\text{B.35})$$

Můžeme tedy napsat kovariantní (g_{ij}) i kontravariantní (g^{ij}) metrický tenzor a také (viz rovnice (B.11)) příslušné *Laméovy koeficienty* válcové souřadnicové soustavy,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_\rho = 1, \quad h_\phi = \rho, \quad h_z = 1. \quad (\text{B.36})$$

Nenulové *Christoffelovy symboly* válcové metriky z rovnice (B.12) budou

$$\Gamma_{\phi\phi}^\rho = -\rho, \quad \Gamma_{\phi\rho}^\phi (\Gamma_{\rho\phi}^\phi) = \frac{1}{\rho}. \quad (\text{B.37})$$

B.2.1 Diferenciální operátory

- *Gradient* skalární funkce $f(\rho, \phi, z)$ ve válcové soustavě odvodíme z rovnice (B.5), kam za jednotkové bázevé vektory dosadíme výrazy z rovnice (B.33) a jednotlivé složky gradientu rozvineme řetězovým pravidlem pro derivace. Po rozepsání dostáváme

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= (\hat{\boldsymbol{\rho}} \cos \phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \\ &+ (\hat{\boldsymbol{\rho}} \sin \phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial f}{\partial z}.\end{aligned}\quad (\text{B.38})$$

Jednotlivé nenulové parciální derivace vypočítáme z rovnice (B.29),

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \phi, & \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \phi}{\rho}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \phi, & \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \phi}{\rho}.\end{aligned}\quad (\text{B.39})$$

Po dosazení a úpravě dostaneme výslednou podobu gradientu skalární funkce,

$$\vec{\nabla} f = \hat{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (\text{B.40})$$

Nyní již za jednotkové vektory válcové báze nedosazujeme jejich složky z rovnice (B.30), kde jsme je „viděli“ ze soustavy kartézské. Analogicky k rovnici (B.6) (tenzorový součin) a s použitím rovnice (B.40) je potom *gradient vektorového pole* $\vec{A}(\rho, \phi, z)$ ve válcové soustavě definován jako tenzor druhého řádu ve tvaru

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) (A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{z}). \quad (\text{B.41})$$

Na rozdíl od kartézské soustavy zde již jednotkové bázové vektory $\hat{\rho}$ a $\hat{\phi}$ nejsou konstantní, operátor gradientu tedy fakticky působí i na ně (jejich derivace jsou rozepsány v rovnici (B.31)). Pomocí maticového formalismu můžeme tenzor gradientu vektorového pole ve válcové soustavě zapsat

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \begin{matrix} & \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \hat{\rho} & \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \right) & \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \right) & \left(\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \\ \hat{\phi} & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{\rho} \right) & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{A_\rho}{\rho} \right) & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \right) \\ \hat{z} & \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \end{matrix}. \quad (\text{B.42})$$

Stejného výsledku docílíme i jiným postupem, např. s použitím formalismu *Christoffelových symbolů* (viz rovnice (B.37)), kde na rozdíl od rovnice (B.19) zapíšeme

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{h_j h_k} [\nabla_j (h_k A_k)] \hat{\mathbf{x}}_j \hat{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{h_j h_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (h_k A_k) - \Gamma_{jk}^l h_l A_l \right] \hat{\mathbf{x}}_j \hat{\mathbf{x}}_k. \quad (\text{B.43})$$

Postup podle rovnice (B.43) lze ovšem použít pouze pro ortogonální souřadné soustavy, postup podle rovnice (B.41) platí zcela obecně.

- *Divergence* vektoru (vektorového pole) $\vec{A}(\rho, \phi, z)$ je ve válcových souřadnicích ve smyslu rovnice (B.41), analogicky k rovnici (B.8), definována jako skalár (skalární pole)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{B.44})$$

Porovnáním s rovnicí (B.42) opět vidíme, že divergence je stopou tenzoru gradientu vektorového pole. Divergencí *tenzoru druhého řádu*, popsaného maticí 3×3 , bude vektor (tenzor 1. řádu). Explicitní formu zápisu divergence tenzoru druhého řádu ve válcových souřadnicích (srovnej s rovnicí (B.17) zde již uvádět nebudu, zájemce odkazuji na literaturu, např. Abramowitz & Stegun (1972), Young (1993), Arfken & Weber (2005), atd.

- *Rotaci* vektoru (vektorového pole) $\vec{A}(\rho, \phi, z)$ ve válcové soustavě, kde $h_\rho = 1$, $h_\phi = \rho$, $h_z = 1$, odvodíme podle již uvedeného vztahu (B.20). Dostáváme

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{z}. \quad (\text{B.45})$$

- *Laplacián* odvodíme (viz rovnice (B.22)), nahradíme-li v rovnici divergence (B.44) složky vektoru \vec{A} odpovídajícími složkami vektoru gradientu z rovnice (B.40). Dostáváme

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{B.46})$$

B.2.2 Plochy, objemy

Stejně jako v kartézské soustavě označme S_k souřadnicovou plochu s konstantní hodnotou souřadnice x_k , ohraničenou souřadnicovými křivkami $x_i, x_i + \Delta x_i, x_j, x_j + \Delta x_j, i \neq j \neq k$. Ve válcové soustavě půjde např. o plochu s konstantní hodnotou $z = z_0$, ohraničenou polopřímkami $\phi = \phi_1, \phi = \phi_2$ a křivkami (kružnicemi) $\rho = \rho_1, \rho = \rho_2$. Výpočet velikosti takové plochy již není tak zcela triviální, jako v kartézské soustavě, půjde o průnik kruhové výseče s plochou mezi dvěma soustřednými kružnicemi. Pokud budeme uvažovat jinou plochu, např. s konstantní souřadnicí $\rho = \rho_0$, ohraničenou souřadnicovými plochami $\phi = \phi_1, \phi = \phi_2, z = z_1, z = z_2$, půjde o část válcové plochy. Při výpočtech velikostí těchto ploch vyjdeme z rovnic (B.23) a (B.36),

$$\begin{aligned} S_\rho &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{g_{\phi\phi} g_{zz}} d\phi dz = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} \rho d\phi dz = \rho \Delta\phi \Delta z, \\ S_\phi &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{g_{zz} g_{\rho\rho}} dz d\rho = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} dz d\rho = \Delta z \Delta\rho, \\ S_z &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{g_{\rho\rho} g_{\phi\phi}} d\rho d\phi = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho d\rho d\phi = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2} \Delta\phi. \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Ve válcovém souřadnicovém systému budou nediagonální členy submatic J'_{ij} (viz rovnice (B.23)) nulové. Označíme-li V objem, vymezený souřadnicovými plochami s konstantními souřadnicemi $\rho_1, \rho_2, \phi_1, \phi_2, z_1, z_2$, velikost tohoto objemu dle rovnice (B.24) bude

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{z_1}^{z_2} \rho d\rho d\phi dz = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2} \Delta\phi \Delta z. \quad (\text{B.48})$$

Obdobným způsobem můžeme pomocí stanovení integračních mezí vypočítat v daném souřadnicovém systému velikost jakéhokoli jiného složitějšího útvaru.

B.2.3 Vektory polohy, rychlosti a zrychlení

Při popisu vektorů ve válcové soustavě vyjdeme z jejich popisu v soustavě kartézské a dosadíme všechny rovnice pro derivace jednotkových vektorů i vektorových složek (rovnice (B.28) - (B.33)). Polohový vektor a vektor rychlosti ve válcové soustavě budou

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}. \quad (\text{B.49})$$

Tento tvar lze očekávat, vzhledem k tomu, že polohový vektor vždy vychází z počátku souřadnic. Vektory rychlosti a zrychlení jsou zároveň definovány jako

$$\vec{v} = v_\rho \hat{\rho} + v_\phi \hat{\phi} + v_z \hat{z}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_\rho \hat{\rho} + a_\phi \hat{\phi} + a_z \hat{z}. \quad (\text{B.50})$$

Derivováním rovnice (B.49) podle času dostáváme jednotlivé složky vektoru zrychlení,

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 = \frac{dv_\rho}{dt} - \rho \dot{\phi}^2, \quad a_\phi = \rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi} = \frac{dv_\phi}{dt} + \dot{\rho} \dot{\phi}, \quad a_z = \ddot{z} = \frac{dv_z}{dt}. \quad (\text{B.51})$$

Protože $d/dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ (řetězové pravidlo pro derivování, v tomto případě pro parciální derivace $\vec{v} = \vec{v}(t, \rho, \phi, z)$), potom zrychlení, vyjádřené pomocí složek vektoru rychlosti bude

$$a_\rho = \frac{\partial v_\rho}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\rho}{\partial z}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\rho} - \frac{v_\phi^2}{\rho}, \quad (\text{B.52})$$

$$a_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_\phi}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\phi} + \frac{v_\rho v_\phi}{\rho}, \quad (\text{B.53})$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_z}. \quad (\text{B.54})$$

B.3 Kulová soustava

Kulová soustava je vhodná pro popis jevů s centrální symetrií, jako jsou např. fyzikální pole, tvořená hmotnými body, astronomickými tělesy, atd. Její základní popis naleznete již v kapitole 4.3. Mimo jiné se implicitně používá také v kartografii, kde soustava poledníků a rovnoběžek je vlastně soustava azimutálních a elevačních úhlových souřadnic (viz dále). Zde je ovšem elevační úhel počítán jiným způsobem, v „matematické konvenci“ roste od 0 do π (polární úhel), v „kartografické konvenci“ roste od $-\pi/2$ do $\pi/2$ (elevační úhel), navíc v opačném smyslu vůči směru nárůstu azimutální souřadnice.

Souřadnicové směry jsou: r - vzdálenost od středu kulové symetrie, θ - polární úhel, ϕ - azimutální úhel. Převod z kulové do kartézské soustavy je dán vztahy

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (\text{B.55})$$

Pro zpětnou transformaci z kartézské do kulové soustavy platí

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \theta = \arcsin \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \phi &= \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \phi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \phi = \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Analogicky k rovnici (B.30) budou mít jednotkové vektory kulové báze v kartézské soustavě tvar (viz obrázek 4.2)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \phi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\mathbf{x}} \cos \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta \sin \phi - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\hat{\mathbf{x}} \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0).\end{aligned}\tag{B.57}$$

V kulové soustavě není žádný z vektorů báze konstantní. Derivace bázových vektorů ve směru jednotlivých souřadnicových os budou (z rovnice (B.57)),

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} &= \hat{\boldsymbol{\theta}}, & \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \phi} &= \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \theta, \\ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} &= -\hat{\mathbf{r}}, & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \phi} &= \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos \theta, \\ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \theta} &= 0, & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \phi} &= -\hat{\mathbf{r}} \sin \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta.\end{aligned}\tag{B.58}$$

Časové derivace bázových vektorů budou

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \dot{\theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \dot{\phi} \sin \theta, \\ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\hat{\mathbf{r}} \dot{\theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \dot{\phi} \cos \theta, \\ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\hat{\mathbf{r}} \dot{\phi} \sin \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}\tag{B.59}$$

Zpětnou transformací jednotkových bázových vektorů (viz rovnice (B.57)) dostáváme

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{r}} \sin \theta \cos \phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta \cos \phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \phi, \\ \hat{\mathbf{y}} &= \hat{\mathbf{r}} \sin \theta \sin \phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta \sin \phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos \phi, \\ \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta.\end{aligned}\tag{B.60}$$

Metrickou formu pro kulovou soustavu dostaneme diferencováním rovnice (B.55),

$$\begin{aligned}dx &= \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi, \\ dy &= \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi, \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta,\end{aligned}\tag{B.61}$$

dosazením do rovnice (B.2) dostáváme kulovou metrickou formu

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.\tag{B.62}$$

Kovariantní (g_{ij}) i kontravariantní (g^{ij}) metrický tenzor a také (viz rovnice (B.11)) příslušné Laméovy koeficienty kulové souřadné soustavy budou,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r \sin \theta.\tag{B.63}$$

Podle rovnice (B.12) odvodíme nenulové *Christoffelovy symboly* kulové metriky,

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \Gamma_{\theta r}^\theta (\Gamma_{r\theta}^\theta) = \Gamma_{\phi r}^\phi (\Gamma_{r\phi}^\phi) = \frac{1}{r}, \Gamma_{\phi\phi}^r = -r \sin^2 \theta, \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \Gamma_{\phi\theta}^\phi (\Gamma_{\theta\phi}^\phi) = \cotg \theta. \quad (\text{B.64})$$

B.3.1 Diferenciální operátory

- *Gradient* skalární funkce $f(r, \theta, \phi)$ v kulové soustavě odvodíme podle rovnice (B.5), kam za jednotkové bázové vektory dosadíme výrazy z rovnice (B.60) a jednotlivé složky gradientu rozvineme řetězovým pravidlem pro derivace. Po rozepsání dostáváme

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f = & \left(\hat{r} \sin \theta \cos \phi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi \right) \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \\ & + \left(\hat{r} \sin \theta \sin \phi + \hat{\theta} \cos \theta \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi \right) \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \\ & + \left(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta \right) \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

Jednotlivé parciální derivace vypočítáme z rovnice (B.56),

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sin \theta \cos \phi, & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sin \theta \sin \phi, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{\cos \theta \sin \phi}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \phi}{r \sin \theta}. \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

Po dosazení a úpravě dostaneme výslednou podobu gradientu

$$\vec{\nabla} f = \hat{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right). \quad (\text{B.67})$$

Opět zde za jednotkové vektory kulové báze již nedosazujeme jejich složky z rovnice (B.57), kde jsme je „viděli“ ze soustavy kartézské. Analogicky k rovnici (B.6) (tenzorový součin), s použitím rovnice (B.67), je potom *gradient vektorového pole* $\vec{A}(r, \theta, \phi)$ v kulové soustavě definován jako tenzor 2. řádu ve tvaru

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) (A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}). \quad (\text{B.68})$$

Na rozdíl od válcové soustavy zde operátor gradientu již působí na všechny jednotkové bázové vektory (jejich derivace - viz rovnice (B.58)). Pomocí maticového formalismu můžeme

tenzor gradientu vektorového pole v kulové soustavě zapsat (Arfken & Weber, 2005)

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \begin{pmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ \frac{\partial A_r}{\partial r} & \frac{\partial A_\theta}{\partial r} & \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{r} \cotg \theta & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{A_r}{r} + \frac{A_\theta}{r} \cotg \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.69})$$

Stejného výsledku docílíme i v tomto případě např. s použitím formalismu *Christoffelových symbolů* (viz rovnice (B.37)) dle obecného vztahu (B.43), tento postup lze ovšem použít pouze pro ortogonální souřadné soustavy, zatímco postup podle rovnice (B.68) platí zcela obecně.

- *Divergence* vektoru (vektorového pole) $\vec{A}(r, \theta, \phi)$ je v kulových souřadnicích ve smyslu rovnice (B.68), analogicky k rovnici (B.8), definována jako skalár (skalární pole)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}. \quad (\text{B.70})$$

Porovnáním s rovnicí (B.69) opět vidíme, že divergence je stopou tenzoru gradientu vektorového pole.

- *Rotaci* vektoru (vektorového pole) $\vec{A}(r, \theta, \phi)$ v kulové soustavě, kde $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\phi = r \sin \theta$, odvodíme podle rovnice (B.20), v tomto případě dostaneme

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}. \quad (\text{B.71})$$

- *Laplacián* odvodíme (viz rovnice (B.22)), nahradíme-li v rovnici divergence (B.70) složky vektoru \vec{A} odpovídajícími složkami vektoru gradientu z rovnice (B.67), výsledný tvar, zapsaný v kompaktní formě bude

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (\text{B.72})$$

B.3.2 Plochy, objemy

Stejně jako v předchozích soustavách označme S_k souřadnicovou plochu s konstantní hodnotou souřadnice x_k , ohraničenou souřadnicovými křivkami $x_i, x_i + \Delta x_i, x_j, x_j + \Delta x_j$, $i \neq j \neq k$. V kulové soustavě půjde např. o plochu s konstantní hodnotou $r = r_0$, ohraničenou dvojicemi křivek (kružnicemi) se souřadnicemi $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ a $\phi = \phi_1, \phi = \phi_2$. Výpočet velikosti takové plochy již zde není vůbec triviální, půjde o část plochy s dvojnásobnou křivostí, ohraničenou dvěma rozbíhajícími se souřadnicovými plochami (v nichž leží křivky se souřadnicemi $\phi = \phi_1, \phi = \phi_2$) a dvěma kružnicemi se středy na společné ose, avšak ležícími v různých rovinách, kolmých na tuto osu (křivky se souřadnicemi $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$). Pokud budeme uvažovat jinou plochu, např. s konstantní souřadnicí $\phi = \phi_0$, ohraničenou souřadnicovými plochami $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, r =$

$r_1, r = r_2$, půjde o část kruhové výseče, omezené dvěma soustřednými kružnicemi. Při výpočtech velikostí těchto ploch vyjdeme opět z rovnice (B.23) a z rovnice (B.63), tedy

$$\begin{aligned} S_r &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}} d\theta d\phi = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = r^2 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \Delta\phi, \\ S_\theta &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{g_{\phi\phi} g_{rr}} d\phi dr = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} r \sin \theta d\phi dr = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \sin \theta \Delta\phi, \\ S_\phi &= \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{g_{rr} g_{\theta\theta}} dr d\theta = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r dr d\theta = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \Delta\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

V kulovém, tedy opět ortogonálním souřadném systému, budou všechny nediagonální členy submatic J'_{ij} (viz rovnice (B.23)) nulové. Označme tradičně V objem, vymezený souřadnicovými plochami s konstantními souřadnicemi $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2$, tvar takového útvaru odpovídá v tomto případě průniku jehlanu s koncentrickou sférickou mezivrstvou (mezikoulím). Vztah pro výpočet velikosti takového objemu bude mít dle rovnice (B.24) tvar

$$V = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \Delta\phi. \quad (\text{B.74})$$

V ortogonálním kulovém souřadném systému obdobně jako ve válcovém systému můžeme Jakobián J stanovit jako $\sqrt{g_{rr} g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}} = r^2 \sin \theta$. Tato metoda umožní při vhodném stanovení integračních mezí vypočítat v kulovém souřadnicovém systému velikosti jakkoli složitějších útvarů.

B.3.3 Vektory polohy, rychlosti a zrychlení

Při popisu vektorů v kulové soustavě vyjdeme z jejich základního popisu v soustavě kartézské, zahrneme všechny rovnice pro derivace jednotkových vektorů i složek vektorů (rovnice (B.55)-(B.60)). Polohový vektor a vektor rychlosti v kulové soustavě budou

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = r\hat{r}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r(\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta). \quad (\text{B.75})$$

Tento závěr lze opět očekávat, uvědomíme-li si, že polohový vektor vychází z počátku souřadnic. Vektory rychlosti a zrychlení jsou zároveň definovány jako

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} + v_\phi\hat{\phi}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} + a_\phi\hat{\phi}. \quad (\text{B.76})$$

Derivováním rovnice (B.75) podle času dostáváme jednotlivé složky vektoru zrychlení v kulové souřadné soustavě,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = \frac{dv_r}{dt} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{B.77})$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{dv_\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (\text{B.78})$$

$$a_\phi = r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta = \frac{dv_\phi}{dt} + \dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta. \quad (\text{B.79})$$

Protože $d/dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ (řetězové pravidlo pro derivování, v tomto případě pro parciální derivace $\vec{v} = \vec{v}(t, r, \theta, \phi)$), potom zrychlení, vyjádřené v kulové souřadné soustavě pomocí složek vektoru rychlosti bude

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + \underbrace{v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_r} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}, \quad (\text{B.80})$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \underbrace{v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r}, \quad (\text{B.81})$$

$$a_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \underbrace{v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r}. \quad (\text{B.82})$$

Bylo by jistě možné popsat mnohem více podrobností, např. operace s vektory a tenzory v rámci popisovaných soustav, atd., zde jsou ukázány alespoň některé postupy spíše z praktického pohledu. V dalších odstavcích ukážeme stručně alespoň jednu neortogonální souřadnou soustavu, jejíž popis byl do jisté míry vyvolán tvorbou numerické výpočetní sítě pro hydrodynamické modelování konkrétního fyzikálního jevu.

B.4 Eliptická soustava

Dále stručně uvedeme tři specifické ortogonální soustavy, které mohou souviset s předchozí tematikou nebo s uvedenými příklady (případně mohou mít zajímavé fyzikální uplatnění) - eliptickou, parabolickou, a „anuloidovou“. Dvourozměrná *eliptická* souřadná soustava (viz obrázek B.1) je definována dvěma třídami souřadnicových křivek s konstantními parametry $\sigma \in \langle 0, \infty \rangle$ a $\tau \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (toto značení není zcela ustálené, v různých literaturách může být různé), se dvěma společnými ohnisky v bodech $[-a, 0], [a, 0]$. V trojrozměrné verzi přibude ještě (válcová symetrie vzhledem k ose z , soustava se potom nazývá *eliptická-válcová*) azimutální úhlový parametr ϕ .

Transformační rovnice z kartézské do eliptické soustavy v trojrozměrném případě budou

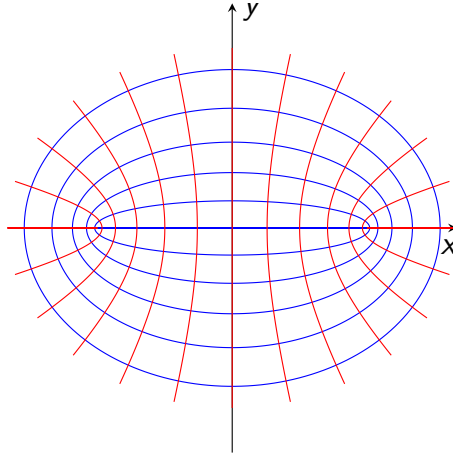
$$x = a \cosh \sigma \cos \tau \cos \phi, \quad y = a \cosh \sigma \cos \tau \sin \phi, \quad z = a \sinh \sigma \sin \tau. \quad (\text{B.83})$$

Z definice hyperbolického sinu a kosinu (1.20), (1.21) a z exponenciálního vyjádření sinu a kosinu (viz Eulerovy vztahy v příkladu 9.7) snadno odvodíme zpětné transformační vztahy, které ovšem budou mít (v pravotočivém pořadí proměnných σ, ϕ, τ) komplexní tvar (rovinu ρ - z , kde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, si můžeme představit jako Gaussovu rovinu),

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \left[\operatorname{argcosh} \frac{\rho + iz}{a} + \operatorname{argcosh} \frac{\rho - iz}{a} \right], \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \\ \tau &= \frac{1}{2i} \left[\operatorname{argcosh} \frac{\rho + iz}{a} - \operatorname{argcosh} \frac{\rho - iz}{a} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

Metrická forma takové eliptické soustavy bude mít tvar

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2 [(\cosh^2 \sigma \sin^2 \tau + \sinh^2 \sigma \cos^2 \tau) (d\sigma^2 + d\tau^2) + \cosh^2 \sigma \cos^2 \tau d\phi^2] = \\ &= a^2 [(\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) (d\sigma^2 + d\tau^2) + \cosh^2 \sigma \cos^2 \tau d\phi^2] = \\ &= a^2 [(\cosh^2 \sigma - \cos^2 \tau) (d\sigma^2 + d\tau^2) + \cosh^2 \sigma \cos^2 \tau d\phi^2]. \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$



Obrázek B.1: Schéma dvourozměrné eliptické soustavy v rovině x, y , společná ohniska jsou v bodech $[-a, 0], [a, 0]$. Modře vyznačené jsou eliptické křivky s konstantním parametrem σ , s posloupností (od nejužších k nejširším) $\sigma = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$, červeně vyznačené jsou hyperbolické křivky s konstantním parametrem τ , s posloupností (zprava do leva) od $\tau = 0$ do $\tau = \pi$ s intervalem $\pi/12$. V trojrozměrné verzi (viz popis) potom vyobrazenému směru y odpovídá směr z .

Kovariantní metrický tenzor g_{ij} a příslušné *Laméovy koeficienty* eliptické souřadné soustavy v pořadí směrů σ, ϕ, τ budou,

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} a^2 (\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) & 0 & 0 \\ 0 & a^2 \cosh^2 \sigma \cos^2 \tau & 0 \\ 0 & 0 & a^2 (\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.86})$$

$$h_\sigma = a \sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau}, \quad h_\phi = a \cosh \sigma \cos \tau, \quad h_\tau = a \sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau}. \quad (\text{B.87})$$

Kontravariantní metrický tenzor g^{ij} diagonální metriky bude tenzor s převrácenými hodnotami prvků na hlavní diagonále. Jakobián souřadnicové transformace z kartézské do eliptické soustavy bude

$$J = a^3 (\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) \cosh \sigma \cos \tau = a^3 (\cosh^2 \sigma - \cos^2 \tau) \cosh \sigma \cos \tau, \quad (\text{B.88})$$

jakobiánem zpětné transformace bude výraz J^{-1} . Nenulové *Christoffelovy symboly* eliptické metriky (viz rovnice (B.12)) budou (kde $\mathcal{S} = \cosh 2\sigma - \cos 2\tau$),

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma\sigma}^\sigma &= -\Gamma_{\tau\tau}^\sigma = \Gamma_{\sigma\tau}^\tau (\Gamma_{\tau\sigma}^\tau) = \frac{\sinh 2\sigma}{\mathcal{S}}, \quad \Gamma_{\tau\tau}^\tau = -\Gamma_{\sigma\sigma}^\tau = \Gamma_{\sigma\tau}^\sigma (\Gamma_{\tau\sigma}^\sigma) = \frac{\sin 2\tau}{\mathcal{S}}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^\sigma &= -\frac{\sinh 2\sigma \cos^2 \tau}{\mathcal{S}}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\tau = \frac{\cosh^2 \sigma \sin 2\tau}{\mathcal{S}}, \quad \Gamma_{\sigma\phi}^\phi (\Gamma_{\phi\sigma}^\phi) = \tanh \sigma, \quad \Gamma_{\phi\tau}^\phi (\Gamma_{\tau\phi}^\phi) = -\text{tg } \tau. \end{aligned} \quad (\text{B.89})$$

Diferenciální operátory gradientu skalární funkce, divergence a rotace vektoru a Laplaciánu budou mít (s použitím formalismu Laméových koeficientů pro ortogonální soustavy a také rovnic (B.14) a (B.20)) v této eliptické souřadné soustavě postupně tvar,

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}}{a \sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau}}, \frac{\frac{\partial f}{\partial \phi}}{a \cosh \sigma \cos \tau}, \frac{\frac{\partial f}{\partial \tau}}{a \sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau}} \right), \quad (\text{B.90})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = & \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} \cosh \sigma A_\sigma}{a (\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) \cosh \sigma} \right) + \\ & + \frac{\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}}{a \cosh \sigma \cos \tau} + \frac{\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} \cos \tau A_\tau}{a (\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) \cos \tau} \right)}{a (\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) \cos \tau}, \end{aligned} \quad (\text{B.91})$$

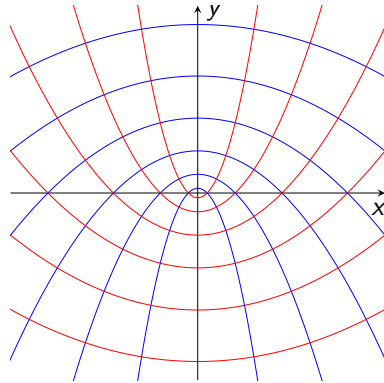
$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \frac{\cosh \sigma \frac{\partial}{\partial \tau} (\cos \tau A_\phi) - \sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} \frac{\partial A_\tau}{\partial \phi}}{a \sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} \cosh \sigma \cos \tau} \hat{\sigma} + \\ & + \frac{\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} A_\tau}{a (\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau)} \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} A_\sigma}{a (\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau)} \right)}{a (\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau)} \hat{\phi} + \\ & + \frac{\sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} \frac{\partial A_\sigma}{\partial \phi} - \cos \tau \frac{\partial}{\partial \sigma} (\cosh \sigma A_\phi)}{a \sqrt{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau} \cosh \sigma \cos \tau} \hat{\tau}, \end{aligned} \quad (\text{B.92})$$

$$\Delta = \frac{\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\cosh \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\cos \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right)}{a^2 (\sinh^2 \sigma + \sin^2 \tau) \cosh \sigma \cos \tau} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}}{a^2 \cosh^2 \sigma \cos^2 \tau}. \quad (\text{B.93})$$

Ostatní operátorové identity a geometrické parametry odvodíme analogickým způsobem jako v případě válcové nebo sférické souřadné soustavy.

B.5 Parabolická soustava

Parabolická souřadná soustava je ve dvourozměrné verzi (viz obrázek B.2) definována dvěma třídami parabolických souřadnicových křivek s konstantními parametry u a v (toto značení opět není zcela ustálené, v různých literaturách může být různé) a se společným ohniskem v bodě $[0, 0]$. V trojrozměrné verzi přibude ještě (válcová symetrie vzhledem k ose z , soustava se potom nazývá *parabolická-válcová*) azimutální úhlový parametr ϕ .



Obrázek B.2: Schéma dvourozměrné parabolické soustavy v rovině x, y . Modře vyznačené jsou křivky s konstantním parametrem $u = 0,5$ (nejúžší); 1; 1,5; 2; 2,5; 3 (nejširší), červeně vyznačené jsou křivky se stejnou posloupností konstantních parametrů v . V trojrozměrném případě (viz popis) potom vyobrazenému směru y odpovídá směr z .

Transformační rovnice v trojrozměrném případě budou

$$x = uv \cos \phi, \quad y = uv \sin \phi, \quad z = \frac{u^2 - v^2}{2}. \quad (\text{B.94})$$

Zpětné transformační vztahy v pravotočivém pořadí proměnných u, v, ϕ budou mít tvar

$$u = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z}, \quad v = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z}, \quad \phi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (\text{B.95})$$

Metrická forma parabolické soustavy bude mít tvar

$$ds^2 = (u^2 + v^2) (du^2 + dv^2) + u^2 v^2 d\phi^2. \quad (\text{B.96})$$

Kovariantní metrický tenzor g_{ij} a příslušné *Laméovy koeficienty* parabolické souřadné soustavy v pořadí směrů u, v, ϕ budou,

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} u^2 + v^2 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & 0 & u^2 v^2 \end{bmatrix}, \quad h_u = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_\phi = uv. \quad (\text{B.97})$$

Kontravariantní metrický tenzor g^{ij} diagonální metriky bude tenzor s převrácenými hodnotami prvků na hlavní diagonále. Jakobián souřadnicové transformace z kartézské do parabolické soustavy bude

$$J = uv (u^2 + v^2), \quad (\text{B.98})$$

jakobiánem zpětné transformace bude výraz J^{-1} . Nenulové *Christoffelovy symboly* parabolické metriky (viz rovnice (B.12)) budou,

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \Gamma_{uv}^v (\Gamma_{vu}^v) = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad \Gamma_{vv}^v = \Gamma_{uv}^u (\Gamma_{vu}^u) = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad \Gamma_{uu}^v = -\frac{v}{u^2 + v^2}, \quad \Gamma_{vv}^u = -\frac{u}{u^2 + v^2}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^u &= -\frac{uv^2}{u^2 + v^2}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^v = -\frac{u^2 v}{u^2 + v^2}, \quad \Gamma_{u\phi}^\phi (\Gamma_{\phi u}^\phi) = \frac{1}{u}, \quad \Gamma_{v\phi}^\phi (\Gamma_{\phi v}^\phi) = \frac{1}{v}. \end{aligned} \quad (\text{B.99})$$

Diferenciální operátory gradientu skalární funkce, divergence a rotace vektoru a Laplaciánu budou mít (s použitím formalismu Laméových koeficientů pro ortogonální soustavy a také rovnic (B.14) a (B.20)) v parabolické souřadné soustavě postupně tvar,

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{1}{uv} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right), \quad (\text{B.100})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\frac{\partial}{\partial u} (u\sqrt{u^2 + v^2} A_u)}{u(u^2 + v^2)} + \frac{\frac{\partial}{\partial v} (v\sqrt{u^2 + v^2} A_v)}{v(u^2 + v^2)} + \frac{1}{uv} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}, \quad (\text{B.101})$$

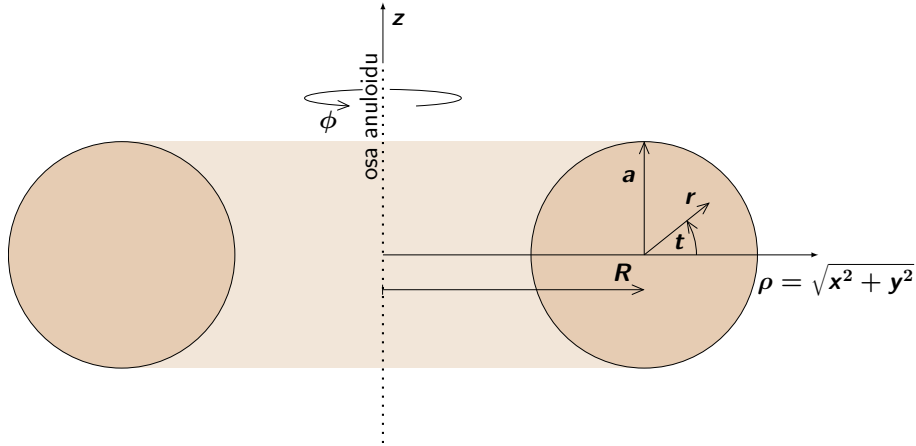
$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{\frac{\partial}{\partial v} (uv A_\phi) - \sqrt{u^2 + v^2} \frac{\partial A_v}{\partial \phi}}{uv\sqrt{u^2 + v^2}} \hat{u} + \frac{\sqrt{u^2 + v^2} \frac{\partial A_u}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial u} (uv A_\phi)}{uv\sqrt{u^2 + v^2}} \hat{v} + \\ &+ \frac{\frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{u^2 + v^2} A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{u^2 + v^2} A_u)}{u^2 + v^2} \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (\text{B.102})$$

$$\Delta = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{1}{u^2 v^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (\text{B.103})$$

Ostatní operátorové identity a geometrické parametry odvodíme obdobně jako v případě válcové nebo sférické souřadné soustavy.

B.6 „Anuloidová“ soustava

V tomto případě také nebudeme uvádět úplný popis všech vztahů a operátorů, i s ohledem na to, že daná soustava je příliš „specifická“, resp. týká se pouze jednoho typu geometrického tělesa, tzv. *anuloidu* (toroidu) - viz obrázek B.3 (popis soustavy rovněž odkazuje k příkladům 7.55 a 7.66). Ukážeme pouze, jak je možné flexibilně adaptovat principy, odvozené pro předchozí „univerzální“ geometrické systémy na (v podstatě jakýkoli) speciální případ. Anuloidem



Obrázek B.3: Příčný řez anuloidem v rovině ρ - z , jednotlivé směry odpovídají válcové soustavě.

nazýváme těleso, které vznikne rotací kružnice okolo osy, která leží v rovině této kružnice a nemá s ní společný bod (vznikne tak válcově symetrická trubice - torus, připomínající „duši pneumatiky“).

Označíme-li R poloměr osy toru, a poloměr trubice (toru), r radiální vzdálenost uvnitř trubice vzhledem k ose trubice, t úhlovou souřadnici vnitřku trubice a značení ostatních směrů bude odpovídat standardní cylindrické notaci, tj. ρ bude odpovídat radiální vzdálenosti od osy celého anuloidu, ϕ bude azimutální úhel anuloidu a z vertikální souřadnice (vše je vyznačené v obrázku B.3), můžeme za anuloidové (proměnné) souřadnice považovat r, ϕ, t (v pravotočivém smyslu). Transformační vztahy můžeme zapsat následovně,

$$x = (R + r \cos t) \cos \phi, \quad y = (R + r \cos t) \sin \phi, \quad z = r \sin t. \quad (\text{B.104})$$

Vztahy pro zpětnou transformaci budou mít v tomto případě tvar

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2}, \quad \phi = \arctg \frac{y}{x}, \quad t = \arcsin \frac{z}{\sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2}}. \quad (\text{B.105})$$

Kovariantní metrický tenzor g_{ij} a příslušné *Laméovy koeficienty* anuloidové souřadné soustavy budou,

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (R + r \cos t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix}, \quad h_r = 1, \quad h_\phi = R + r \cos t, \quad h_t = r. \quad (\text{B.106})$$

Vzhledem k tomu, že jde o diagonální metriku, bude kontravariantním metrickým tenzorem g^{ij} zpětné transformace rovněž tenzor s převrácenými hodnotami prvků na hlavní diagonále.

Jakobián souřadnicové transformace z kartézské do anuloidové soustavy tedy bude

$$J = r(R + r \cos t), \quad (\text{B.107})$$

jakobiánem zpětné transformace bude opět výraz J^{-1} . Ostatní parametry lze snadno odvodit analogickým způsobem jako v předchozích soustavách.

B.7 Příklady neortogonálních soustav

B.7.1 „Kuželová“ soustava

Přirozeným příkladem neortogonální souřadnicové soustavy může být „kuželová“ soustava (záměrně zde dávám název do uvozovek, protože regulérní tzv. kónická soustava má jiný význam, je ortogonální a je sestavená jiným způsobem, který zde dále neuvádím). Souřadnicové směry zde zavedené kuželové soustavy jsou: $z \in \langle 0, H \rangle$ - vertikální souřadnice, $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ - azimutální úhel, $\theta \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ - polární úhel a je definována následovně (viz obrázek B.4): Transformační rovnice z této *kuželové* do kartézské souřadnicové soustavy jsou

$$x = z \operatorname{tg} \theta \cos \phi, \quad y = z \operatorname{tg} \theta \sin \phi, \quad z = z. \quad (\text{B.108})$$

Pro zpětnou transformaci z kartézské do *kuželové* soustavy dostáváme²

$$z = z, \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}. \quad (\text{B.109})$$

Analogicky k rovnicím (B.30) a (B.57) budou mít jednotkové vektory *kuželové* báze v kartézské soustavě tvar (viz pravidla pro sčítání vektorů)

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}, \quad \hat{\phi} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi, \quad \hat{\theta} = (\hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi) \cos \theta - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta. \quad (\text{B.110})$$

Zpětnou transformací jednotkových bázových vektorů (viz rovnice (B.110)) dostáváme

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\hat{\mathbf{z}} \sin \theta + \hat{\theta}}{\cos \theta} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi, \quad \hat{\mathbf{y}} = \frac{\hat{\mathbf{z}} \sin \theta + \hat{\theta}}{\cos \theta} \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi, \quad \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{B.111})$$

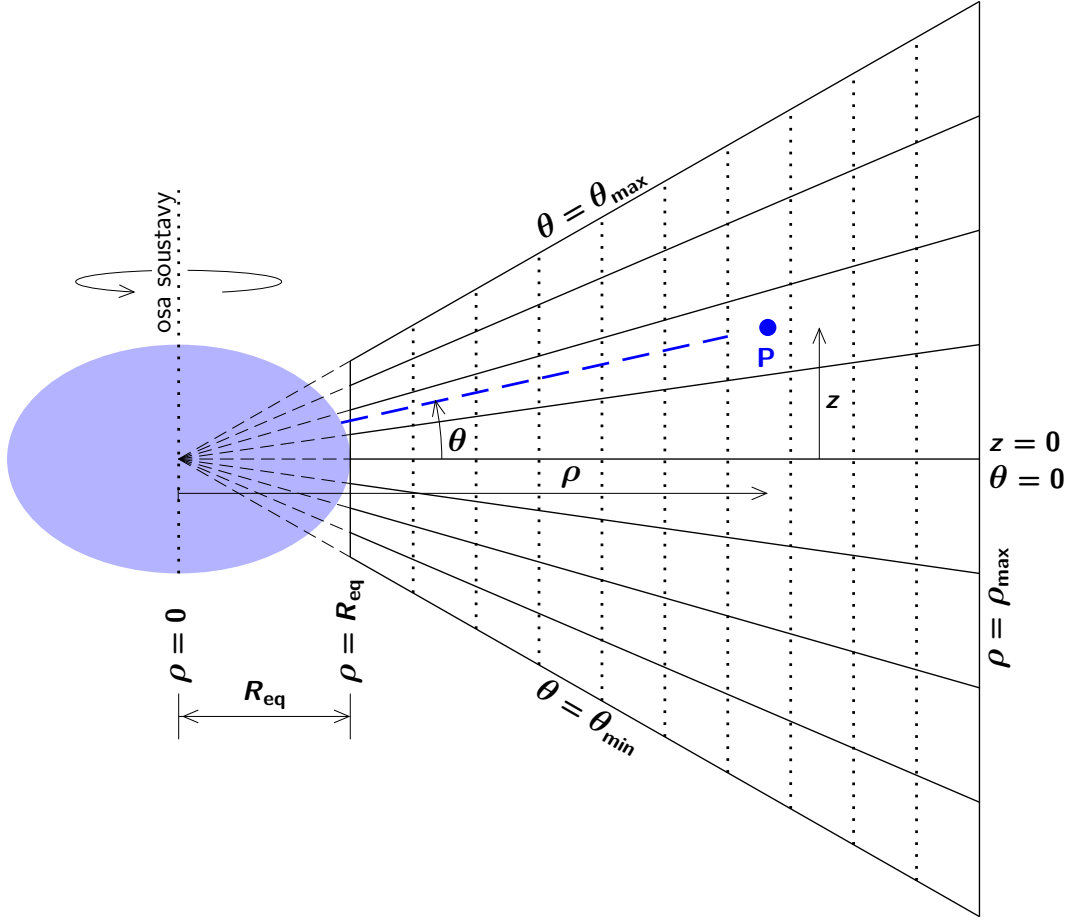
V takto definované *kuželové* soustavě je jediný konstantní bázový vektor $\hat{\mathbf{z}}$ (analogický kartézské nebo válcové soustavě), ostatní vektory báze jsou nekonstantní (bázový vektor $\hat{\phi}$ odpovídá stejnému vektoru válcové či kulové soustavy, bázový vektor $\hat{\theta}$ je analogický kulové soustavě).

Obrázek B.4 schématicky znázorňuje tuto soustavu ve vertikální rovině $z-\theta$ ($\phi = \text{konst.}$). Volné parametry jsou maximální vertikální rozměr (výška) $z = z_{\max} \equiv H$ a maximální polární úhel $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \theta_{\max}$, tedy právě s vyloučením krajního úhlu. .

Derivace bázových vektorů ve směru jednotlivých souřadnicových os budou (z rovnice (B.110))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial z} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial \phi} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial \theta} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} &= -\frac{\hat{\mathbf{z}} \sin \theta + \hat{\theta}}{\cos \theta}, & \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial z} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} &= \hat{\phi} \cos \theta, & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} &= -\frac{\hat{\mathbf{z}} + \hat{\theta} \sin \theta}{\cos \theta}. \end{aligned} \quad (\text{B.112})$$

²V této soustavě platí pro azimutální souřadnici ϕ úplně stejné transformační rovnice jako v případě válcových souřadnic.



Obrázek B.4: Schématický obrázek *kuželové* souřadné soustavy v rovině z - θ ($\phi = \text{konst.}$). Modrá čárkovaná čára, procházející obecným bodem P vyznačuje průnik souřadnicových ploch S_ϕ a S_θ .

Časové derivace bázových vektorů budou

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{z}}{\partial t} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hat{z} \sin \theta + \hat{\theta}}{\cos \theta} \dot{\phi}, \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \hat{\phi} \dot{\phi} \cos \theta - \frac{\hat{z} + \hat{\theta} \sin \theta}{\cos \theta} \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (\text{B.113})$$

Metrickou formu pro *kuželovou* soustavu odvodíme diferencováním rovnice (B.108),

$$\begin{aligned} dx &= \text{tg } \theta \cos \phi dz - z \text{tg } \theta \sin \phi d\phi + \frac{z \cos \phi}{\cos^2 \theta} d\theta, \\ dy &= \text{tg } \theta \sin \phi dz + z \text{tg } \theta \cos \phi d\phi + \frac{z \sin \phi}{\cos^2 \theta} d\theta, & dz &= dz, \end{aligned} \quad (\text{B.114})$$

dosazením do rovnice (B.2) dostáváme nediagonální *kuželovou* metrickou formu ve tvaru

$$ds^2 = \frac{dz^2}{\cos^2 \theta} + \frac{2z \sin \theta}{\cos^3 \theta} dz d\theta + z^2 \left(\text{tg}^2 \theta d\phi^2 + \frac{d\theta^2}{\cos^4 \theta} \right). \quad (\text{B.115})$$

Kovariantní a kontravariantní metrické tenzory soustavy se souřadnicemi v pořadí z, ϕ, θ budou

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 \theta} & 0 & \frac{z \sin \theta}{\cos^3 \theta} \\ 0 & z^2 \operatorname{tg}^2 \theta & 0 \\ \frac{z \sin \theta}{\cos^3 \theta} & 0 & \frac{z^2}{\cos^4 \theta} \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sin \theta \cos \theta}{z} \\ 0 & \frac{1}{z^2 \operatorname{tg}^2 \theta} & 0 \\ -\frac{\sin \theta \cos \theta}{z} & 0 & \frac{\cos^2 \theta}{z^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.116})$$

Jacobiho matice transformace z kartézské soustavy a matice inverzní transformace budou

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} \theta \cos \phi & -z \operatorname{tg} \theta \sin \phi & \frac{z \cos \phi}{\cos^2 \theta} \\ \operatorname{tg} \theta \sin \phi & z \operatorname{tg} \theta \cos \phi & \frac{z \sin \phi}{\cos^2 \theta} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sin \phi}{z \operatorname{tg} \theta} & \frac{\cos \phi}{z \operatorname{tg} \theta} & 0 \\ \frac{\cos \phi \cos^2 \theta}{z} & \frac{\sin \phi \cos^2 \theta}{z} & -\frac{\sin \theta \cos \theta}{z} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.117})$$

příslušné jakobiány tedy budou,

$$J = |\det J_{ij}| = \sqrt{|\det g_{ij}|} = \frac{z^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta}, \quad J^{-1} = |\det J_{ij}^{-1}| = \sqrt{|\det g^{ij}|} = \frac{\cos^3 \theta}{z^2 \sin \theta}. \quad (\text{B.118})$$

Nenulové Christoffelovy symboly *kuželové* metriky jsou

$$\Gamma_{z\phi}^{\phi} (\Gamma_{\phi z}^{\phi}) = \Gamma_{z\theta}^{\theta} (\Gamma_{\theta z}^{\theta}) = \frac{1}{z}, \quad \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} (\Gamma_{\theta\phi}^{\phi}) = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = 2 \operatorname{tg} \theta. \quad (\text{B.119})$$

Protože se nejedná o ortogonální metriku (vyjádřenou diagonálním metrickým tenzorem), nedefinujeme zde žádné *Laméovy* koeficienty.

Diferenciální operátory

- *Gradient* skalární funkce $f(z, \phi, \theta)$ v *kuželové* soustavě odvodíme stejným způsobem, jako v předchozích soustavách. Jednotlivé nenulové parciální derivace pro *kuželovou* soustavu z rovnice (B.109) budou

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial z} &= 1, & \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \phi}{z \operatorname{tg} \theta}, & \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \phi}{z \operatorname{tg} \theta}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{\cos \phi \cos^2 \theta}{z}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{\sin \phi \cos^2 \theta}{z}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{\sin \theta \cos \theta}{z}. \end{aligned}$$

Stejně jako v předchozích souřadných soustavách dostáváme gradient skalární funkce,

$$\vec{\nabla} f = \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z} + \hat{\phi} \frac{1}{z \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{\theta} \frac{\cos \theta}{z} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{1}{z \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\cos \theta}{z} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right). \quad (\text{B.120})$$

Stejným postupem jako v předchozích souřadných soustavách můžeme také získat tenzor gradientu *vektorového pole*, který můžeme pomocí maticového formalismu v *kuželové* soustavě zapsat,

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \begin{matrix} \hat{z} & \hat{\phi} & \hat{\theta} \\ \hat{z} \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial A_z}{\partial z} & \frac{\partial A_\phi}{\partial z} & \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{1}{z \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{z} & \frac{1}{z \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{A_\theta \cos \theta}{z \operatorname{tg} \theta} & \frac{1}{z \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{z \sin \theta} \\ \frac{\cos \theta}{z} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{z} & \frac{\cos \theta}{z} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} & \frac{\cos \theta}{z} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_\theta \sin \theta}{z} \end{array} \right) & \end{matrix}. \quad (\text{B.121})$$

- *Divergence* vektoru (vektorového pole) $\vec{A}(z, \phi, \theta)$ je v *kuželových* souřadnicích opět definována jako skalární součin vektoru gradientu s obecným vektorem, tedy

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\hat{z} \frac{\partial}{\partial z} + \hat{\phi} \frac{1}{z \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\theta} \frac{\cos \theta}{z} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot (A_z \hat{z} + A_\phi \hat{\phi} + A_\theta \hat{\theta}), \quad (\text{B.122})$$

kde ovšem, na rozdíl od ortogonálních systémů, nejsou obecně skalární součiny rozdílných vektorů báze nulové, tedy nemusí platit $e_i e^j = \delta_i^j$. Jmenovitě v tomto systému bude nenulový součin

$$e_i e^j = \hat{z} \cdot \hat{\theta} = -\sin \theta. \quad (\text{B.123})$$

Přímým výpočtem a po úpravách dostáváme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) + \cos \theta \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right]. \quad (\text{B.124})$$

Na rozdíl od ortogonálních soustav není v tomto případě *divergence* jednoduchou stopou tenzoru gradientu vektorového pole (B.157), nýbrž je třeba ještě přičíst prvky na vedlejší diagonále (respektive ty, které odpovídají nenulovým prvkům metrického tenzoru (B.152)), násobené skalárním součinem příslušných jednotkových vektorů, v tomto případě rovnici (B.159).

- *Rotaci* vektoru (vektorového pole) $\vec{A}(\rho, \phi, \theta)$ v *diskových* souřadnicích nemůžeme odvodit podle rovnice (B.20) (soustava není ortogonální), v tomto případě musíme provést přímý výpočet z definice rotace vektoru,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\theta} \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \times (A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_\theta \hat{\theta}), \quad (\text{B.125})$$

kde musíme nejprve provést všechny (nenulové) derivace jednotkových bázevých vektorů (viz rovnice (B.148)), potom vektorové součiny. Ponecháme-li pouze nenulové komponenty, tj. vypustíme-li nulové derivace jednotkových bázevých vektorů a také členy se stejnými bázevými vektory a tedy s nulovým vektorovým součinem, dostáváme explicitní výraz

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \hat{\rho} \times \hat{\phi} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} + \frac{A_\phi}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) + \hat{\phi} \times \hat{\theta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) + \\ & + \hat{\theta} \times \hat{\rho} \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} - \frac{A_\theta}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.126})$$

Vektorové součiny báзовých vektorů zde ovšem nebudou tak jednoduché, jako v případě ortogonálních soustav, na základě rovnice (B.146) pro sudé permutace dostaneme

$$\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \frac{\hat{\rho} \sin \theta + \hat{\theta}}{\cos \theta}, \quad \hat{\phi} \times \hat{\theta} = \frac{\hat{\rho} + \hat{\theta} \sin \theta}{\cos \theta}, \quad \hat{\theta} \times \hat{\rho} = \hat{\phi} \cos \theta. \quad (\text{B.127})$$

Po dosazení a úpravách dostaneme výslednou podobu rotace vektoru v *diskové* soustavě,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \hat{\rho} \left\{ \frac{\tan \theta}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) \right\} + \\ & \hat{\phi} \left\{ \frac{\cos \theta}{\rho} \left[\cos \theta \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) \right] \right\} + \\ & \hat{\theta} \left\{ \frac{1}{\rho \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] + \frac{\sin \theta}{\rho} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.128})$$

- *Laplacián* odvodíme z rovnice divergence (B.158), ve které nahradíme složky vektoru \vec{A} odpovídajícími složkami vektoru gradientu z rovnice (B.156), výsledný tvar (není nutné zde opakovat podrobný vektorový zápis, postup je zcela obdobný, jako v předchozích případech), zapsaný v kompaktní formě bude

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\cos \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin 2\theta}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta}. \quad (\text{B.129})$$

Plochy, objemy

Stejně jako v předchozích soustavách odvodíme velikosti základních ploch a základního objemu prostorové buňky, tj. plochy a objem, ohraničené jednotlivými souřadnicovými plochami (včetně stejného způsobu značení, další značení viz také obr. B.5). Objem jedné buňky souřadnicové sítě bude

$$V = \int_{z_1}^{z_2} z^2 dz \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta = \frac{z_2^3 - z_1^3}{6} (\phi_2 - \phi_1) \left(\frac{1}{\cos^2 \theta_2} - \frac{1}{\cos^2 \theta_1} \right). \quad (\text{B.130})$$

Determinanty submatic metrického tenzoru, odpovídající jednotlivým plochám prostorové buňky (způsob značení je popsán v rámci popisu válcové a kulové soustavy) budou

$$J'_z = \frac{z^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta}, \quad J'_\phi = \frac{z}{\cos^2 \theta}, \quad J'_\theta = \frac{z \sin \theta}{\cos^2 \theta} \quad (\text{B.131})$$

a plochy jednotlivých buněk sítě budou mít velikost

$$S_z = z^2 \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta = \frac{z^2}{2} (\phi_2 - \phi_1) \left(\frac{1}{\cos^2 \theta_2} - \frac{1}{\cos^2 \theta_1} \right), \quad (\text{B.132})$$

$$S_\phi = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \int_{z_1}^{z_2} z dz = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2} (\text{tg } \theta_2 - \text{tg } \theta_1), \quad (\text{B.133})$$

$$S_\theta = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \int_{z_1}^{z_2} z dz \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2} (\phi_2 - \phi_1) \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}. \quad (\text{B.134})$$

Vektory polohy, rychlosti a zrychlení

Při popisu vektorů v *kuželové* soustavě vyjdeme jako obvykle z jejich základního popisu v soustavě kartézské, zahrneme všechny rovnice pro derivace jednotkových vektorů i vektorových složek (rovnice (B.144)-(B.149)). Polohový vektor v *kuželové* soustavě bude

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \frac{\hat{z}z + \hat{\theta}z \sin \theta}{\cos^2 \theta}. \quad (\text{B.135})$$

Tento závěr již není tak názorný a snadno představitelný, jako v případě předchozích typů souřadnic. Vektor rychlosti \vec{v} bude

$$\vec{v} = \hat{z} \left(\frac{\dot{z} - z\dot{\theta} \operatorname{tg} \theta}{\cos^2 \theta} \right) + \hat{\phi} z \operatorname{tg} \theta \dot{\phi} + \hat{\theta} \left(\frac{\dot{z} \operatorname{tg} \theta}{\cos \theta} + \frac{z\dot{\theta}}{\cos^3 \theta} \right). \quad (\text{B.136})$$

Vektory rychlosti a zrychlení musí být zároveň definovány jako

$$\vec{v} = v_z \hat{z} + v_\phi \hat{\phi} + v_\theta \hat{\theta}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_z \hat{z} + a_\phi \hat{\phi} + a_\theta \hat{\theta}. \quad (\text{B.137})$$

Derivováním rovnice (B.172) podle času dostáváme jednotlivé složky vektoru zrychlení v *kuželové* souřadné soustavě

$$\begin{aligned} a_\rho &= \frac{\ddot{\rho} + \tan \theta [\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}(\dot{\rho} + \rho\dot{\theta} \tan \theta)]}{\cos^2 \theta} - \rho\dot{\phi}^2 = \frac{dv_\rho}{dt} - \rho\dot{\phi}^2 - \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \left(\dot{\rho} \tan \theta + \frac{\rho\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \right), \\ a_\phi &= \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} = \frac{dv_\phi}{dt} + \dot{\rho}\dot{\phi}, \\ a_\theta &= \frac{1}{\cos \theta} \left[\ddot{\rho} \tan \theta + \frac{\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}(\dot{\rho} + \rho\dot{\theta} \tan \theta)}{\cos^2 \theta} \right] = \frac{dv_\theta}{dt} - \frac{\tan \theta \dot{\theta}}{\cos \theta} \left(\dot{\rho} \tan \theta + \frac{\rho\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.138})$$

Z uvedených rovnic snadno zjistíme, že pro hlavní členy složek rychlosti platí

$$\dot{\rho} = v_\rho - v_\theta \sin \theta, \quad \dot{\phi} = \frac{v_\phi}{\rho}, \quad \dot{\theta} = \frac{(v_\theta - v_\rho \sin \theta) \cos \theta}{\rho}. \quad (\text{B.139})$$

Protože $d\vec{v}/dt = \partial\vec{v}/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v}$, můžeme napsat zrychlení, vyjádřené v *kuželové* souřadné soustavě, pomocí složek vektoru rychlosti

$$a_z = \frac{\partial v_\rho}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi} + v_\theta \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\rho} - \frac{v_\phi^2 + v_\theta^2}{\rho} + \frac{v_\rho v_\theta \sin \theta}{\rho}, \quad (\text{B.140})$$

$$a_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_\phi}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_\theta \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\phi} + \frac{v_\rho v_\phi}{\rho} - \frac{v_\phi v_\theta \sin \theta}{\rho}, \quad (\text{B.141})$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + v_\theta \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\theta} - \frac{v_\theta^2 \sin \theta}{\rho} + \frac{v_\rho v_\theta \sin^2 \theta}{\rho}. \quad (\text{B.142})$$

Členy na pravých stranách rovnic (B.176)-(B.178), spojené svorkou, vyjadřují (nelineární) advekci, zbývající členy reprezentující tzv. *fiktivní* (setrvačné) síly - odstředivá síla, Coriolisova síla, Eulerova síla.

Porovnáním rovnic (B.108) a (B.139) můžeme zapsat složky vektoru rychlosti v_ρ , v_ϕ , v_θ v diskové soustavě pomocí složek vektoru rychlosti $v_{\rho, \text{cyl}}$, $v_{\phi, \text{cyl}}$, v_z ve standardní válcové souřadné soustavě (odstavec B.2). Dostáváme tak vzájemný vztah mezi velikostmi složek rychlosti v obou soustavách,

$$v_\rho = v_{\rho, \text{cyl}} + \frac{z}{\rho} v_z = v_{\rho, \text{cyl}} + v_z \tan \theta, \quad v_\phi = v_{\phi, \text{cyl}}, \quad v_\theta = \frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho} v_z = \frac{v_z}{\cos \theta}. \quad (\text{B.143})$$

Vezmeme-li dále v úvahu vertikální hydrostatickou rovnováhu v takovém disku, $dP/dz = -\rho g_z$, kde P je skalární tlak a g_z je vertikální složka gravitačního zrychlení, dostáváme pro vertikální složku rychlosti $v_z = 0$. Pohybové rovnice (B.140)-(B.142) tak budou identické s odpovídajícími pohybovými rovnicemi (B.52)-(B.54) ve standardní válcové geometrii.

B.7.2 „Disková“ soustava

Podívejme se nyní na jiný možný geometrický případ, který může vyžadovat zavedení neortogonální souřadné soustavy. Jedná se o geometrický popis rozsáhlého plynného disku, rozprostírajícího se okolo velmi rychle rotující a tudíž silně zploštělé hvězdy, který je v blízkosti hvězdy velmi tenký a ve velkých vzdálenostech od hvězdy se výrazně vertikálně rozšiřuje. Zároveň je samozřejmě rotačně (válcově) symetrický. Obrázek B.5 schématicky znázorňuje tuto soustavu ve vertikální rovině ρ - θ ($\phi = \text{konst.}$), souřadnicové směry zde jsou: $\rho \in (0, \infty)$ - radiální cylindrická souřadnice, $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ - azimutální úhel, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ - elevační úhel, který je počítán v kladném a záporném směru od rovníkové roviny. I když elevační úhel může být definován v uvedeném intervalu (s vyloučením krajních bodů), prakticky vzhledem k charakteru popisovaných jevů přichází v úvahu interval $\theta \in \langle -\pi/4, \pi/4 \rangle$. Volné parametry (kromě zvoleného rovníkového poloměru hvězdy R_{eq}) jsou maximální cylindrická radiální vzdálenost $\rho = R_{\text{max}}$ a maximální elevační úhel, označený jako θ_{max} (zrcadlově k němu je θ_{min}). Soustava je válcově symetrická, osa symetrie je kolmá k rovině disku ($z = 0 \wedge \theta = 0$) a prochází středem hvězdy ($\rho = 0$). Můžeme ji tedy také nazývat například **cylindricko-kónickou soustavou**³ (standardní, tzv. *kónická* souřadná soustava znamená něco poněkud jiného - jde o ortogonální soustavu, definovanou soustřednými kulovými plochami a dvěma třídami vzájemně ortogonálních obecně eliptických kuželových ploch s osami x a z , s vrcholy v počátku souřadného systému).

Transformační rovnice z této *diskové* do kartézské souřadné soustavy jsou (pro lepší grafickou přehlednost budeme v této souřadné soustavě pro tangens používat v anglicky psané literatuře zavedené označení \tan , namísto českého tg)

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = \rho \tan \theta. \quad (\text{B.144})$$

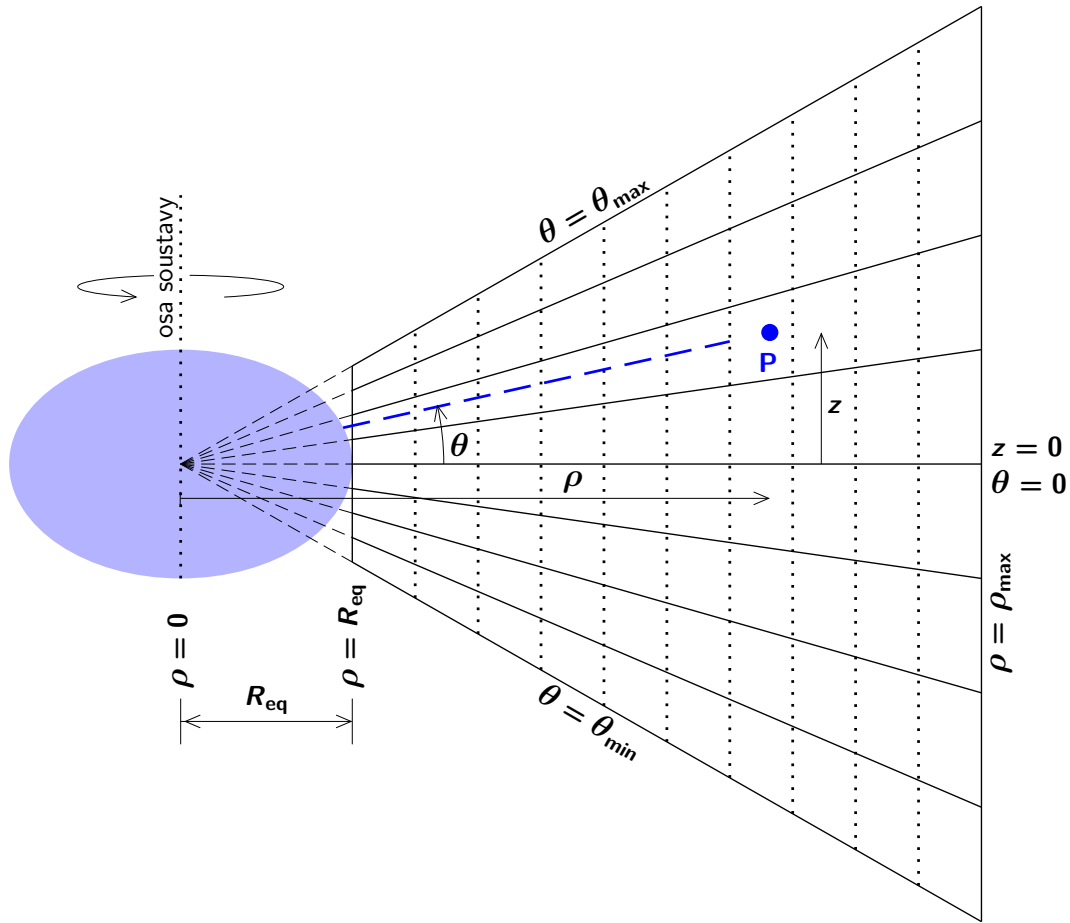
Pro zpětnou transformaci z kartézské do *diskové* soustavy dostáváme⁴

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctg \frac{y}{x}, \quad \theta = \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (\text{B.145})$$

Analogicky k rovnicím (B.30) a (B.57) budou mít jednotkové vektory *diskové* báze, zavedené jako *tečné vektory k souřadnicovým křivkám*, v kartézské soustavě tvar (viz pravidla pro sčítání

³Jako zkrácený pracovní název budeme v dalším textu používat výraz *disková soustava*. Radiální a azimutální souřadnice jsou shodné se soustavou válcovou, jednotlivé souřadnicové směry tedy značíme ρ , ϕ , θ , jednotkové bázové vektory značíme $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, kde vektor $\hat{\mathbf{r}}$ je de facto totožný s kulovým $\hat{\mathbf{r}}$, vektor $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ s válcovým (kulovým) $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ a vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ s válcovým (kartézským) $\hat{\mathbf{z}}$.

⁴V této soustavě platí pro azimutální souřadnici ϕ úplně stejné transformační rovnice jako v případě válcových souřadnic.



Obrázek B.5: Schématický obrázek *cylindricko-kónické* souřadné soustavy v rovině ρ - θ ($\phi = \text{konst.}$). Modrá čárkovaná čára, procházející obecným bodem P vyznačuje průnik souřadnicových ploch S_ϕ a S_θ . Rotačně zploštělá hvězda je zvýrazněná barevnou elipsou.

vektorů)

$$\hat{\mathbf{r}} = (\hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi) \cos \theta + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta, \quad \hat{\phi} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi, \quad \hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{B.146})$$

Zpětnou transformací jednotkových bázových vektorů (viz rovnice (B.146)) dostáváme

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\cos \phi}{\cos \theta} - \hat{\phi} \sin \phi - \hat{\mathbf{w}} \tan \theta \cos \phi, \quad \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\sin \phi}{\cos \theta} + \hat{\phi} \cos \phi - \hat{\mathbf{w}} \tan \theta \sin \phi, \quad \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{w}}. \quad (\text{B.147})$$

V *diskové* soustavě není žádný z vektorů báze konstantní. Derivace bázových vektorů ve směru jednotlivých souřadnicových os budou (z rovnice (B.146))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \rho} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \phi} &= \hat{\phi} \cos \theta, & \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} &= \frac{-\hat{\mathbf{r}} \sin \theta + \hat{\mathbf{w}}}{\cos \theta}, \\ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \rho} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} &= \frac{-\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{w}} \sin \theta}{\cos \theta}, & \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial \rho} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial \phi} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial \theta} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{B.148})$$

Časové derivace bázových vektorů budou

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \hat{\phi} \cos \theta \dot{\phi} + \frac{-\hat{\mathbf{r}} \sin \theta + \hat{\mathbf{w}}}{\cos \theta} \dot{\theta}, \\ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{-\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{w}} \sin \theta}{\cos \theta} \dot{\phi}, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial t} = \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (\text{B.149})$$

Metrickou formu pro *diskovou* soustavu odvodíme diferencováním rovnice (B.144),

$$dx = \cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi, \quad dy = \sin \phi d\rho + \rho \cos \phi d\phi, \quad dz = \tan \theta d\rho + \frac{\rho}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad (\text{B.150})$$

dosazením do rovnice (B.2) dostáváme nediagonální *diskovou* metrickou formu ve tvaru

$$ds^2 = \frac{d\rho^2}{\cos^2 \theta} + \frac{2\rho \sin \theta}{\cos^3 \theta} d\rho d\theta + \rho^2 \left(d\phi^2 + \frac{d\theta^2}{\cos^4 \theta} \right). \quad (\text{B.151})$$

Kovariantní a kontravariantní metrické tenzory soustavy se souřadnicemi v pořadí ρ, ϕ, θ budou

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 \theta} & 0 & \frac{\rho \sin \theta}{\cos^3 \theta} \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ \frac{\rho \sin \theta}{\cos^3 \theta} & 0 & \frac{\rho^2}{\cos^4 \theta} \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ -\frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} & 0 & \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.152})$$

Jacobiho matice transformace z kartézské soustavy a matice inverzní transformace budou

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \rho \cos \phi & 0 \\ \tan \theta & 0 & \frac{\rho}{\cos^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad J_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\frac{\sin \phi}{\rho} & \frac{\cos \phi}{\rho} & 0 \\ -\frac{\cos \phi \sin \theta \cos \theta}{\rho} & -\frac{\sin \phi \sin \theta \cos \theta}{\rho} & \frac{\cos^2 \theta}{\rho} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.153})$$

příslušné jakobiány tedy budou,

$$J = |\det J_{ij}| = \sqrt{|\det g_{ij}|} = \frac{\rho^2}{\cos^2 \theta}, \quad J^{-1} = |\det J_{ij}^{-1}| = \sqrt{|\det g^{ij}|} = \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2}. \quad (\text{B.154})$$

Nenulové Christoffelovy symboly *diskové* metriky jsou

$$\Gamma_{\rho\phi}^{\phi} (\Gamma_{\phi\rho}^{\phi}) = \Gamma_{\rho\theta}^{\theta} (\Gamma_{\theta\rho}^{\theta}) = \frac{1}{\rho}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} = -\rho, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = \sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = 2 \tan \theta. \quad (\text{B.155})$$

Protože se nejedná o ortogonální metriku (vyjádřenou diagonálním metrickým tenzorem), nedefinujeme zde žádné *Laméovy* koeficienty.

Diferenciální operátory

- *Gradient* skalární funkce $f(\rho, \phi, \theta)$ v *diskové* soustavě odvodíme stejným způsobem, jako v předchozích soustavách. Jednotlivé nenulové parciální derivace pro *diskovou* soustavu z

rovnice (B.145) budou

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \phi, & \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \phi}{\rho}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \phi, & \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \phi}{\rho}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)} = -\frac{\cos \phi \sin \theta \cos \theta}{\rho}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= -\frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)} = -\frac{\sin \phi \sin \theta \cos \theta}{\rho}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\cos^2 \theta}{\rho}.\end{aligned}$$

Stejně jako v předchozích souřadných soustavách dostáváme gradient skalární funkce,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{\boldsymbol{\omega}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \tan \theta \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \tan \theta \frac{\partial f}{\partial \rho} \right).\end{aligned}\quad (\text{B.156})$$

Stejným postupem jako v předchozích souřadných soustavách můžeme také získat tenzor gradientu *vektorového pole*, který můžeme pomocí maticového formalismu v *diskové* soustavě zapsat,

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \begin{matrix} & \hat{\boldsymbol{\rho}} & & \hat{\boldsymbol{\phi}} & & \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\rho}} & \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \right) & & \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \right) & & \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} \right) \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{\rho} \right) & & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{A_\rho}{\rho} - \frac{A_\theta \sin \theta}{\rho} \right) & & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} & \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{\rho} \right) & & \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) & & \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_\theta \sin \theta}{\rho} \right) \end{matrix}.\quad (\text{B.157})$$

- *Divergence* vektoru (vektorového pole) $\vec{A}(\rho, \phi, \theta)$ je v *diskových* souřadnicích opět definována jako skalární součin vektoru gradientu s obecným vektorem, tedy

$$\left[\hat{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\boldsymbol{\omega}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} - \tan \theta \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \cdot (A_\rho \hat{\mathbf{r}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + A_\theta \hat{\boldsymbol{\omega}}),\quad (\text{B.158})$$

kde ovšem, na rozdíl od ortogonálních systémů, nejsou obecně skalární součiny rozdílných vektorů báze nulové, tedy nemusí platit $e_i e^j = \delta_i^j$. Jmenovitě v tomto systému bude nenulový součin

$$e_i e^j = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} = \sin \theta, \quad (i \neq j) \quad (\text{B.159})$$

Přímým výpočtem a po úpravách dostáváme

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\cos \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} - \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \\ &+ \sin \theta (1 - \cos \theta) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} \right].\end{aligned}\quad (\text{B.160})$$

Na rozdíl od ortogonálních soustav není v tomto případě divergence jednoduchou stopou tenzoru gradientu vektorového pole (B.157), nýbrž je třeba ještě přičíst prvky na vedlejší diagonále (respektive ty, které odpovídají nenulovým prvkům metrického tenzoru (B.152)), násobené skalárním součinem příslušných jednotkových vektorů, v tomto případě rovnicí (B.159).

- *Rotaci* vektoru (vektorového pole) $\vec{A}(\rho, \phi, \theta)$ v *diskových* souřadnicích nemůžeme odvodit podle rovnice (B.20) (soustava není ortogonální), v tomto případě musíme provést přímý výpočet z definice rotace vektoru,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\theta} \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \times (A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_\theta \hat{\theta}), \quad (\text{B.161})$$

kde musíme nejprve provést všechny (nenulové) derivace jednotkových bázových vektorů (viz rovnice (B.148)), potom vektorové součiny. Ponecháme-li pouze nenulové komponenty, tj. vypustíme-li nulové derivace jednotkových bázových vektorů a také členy se stejnými bázovými vektory a tedy s nulovým vektorovým součinem, dostáváme explicitní výraz

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \hat{\rho} \times \hat{\phi} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} + \frac{A_\phi}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) + \hat{\phi} \times \hat{\theta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) + \\ & + \hat{\theta} \times \hat{\rho} \left(\frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} - \frac{A_\theta}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.162})$$

Vektorové součiny bázových vektorů zde ovšem nebudou tak jednoduché, jako v případě ortogonálních soustav, na základě rovnice (B.146) pro sudé permutace dostaneme

$$\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \frac{\hat{\rho} \sin \theta + \hat{\theta}}{\cos \theta}, \quad \hat{\phi} \times \hat{\theta} = \frac{\hat{\rho} + \hat{\theta} \sin \theta}{\cos \theta}, \quad \hat{\theta} \times \hat{\rho} = \hat{\phi} \cos \theta. \quad (\text{B.163})$$

Po dosazení a úpravách dostaneme výslednou podobu rotace vektoru v *diskové* soustavě,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \hat{\rho} \left\{ \frac{\tan \theta}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) \right\} + \\ & \hat{\phi} \left\{ \frac{\cos \theta}{\rho} \left[\cos \theta \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) \right] \right\} + \\ & \hat{\theta} \left\{ \frac{1}{\rho \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] + \frac{\sin \theta}{\rho} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.164})$$

- *Laplacián* odvodíme z rovnice divergence (B.158), ve které nahradíme složky vektoru \vec{A} odpovídajícími složkami vektoru gradientu z rovnice (B.156), výsledný tvar (není nutné zde opakovat podrobný vektorový zápis, postup je zcela obdobný, jako v předchozích případech), zapsaný v kompaktní formě bude

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\cos \theta}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin 2\theta}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta}. \quad (\text{B.165})$$

Plochy, objemy

Stejně jako v předchozích soustavách odvodíme velikosti základních ploch a základního objemu prostorové buňky, tj. plochy a objem, ohraničené jednotlivými souřadnicovými plochami (včetně

stejného způsobu značení, další značení viz také obr. B.5). Objem jedné buňky souřadnicové sítě bude

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 d\rho \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3} (\phi_2 - \phi_1) (|\tan \theta_2| - |\tan \theta_1|). \quad (\text{B.166})$$

Determinanty submatic metrického tenzoru, odpovídající jednotlivým plochám prostorové buňky (způsob značení je popsán v rámci popisu válcové a kulové soustavy) budou

$$J'_\rho = \frac{\rho^2}{\cos^2 \theta}, \quad J'_\phi = \frac{\rho}{\cos^2 \theta}, \quad J'_\theta = \frac{\rho}{\cos \theta} \quad (\text{B.167})$$

a plochy jednotlivých buněk sítě budou mít velikost

$$S_\rho = \rho^2 \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \rho^2 (\phi_2 - \phi_1) (|\tan \theta_2| - |\tan \theta_1|), \quad (\text{B.168})$$

$$S_\phi = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2} (|\tan \theta_2| - |\tan \theta_1|), \quad (\text{B.169})$$

$$S_\theta = \frac{1}{\cos \theta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2} \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{\cos \theta}. \quad (\text{B.170})$$

Vektory polohy, rychlosti a zrychlení

Při popisu vektorů v *diskové* soustavě vyjdeme jako obvykle z jejich základního popisu v soustavě kartézské, zahrneme všechny rovnice pro derivace jednotkových vektorů i vektorových složek (rovnice (B.144)-(B.149)). Polohový vektor v *diskové* soustavě bude

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \frac{\rho}{\cos \theta} \hat{r}. \quad (\text{B.171})$$

Tento závěr již není tak názorný a snadno představitelný, jako v případě předchozích typů souřadnic. Vektor rychlosti \vec{v} bude

$$\vec{v} = \frac{\dot{\rho}}{\cos \theta} \hat{r} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \frac{\rho \dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \hat{w}. \quad (\text{B.172})$$

Vektory rychlosti a zrychlení musí být zároveň definovány jako

$$\vec{v} = v_\rho \hat{r} + v_\phi \hat{\phi} + v_\theta \hat{w}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_\rho \hat{r} + a_\phi \hat{\phi} + a_\theta \hat{w}. \quad (\text{B.173})$$

Derivováním rovnice (B.172) podle času dostáváme jednotlivé složky vektoru zrychlení v *diskové* souřadné soustavě

$$\begin{aligned} a_\rho &= \frac{\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2}{\cos \theta} = \frac{dv_\rho}{dt} - \frac{\rho \dot{\phi}^2 + \dot{\rho} \dot{\theta} \tan \theta}{\cos \theta}, \\ a_\phi &= \rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi} = \frac{dv_\phi}{dt} + \dot{\rho} \dot{\phi}, \\ a_\theta &= \frac{1}{\cos \theta} \left[\frac{\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\theta} (\dot{\rho} + \rho \dot{\theta} \tan \theta)}{\cos \theta} + \rho \dot{\phi}^2 \sin \theta \right] = \frac{dv_\theta}{dt} + \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{\dot{\rho} \dot{\theta}}{\cos \theta} + \rho \dot{\phi}^2 \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (\text{B.174})$$

Z uvedených rovnic snadno zjistíme, že pro hlavní členy složek rychlosti platí

$$\dot{\rho} = v_\rho \cos \theta, \quad \dot{\phi} = \frac{v_\phi}{\rho}, \quad \dot{\theta} = \frac{v_\theta \cos^2 \theta}{\rho}. \quad (\text{B.175})$$

Protože $d\vec{v}/dt = \partial\vec{v}/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v}$, můžeme napsat zrychlení, vyjádřené v *diskové* souřadné soustavě, pomocí složek vektoru rychlosti

$$a_\rho = \frac{\partial v_\rho}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi} + v_\theta \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\rho} - \frac{v_\phi^2 + v_\theta^2}{\rho} + \frac{v_\rho v_\theta \sin \theta}{\rho}, \quad (\text{B.176})$$

$$a_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_\phi}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_\theta \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\phi} + \frac{v_\rho v_\phi}{\rho} - \frac{v_\phi v_\theta \sin \theta}{\rho}, \quad (\text{B.177})$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \underbrace{v_\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial \rho} + \frac{v_\phi}{\rho} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + v_\theta \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_\theta} - \frac{v_\theta^2 \sin \theta}{\rho} + \frac{v_\rho v_\theta \sin^2 \theta}{\rho}. \quad (\text{B.178})$$

Členy na pravých stranách rovnic (B.176)-(B.178), spojené svorkou, vyjadřují (nelineární) advekci, zbývající členy reprezentující tzv. *fiktivní* (setrvačné) síly - odstředivá síla, Coriolisova síla, Eulerova síla.

Porovnáním rovnic (B.144) a (B.175) můžeme zapsat složky vektoru rychlosti v_ρ , v_ϕ , v_θ v diskové soustavě pomocí složek vektoru rychlosti $v_{\rho, \text{cyl}}$, $v_{\phi, \text{cyl}}$, v_z ve standardní válcové souřadné soustavě (odstavec B.2). Dostáváme tak vzájemný vztah mezi velikostmi složek rychlosti v obou soustavách,

$$v_\rho = v_{\rho, \text{cyl}} + \frac{z}{\rho} v_z = v_{\rho, \text{cyl}} + v_z \tan \theta, \quad v_\phi = v_{\phi, \text{cyl}}, \quad v_\theta = \frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho} v_z = \frac{v_z}{\cos \theta}. \quad (\text{B.179})$$

Vezmeme-li dále v úvahu vertikální hydrostatickou rovnováhu v takovém disku, $dP/dz = -\rho g_z$, kde P je skalární tlak a g_z je vertikální složka gravitačního zrychlení, dostáváme pro vertikální složku rychlosti $v_z = 0$. Pohybové rovnice (B.176)-(B.178) tak budou identické s odpovídajícími pohybovými rovnicemi (B.52)-(B.54) ve standardní válcové geometrii.

Příloha C

Stručný úvod do parciálních diferenciálních rovnic ★

Parciální diferenciální rovnice obsahují na rozdíl od obyčejných diferenciálních rovnic (viz kapitola 3) parciální derivace podle více proměnných. Jedná se například o vývojové (transportní) rovnice prvního řádu (tzv. *Burgersova* rovnice), které jsou jednosměrné v čase a zpravidla směřují k nějakému ustálenému stavu, o rovnice druhého řádu, popisující termodynamické děje, tedy tzv. *parabolické* parciální diferenciální rovnice, o parciální diferenciální rovnice, popisující periodické děje (vlnová rovnice) - tzv. *hyperbolické* parciální diferenciální rovnice, nebo se jedná o tzv. *eliptické* parciální diferenciální rovnice (Poissonova rovnice, Laplaceova rovnice), atd. Dělení parciálních diferenciálních rovnic na jednotlivé typy je i z praktického hlediska podstatné, poněvadž každý z nich se zpravidla řeší jiným způsobem.

C.1 Parciální diferenciální rovnice 1. řádu

C.1.1 Homogenní parciální diferenciální rovnice 1. řádu

Nejjednoduššími parciálními diferenciálními rovnicemi jsou lineární homogenní rovnice 1. řádu dvou nezávisle proměnných x, y , vyskytují se zde tedy pouze první (parciální) derivace v lineárním výrazu

$$a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (\text{C.1})$$

Řešením takové rovnice bude funkce $u(x, y)$. Funkci dvou proměnných, reprezentovanou plochou, můžeme charakterizovat pomocí vrstevnic $x = x(s)$, $y = y(s)$, kde s je parametr. Funkce $u[x(s), y(s)]$ je tedy na vrstevnicích konstantní, můžeme ji považovat za funkci jedné proměnné (parametru s),

$$\frac{du[x(s), y(s)]}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} = 0, \quad (\text{C.2})$$

kdy hledáme řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic (tzv. *charakteristické soustavy*)

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y), \quad (\text{C.3})$$

★ jsou označeny odstavce a příklady, určené primárně studentům vyšších ročníků bakalářského studia

kteřé označujeme jako *charakteristiky* (také 1. integrál). Obecnou rovnici charakteristik potom definujeme jako $\varphi(x, y) = C$ a obecné řešení rovnice dvou proměnných lze zapsat jako $u(x, y) = \Phi[\varphi(x, y)]$, kdy funkci Φ lze považovat za libovolnou funkci jedné proměnné φ . V případě rovnice n nezávisle proměnných bude mít obecné řešení tvar

$$u(x_1, \dots, x_n) = \Phi[\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)]. \quad (\text{C.4})$$

● **Příklady řešení lineárních homogenních parciálních diferenciálních rovnic:**

1. Mějme zadanou jednoduchou homogenní rovnici dvou nezávisle proměnných,

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (\text{C.5})$$

charakteristická soustava tedy bude $dx/ds = x^2$, $dy/ds = y^2$, jejím řešením budou charakteristiky $-1/x = s + C_1$, $-1/y = s + C_2$ a po vyloučení parametru s dostáváme $1/y - 1/x = C = \varphi(x, y)$. Výsledné obecné řešení tedy bude

$$u(x, y) = \Phi\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right). \quad (\text{C.6})$$

2. Jiný jednoduchý příklad může představovat například homogenní rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (\text{C.7})$$

jejíž charakteristická soustava bude $dx/ds = 1$, $dy/ds = -6x^2$, kdy řešením první rovnice soustavy bude charakteristika $x = s + C_1$ a protože $dy = -6(s + C_1)^2 ds$, druhá charakteristika bude $y = -2s^3 - 6s^2 C_1 - 6s C_1^2 + C_2$. Vyjádříme-li z první charakteristiky $s = x - C_1$ a tento výraz dosadíme do druhé charakteristiky, dostáváme rovnici $y + 2x^3 = 2C_1^3 + C_2 = C = \varphi(x, y)$. Výsledné obecné řešení tedy bude

$$u(x, y) = \Phi(y + 2x^3). \quad (\text{C.8})$$

K tomuto výsledku lze ovšem dospět mnohem rychleji, uvědomíme-li si, že v případě homogenní rovnice dostaneme vydělením rovnic charakteristické soustavy obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu, tedy $(dy/ds)/(dx/ds) = dy/dx = -6x^2$ a tedy $y = -2x^3 + C$.

3. Mějme zadanou homogenní rovnici tří proměnných x, y, z ,

$$(z - y) \frac{\partial u}{\partial x} + (x - z) \frac{\partial u}{\partial y} + (y - x) \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (\text{C.9})$$

s okrajovou podmínkou $u(0, y, z) = yz$. Charakteristická soustava v tomto případě bude $dx/ds = (z - y)$, $dy/ds = (x - z)$, $dz/ds = (y - x)$, po jejím sečtení dostáváme $dx/ds + dy/ds + dz/ds = 0$ a po integraci podle s dostáváme $x + y + z = C_1$. Protože zadaná rovnice obsahuje tři proměnné, potřebujeme ještě jednu obecnou rovnici charakteristik, například vynásobením každé charakteristiky odpovídající proměnnou dostaneme výrazy $x dx/ds = (z - y)x$, $y dy/ds = (x - z)y$, $z dz/ds = (y - x)z$. Po jejím sečtení (opět s nulovým součtem), po její integraci podle s a po vynásobení dvěma (kdy $x' = dx/ds$, atd.) dostáváme $2xx' + 2yy' + 2zz' = 0$ a tedy $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. Obecné řešení bude

$$u(x, y, z) = \Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2). \quad (\text{C.10})$$

Po dosazení okrajové podmínky dostaneme $\Phi(y+z, y^2+z^2) = yz$, označíme-li $y+z = \xi$, $y^2+z^2 = \eta$, můžeme psát $\Phi(\xi, \eta) = (\xi^2 - \eta)/2$. Explicitním řešením okrajové úlohy bude funkce

$$u(x, y, z) = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = xy + xz + yz. \quad (\text{C.11})$$

● **Nelineární homogenní parciální diferenciální rovnice - neviskózní Burgersova rovnice:**

Jedná se o nelineární rovnici (nazývanou také *transportní* rovnice) funkce $u(t, x)$ dvou nezávisle proměnných t, x (kdy v prostorovém členu je tato funkce násobkem, tj. vyšší mocninou), která popisuje nelineární postupnou vlnu. V jednorozměrném případě má podobu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (\text{C.12})$$

Charakteristické rovnice vzhledem k rovnici (C.12) budou

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = u, \quad \text{a také} \quad \frac{du}{dt} = 0. \quad (\text{C.13})$$

Z první rovnice vyplývá $t = s$, jako parametr můžeme tedy zvolit přímo t . Třetí rovnice říká, že u je konstantní podél charakteristik, ze druhé rovnice potom vyplývá, že charakteristiky budou přímkami v rovině x, t . Řešení druhé a třetí charakteristické rovnice je jednoduché:

$$x = ut + C_1, \quad u = C_2. \quad (\text{C.14})$$

Uvědomíme-li si, že C_2 musí být funkcí C_1 , tedy $C_2 = C_2(C_1)$, substitucí $x - ut$ za C_1 dostáváme obecné řešení parciální diferenciální rovnice:

$$u(x, t) = C_2(x - ut) = \Phi(x - ut). \quad (\text{C.15})$$

Pro jednoznačné určení obecné funkce Φ zavedeme počáteční (okrajovou) podmínku, například $u(x, 0) = x$. Potom můžeme psát $u(x, 0) = C_2[x - u(x, 0) \cdot 0] = x$ a tedy $C_2(x) = x$. Dostáváme rovnici $u = x - ut$, výsledné jednoznačné řešení v tomto případě bude

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t}. \quad (\text{C.16})$$

C.1.2 Nehomogenní parciální diferenciální rovnice 1. řádu

Nehomogenní parciální diferenciální rovnici 1. řádu dvou nezávisle proměnných můžeme obecně zapsat ve tvaru

$$a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = f(x, y). \quad (\text{C.17})$$

Obdobně jako v případě homogenní rovnice můžeme psát

$$\frac{du[x(s), y(s)]}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} = f(x, y), \quad (\text{C.18})$$

kde potom hledáme řešení systému charakteristických rovnic

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y), \quad \frac{du}{ds} = f(x, y). \quad (\text{C.19})$$

• **Příklady řešení lineárních nehomogenních parciálních diferenciálních rovnic:**

1. Uvažujme jednoduchou nehomogenní parciální diferenciální rovnici dvou nezávisle proměnných

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x \text{ s okrajovou podmínkou } u(x, a) = 1, \quad (\text{C.20})$$

kde a je konstanta. Ze systému rovnic (C.19) vyplývá charakteristická soustava $dx/ds = 1$, $dy/ds = 1$, $du/ds = x$. Vydělením prvních dvou charakteristických rovnic a například třetí a první, dostáváme charakteristiky $C_1 = y - x$, $C_2 = u - x^2/2$. Dostáváme tedy obecné řešení parciální diferenciální rovnice ve tvaru:

$$\Phi(y - x, u - x^2/2) = 0, \quad (\text{C.21})$$

kde Φ je libovolná funkce charakteristik. Přepíšeme nyní rovnici pomocí okrajové podmínky jako funkci charakteristik a konstant, tj. $\Phi(a - x, 1 - x^2/2) = \Phi(C_1, C_2) = 0$, z první charakteristiky potom vyplývá $x = a - C_1$, z druhé charakteristiky dostáváme $C_2 = 1 - (a - C_1)^2/2$. Poslední výraz můžeme přepsat jako $1 - (a - C_1)^2/2 - C_2 = \Phi(C_1, C_2) = 0$, po dosazení do charakteristik dostaneme explicitní výraz $1 - [a^2 - 2a(y - x) + (y - x)^2]/2 - u + x^2/2 = 0$. Výsledné řešení okrajové úlohy pro zadanou rovnici potom bude

$$u(x, y) = xy + a(y - x) - \frac{y^2 + a^2}{2} + 1. \quad (\text{C.22})$$

2. Nehomogenní parciální diferenciální rovnice dvou nezávisle proměnných má tvar

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2, \text{ s okrajovou podmínkou } u(x, a) = x^2 - a^2, \quad (\text{C.23})$$

kde a je konstanta. Ze systému rovnic (C.19) vyplývá charakteristická soustava $dx/ds = y$, $dy/ds = -x$, $du/ds = y^2 - x^2$. Všimněme si, že v tom případě platí $y dx/ds + x dy/ds = du/ds$. Rovnice $dy/dx = -x/y$, její integrace dává první charakteristiku $x^2 + y^2 = C_1$. Rovnici $y dx/ds + x dy/ds = du/ds$ můžeme zapsat jako $d(xy)/ds = du/ds$, po její integraci dostáváme druhou charakteristiku $u - xy = C_2$. Obecné řešení parciální diferenciální rovnice bude mít tvar:

$$\Phi(x^2 + y^2, u - xy) = 0, \quad (\text{C.24})$$

kde Φ je libovolná funkce charakteristik. Přepíšeme nyní opět rovnici pomocí okrajové podmínky jako funkci charakteristik a konstant, tj. $\Phi(x^2 + a^2, x^2 - a^2 - ax) = \Phi(C_1, C_2) = 0$. Z první charakteristiky vyplývá $x = \pm\sqrt{C_1 - a^2}$, z druhé charakteristiky potom vyplyne rovnice pro obě charakteristiky ve tvaru $C_1 - 2a^2 \mp a\sqrt{C_1 - a^2} - C_2 = 0$. Po dosazení původních výrazů do charakteristik dostaneme explicitní výraz $x^2 + y^2 - 2a^2 \mp a(\pm\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}) - u + xy = 0$. Výsledné řešení okrajové úlohy pro zadanou rovnici bude

$$u(x, y) = x^2 + y^2 + xy - a\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} - 2a^2. \quad (\text{C.25})$$

• **Příklady řešení nelineárních nehomogenních parciálních diferenciálních rovnic:**

1. Nehomogenní nelineární parciální diferenciální rovnice dvou nezávisle proměnných má tvar

$$xu \frac{\partial u}{\partial x} + yu \frac{\partial u}{\partial y} = -xy, \text{ s okrajovou podmínkou } u\left(x, \frac{a^2}{x}\right) = h, \quad (\text{C.26})$$

kde a, h jsou konstanty. Ze systému rovnic (C.19) vyplývá charakteristická soustava $dx/ds = xu$, $dy/ds = yu$, $du/ds = -xy$. Integrace rovnice $dy/dx = y/x$ dává první charakteristiku $y/x = C_1$. Všimněme si, že v tomto případě platí $y dx/ds + x dy/ds = 2uxy$, tuto rovnici můžeme tedy zapsat jako $d(xy)/ds = -2u du/ds = -du^2/ds$, po její integraci dostáváme druhou charakteristiku $u^2 + xy = C_2$. Obecné řešení parciální diferenciální rovnice bude mít tvar:

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, u^2 + xy\right) = 0, \quad (\text{C.27})$$

kde Φ je libovolná funkce charakteristik. Přepíšeme nyní opět rovnici pomocí okrajové podmínky jako funkci charakteristik a konstant, tj. $\Phi(a^2/x^2, h^2 + a^2) = \Phi(C_1, C_2) = 0$. Z první charakteristiky vyplývá $x = \pm\sqrt{a^2/C_1}$, z druhé charakteristiky potom vyplyne rovnice pro obě charakteristiky ve tvaru $h^2 + a^2 - C_2 = 0$. Po dosazení původních výrazů do charakteristik dostaneme explicitní výraz $h^2 + a^2 - u^2 - xy = 0$. Výsledné řešení okrajové úlohy pro zadanou rovnici bude

$$u(x, y) = \sqrt{h^2 + a^2 - xy}. \quad (\text{C.28})$$

2. Nehomogenní nelineární parciální diferenciální rovnice dvou nezávisle proměnných má tvar

$$yu \frac{\partial u}{\partial x} - xu \frac{\partial u}{\partial y} = x - y, \text{ s okrajovou podmínkou } u(x, x) = h, \quad (\text{C.29})$$

kde h je konstanta. Ze systému rovnic (C.19) vyplývá charakteristická soustava $dx/ds = yu$, $dy/ds = -xu$, $du/ds = x - y$. Opět zde integrace rovnice $dy/dx = -x/y$ dává první charakteristiku $x^2 + y^2 = C_1$. Rovnici $dx/ds + dy/ds = d(x + y)/ds$ můžeme zapsat jako $d(x + y)/ds = u(x - y) = u du/ds$, po její integraci dostáváme druhou charakteristiku $u^2 + 2x + 2y = C_2$. Obecné řešení parciální diferenciální rovnice bude mít tvar:

$$\Phi(x^2 + y^2, u^2 + 2x + 2y) = 0, \quad (\text{C.30})$$

kde Φ je libovolná funkce charakteristik. Přepíšeme nyní opět rovnici pomocí okrajové podmínky jako funkci charakteristik a konstant, tj. $\Phi(2x^2, h^2 + 4x) = \Phi(C_1, C_2) = 0$. Z první charakteristiky vyplývá $x = \pm\sqrt{C_1/2}$, z druhé charakteristiky potom vyplyne rovnice pro obě charakteristiky ve tvaru $h^2 \pm 4\sqrt{C_1/2} - C_2 = 0$. Po dosazení původních výrazů do charakteristik dostaneme explicitní výraz $h^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} - u^2 - 2x - 2y = 0$. Výsledné řešení okrajové úlohy pro zadanou rovnici bude

$$u(x, y) = \sqrt{2\sqrt{2}(x^2 + y^2) - 2x - 2y + h^2}. \quad (\text{C.31})$$

Analogickým způsobem lze řešit (téměř) jakoukoli parciální diferenciální rovnici 1. řádu. Podstatné je vždy nalezení jisté symetrie v zadání rovnice, která umožní sestavení charakteristických rovnic a nalezení příslušných charakteristik. Zájemce o hlubší porozumění této problematice odkazují například na skripta [Arsenin \(1977\)](#); [Pospíšil \(2006\)](#); [Franců \(2011\)](#).

C.2 Parciální diferenciální rovnice 2. řádu

C.2.1 Klasifikace parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu

Obecná parciální diferenciální rovnice 2. řádu funkce $u(x, y)$ (pro jednoduchost se omezíme pouze na funkce dvou proměnných) má tvar:

$$\begin{aligned} a_{11}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{12}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + b_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u + d(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

nebo, ve zjednodušené notaci, používané v dalším textu ($u_x = \partial u / \partial x$, $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$, atd.) :

$$\begin{aligned} a_{11}(x, y)u_{xx} + a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + \\ + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u + d(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Typ rovnice (v případě funkce dvou proměnných) je určen následujícími podmínkami:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \quad \text{rovnice parabolická,} \quad (\text{C.34})$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0 \quad \text{rovnice hyperbolická,} \quad (\text{C.35})$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \quad \text{rovnice eliptická.} \quad (\text{C.36})$$

Úpravou obecného tvaru rovnice transformací do nových proměnných prostřednictvím kvadratické formy lze získat kanonický tvar rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}(x, y)u_x - a_{22}(x, y)u_{yy} + \dots = 0 & \quad \text{rovnice parabolická,} \\ a_{11}(x, y)u_{xx} - a_{22}(x, y)u_{yy} + \dots = 0 & \quad \text{rovnice hyperbolická,} \\ a_{11}(x, y)u_{xx} + a_{22}(x, y)u_{yy} + \dots = 0 & \quad \text{rovnice eliptická.} \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

V případě rovnice více proměnných je situace komplikovanější, typ rovnice je jednoznačně určen tzv. *maticí kvadratické formy*, resp. druhem její *definitnosti*. Příkladem transformace obecného polynomu druhého stupně na kvadratickou formu může být:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2xy + 2y^2 &= 3 \left(x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{2}{3}y^2 \right) = 3 \left[\left(x + \frac{1}{3}y \right)^2 - \frac{1}{9}y^2 + \frac{2}{3}y^2 \right] = \\ &= 3 \left[\left(x + \frac{1}{3}y \right)^2 + \frac{5}{9}y^2 \right] = 3 \left(x + \frac{1}{3}y \right)^2 + \frac{5}{3}y^2. \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Substitucí $\begin{cases} x + \frac{1}{3}y = \xi_1 \\ y = \xi_2 \end{cases}$ dostáváme $3\xi_1^2 + \frac{5}{3}\xi_2^2$, což lze zapsat jako:

$$(\xi_1 \quad \xi_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.39})$$

Obdobným způsobem můžeme transformovat obecnou parciální diferenciální rovnici 2. řádu: pokud je diagonální matice kvadratické formy pozitivně nebo negativně definitní, tj. její vlastní hodnoty (viz rovnice (2.17)-(2.19)) jsou buď všechny kladné nebo všechny záporné, potom se jedná o rovnici eliptickou. Pokud je diagonální matice kvadratické formy indefinitní (tj. kdy

některé vlastní hodnoty jsou kladné, některé záporné), potom se jedná buď o rovnici hyperbolickou (odlišuje se znaménko pouze jedné vlastní hodnoty) nebo ultrahyperbolickou. Pokud je diagonální matice kvadratické formy semidefinitní (některé vlastní hodnoty jsou nulové), potom se jedná se o rovnici parabolickou (jedna vlastní hodnota je nulová), případně tzv. parabolickou v širším smyslu.

Kanonický tvar jednotlivých typů rovnic, například pro obecnou funkci čtyř proměnných $u = u(x_1, x_2, x_3, x_4)$, vypadá potom schématicky následovně:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \pm \frac{\partial u}{\partial x_4} + \dots = 0 \quad \text{parabolická,} \quad (\text{C.40})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \pm \frac{\partial u}{\partial x_3} \pm \frac{\partial u}{\partial x_4} + \dots = 0 \quad \text{parabolická v širším smyslu,} \quad (\text{C.41})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} + \dots = 0 \quad \text{hyperbolická,} \quad (\text{C.42})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} + \dots = 0 \quad \text{ultrahyperbolická,} \quad (\text{C.43})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} + \dots = 0 \quad \text{eliptická.} \quad (\text{C.44})$$

V dalším výkladu ukážeme řešení některých vybraných parciálních diferenciálních rovnic parabolických, hyperbolických a eliptických.

• Fyzikální podoba parabolických parciálních diferenciálních rovnic

Nejobvyklejší tvar parabolické parciální diferenciální rovnice (např. rovnice vedení tepla) je:

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + \dots), \quad (\text{C.45})$$

kde „konstanta“ k (což nemusí být doslova konstanta, člen k pouze neobsahuje funkci proměnných x, y, \dots) má význam: $k = \lambda/(c_p \rho)$, kde λ znamená součinitel tepelné vodivosti, c_p tepelnou kapacitu (při stálém tlaku) a ρ hustotu.

C.2.2 Metoda fundamentálního řešení (metoda Greenovy funkce)

Řešení rovnic pomocí formalismu Fourierovy transformace a konvoluce funkcí, zavedených v odstavci 10.2, si detailněji ukážeme na následujících řešených příkladech (v dalším textu budeme vždy uvádět zkratkami LS levou stranu rovnice a PS její pravou stranu) parabolických parciálních diferenciálních rovnic:

• Homogenní rovnice, nehomogenní obecná počáteční podmínka:

Homogenní úlohou rozumíme rovnici bez zdroje tepla, tj. bez pravé strany, nehomogenní pravá strana znamená dodatečný zdroj tepla. V případě homogenních počátečních respektive okrajových podmínek je příslušná funkce v čase $t = 0$, případně na definovaných okrajích, nulová. Uvažujme rovnici ve tvaru

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad (\text{C.46})$$

s nehomogenní počáteční podmínkou $u(0, x) = \varphi(x)$. Levá a pravá strana rovnice budou

$$\text{LS: } \widehat{u}_t(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t, x) e^{-ix\xi} dx = \widehat{u}_t(t, x), \quad (\text{C.47})$$

$$\text{PS: } \widehat{u}_{xx}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(t, x) e^{-ix\xi} dx = \underbrace{\left[u_x e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{\infty}}_0 + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} u_x(t, x) e^{-ix\xi} dx = -\xi^2 \widehat{u}(\xi). \quad (\text{C.48})$$

Dostáváme tedy obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu s jednoduše separovatelnými proměnnými: $\widehat{u}_t(\xi) = -a^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi)$, jejíž řešení snadno určíme jako $\widehat{u}(\xi) = C e^{-a^2 \xi^2 t}$, respektive $\widehat{u}(t, \xi) = C(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}$. Funkci $C(\xi)$ určíme z počáteční podmínky (C.46): $\widehat{u}(0, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = C(\xi)$, $\widehat{u}(t, \xi) = C(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}$. Zavedeme funkci $G(t, x)$ (Greenovu funkci) jako zpětný Fourierův obraz (vzor) funkce $\widehat{G}(t, \xi) = e^{-a^2 \xi^2 t}$, dostáváme tedy $\widehat{u}(t, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi) \cdot \widehat{G}(t, \xi) = (\varphi * G)(t, \xi)$, a tedy $u(t, x) = (\varphi * G)(t, x)$:

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}(t, \xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2 \xi^2 t - i\xi x)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a\xi\sqrt{t} - \frac{ix}{2a\sqrt{t}})^2} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} d\xi = \left\{ \begin{array}{l} a\xi\sqrt{t} - \frac{ix}{2a\sqrt{t}} = \eta \\ a\sqrt{t} d\xi = d\eta \end{array} \right\} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = G(x, t). \quad (\text{C.49}) \end{aligned}$$

Výsledné řešení zadané parabolické parciální diferenciální rovnice potom bude

$$u(t, x) = (\varphi * G)(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) G(t, x - y) dy = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy. \quad (\text{C.50})$$

V obecném případě, kdy $u(\tau, x) = \varphi(x)$ dostáváme výslednou funkci ve tvaru:

$$u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}} dy. \quad (\text{C.51})$$

• Nehomogenní rovnice s homogenní počáteční podmínkou:

Předpokládejme nehomogenní rovnici ve tvaru

$$u_t = a^2 u_{xx} + f, \quad t > 0, \quad (\text{C.52})$$

s homogenní počáteční podmínkou $u(0, x) = 0$. Její řešení předpokládáme ve tvaru

$$u(t, x) = \int_0^t w(t, x, \sigma) d\sigma, \quad (\text{C.53})$$

Její časová derivace dává

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= w(t, x, t) + \int_0^t w_t(t, x, \sigma) d\sigma, \quad u_{xx}(t, x) = \int_0^t w_{xx}(t, x, \sigma) d\sigma, \\ w(t, x, t) + \int_0^t w_t(t, x, \sigma) d\sigma &= a^2 \int_0^t w_{xx}(t, x, \sigma) d\sigma + f(t, x). \quad (\text{C.54}) \end{aligned}$$

Předpokládáme-li

$$\int_0^t [w_t(t, x, \sigma) - a^2 w_{xx}(t, x, \sigma)] d\sigma = f(t, x) - w(t, x, t) = 0, \quad (\text{C.55})$$

bude její řešení $w_t(t, x, \sigma) = a^2 w_{xx}(t, x, \sigma)$ s počáteční podmínkou $w(\sigma, x, \sigma) = f(\sigma, x)$ mít tvar

$$w(t, x, \sigma) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\sigma)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\sigma)}} dy. \quad (\text{C.56})$$

Výsledné řešení bude

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\sigma, y)}{\sqrt{t-\sigma}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\sigma)}} d\sigma dy. \quad (\text{C.57})$$

• **Nehomogenní rovnice s nehomogenní počáteční podmínkou:**

Předpokládejme nehomogenní rovnici ve tvaru

$$u_t = a^2 u_{xx} + f, \quad t > 0, \quad (\text{C.58})$$

s nehomogenní počáteční podmínkou $u(0, x) = \varphi(x)$. Z linearity vyplývá, že funkci u lze rozdělit na dvě funkce $u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$, kdy

$$1. \text{ funkce:} \quad v_t(t, x) = a^2 v_{xx} + f, \quad v(0, x) = 0, \quad (\text{C.59})$$

$$2. \text{ funkce:} \quad w_t(t, x) = a^2 w_{xx}, \quad w(0, x) = \varphi(x). \quad (\text{C.60})$$

Z počáteční podmínky $\varphi(x) = v(0, x) + w(0, x) = w(0, x)$, kde ovšem $v(0, x) = 0$, dostáváme:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) G(x, y, t) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, y) G(x, y, t - \sigma) d\sigma dy = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\sigma, y)}{\sqrt{t-\sigma}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\sigma)}} d\sigma dy. \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

C.2.3 Řešení parabolických parciálních diferenciálních rovnic Fourierovou metodou (metodou separace proměnných)

Metodu, která se velmi často používá při řešení parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu, si opět detailněji ukážeme na řešených příkladech parabolických parciálních diferenciálních rovnic.

• **Homogenní jednorozměrná úloha, homogenní okrajové podmínky, obecná počáteční podmínka:**

Předpokládejme rovnici ve tvaru

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \langle 0, \ell \rangle, \quad (\text{C.62})$$

s podmínkami $u(0, x) = \varphi(x)$, $u(t, 0) = 0 = u(t, \ell)$. Předpokládejme dále, že funkci $u(t, x)$ lze vyjádřit jako součin dvou funkcí jen jedné z obou proměnných, $u(t, x) = T(t)X(x)$. Rovnici (C.62) lze potom vyjádřit následujícím způsobem: $\dot{T}X = a^2 T X''$, rovnici následně separujeme do podoby

$$\frac{\dot{T}}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda. \quad (\text{C.63})$$

Řešení PS potom bude $X'' + \lambda X = 0$, z toho vyplývá $X(x) = v(x) = A \sin \sqrt{\lambda}x + B \cos \sqrt{\lambda}x$. Zahrnutím okrajové podmínky získáme příslušné koeficienty PS: $X(0) = B = 0$, $X(\ell) = A \sin \sqrt{\lambda}\ell = 0$, a tedy

$$\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{\ell}, \quad (\text{C.64})$$

kde konstanta A může nabývat libovolné hodnoty (např. $A = 1$). PS můžeme tedy zapsat jako

$$X_k = v_k = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{C.65})$$

LS řešíme jako obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu, $\dot{T}/T = -a^2\lambda$, z toho vyplývá

$$T = C_k e^{-a^2\lambda_k t} = C_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t}. \quad (\text{C.66})$$

Obě takto nalezené separátní funkce potom spojíme do součiny:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{C.67})$$

Tzv. Fourierův koeficient C_k získáme z počáteční podmínky,

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k v_k, \quad \text{tedy} \quad C_k = \frac{1}{\|v_k\|^2} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) v_k(\xi) d\xi. \quad (\text{C.68})$$

Normu $\|v_k\|$ řešíme jako normu spojitě definovaného vektoru (viz rovnice (2.1)), tedy

$$\|v_k\|^2 = \int_0^{\ell} v_k^2(\xi) d\xi = \int_0^{\ell} \sin^2\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) d\xi = \frac{\ell}{2}, \quad C_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) d\xi. \quad (\text{C.69})$$

Výslednou funkci můžeme potom zapsat ve tvaru

$$u(t, x) = \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\ell} \left[\varphi(\xi) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) d\xi \right] e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{C.70})$$

• **Homogenní dvourozměrná úloha, homogenní okrajové podmínky, obecná počáteční podmínka:**

Vedení tepla v pravoúhlých směrech: předpokládejme rovnici ve tvaru

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad t > 0, \quad x \in \langle 0, \ell_1 \rangle, \quad y \in \langle 0, \ell_2 \rangle, \quad (\text{C.71})$$

s podmínkami $u(0, x, y) = \varphi(x, y)$, $u(t, 0, y) = 0 = u(t, \ell_1, y)$, $u(t, x, 0) = 0 = u(t, x, \ell_2)$. Předpokládáme součin tří funkcí (srovnej rovnici (C.63)), kdy každá je funkcí jen jedné ze tří proměnných: $u = T(t)X(x)Y(y)$. Obě strany rovnice (C.71) lze potom vyjádřit následovně:

$$\dot{T}XY = a^2(TX''Y + TXY''), \quad \text{tedy} \quad \frac{\dot{T}}{a^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -(\lambda_1 + \lambda_2). \quad (\text{C.72})$$

Dále předpokládáme $X''/X = -\lambda_1$, $Y''/Y = -\lambda_2$, což je opodstatněné vzhledem k následným úpravám LS rovnice. Dostáváme tak řešení PS ve tvaru

$$X_m = \sin\left(\frac{m\pi}{\ell_1}x\right), \quad Y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{\ell_2}y\right). \quad (\text{C.73})$$

LS opět řešíme jako obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu

$$T = C_{mn} e^{-a^2 \left[\left(\frac{m\pi}{\ell_1} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_2} \right)^2 \right] t}. \quad (\text{C.74})$$

Všechny tři nalezené separátní funkce potom spojíme do součinnu

$$u(t, x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{mn} e^{-a^2 \left[\left(\frac{m\pi}{\ell_1} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_2} \right)^2 \right] t} \times \sin \left(\frac{m\pi}{\ell_1} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{\ell_2} y \right). \quad (\text{C.75})$$

Fourierův koeficient C_{mn} získáme z počáteční podmínky,

$$C_{mn} = \frac{1}{\|v_{mn}\|^2} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \varphi(\xi, \eta) \sin \left(\frac{m\pi\xi}{\ell_1} \right) \sin \left(\frac{n\pi\eta}{\ell_2} \right) d\xi d\eta, \quad (\text{C.76})$$

Norma $\|v_{mn}\|$ funkce $v_{mn} = X_m Y_n$ je analogicky k rovnici (C.69) dána jako

$$\|v_{mn}\|^2 = \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \sin^2 \left(\frac{m\pi\xi}{\ell_1} \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi\eta}{\ell_2} \right) d\xi d\eta = \frac{1}{2} [\xi]_0^{\ell_1} \times \frac{1}{2} [\eta]_0^{\ell_2} = \frac{\ell_1 \ell_2}{4}. \quad (\text{C.77})$$

Výslednou funkci můžeme zapsat ve tvaru

$$u(t, x, y) = \frac{4}{\ell_1 \ell_2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \left[\varphi(\xi, \eta) \sin \left(\frac{m\pi\xi}{\ell_1} \right) \sin \left(\frac{n\pi\eta}{\ell_2} \right) d\xi d\eta \right] \times e^{-a^2 \left[\left(\frac{m\pi}{\ell_1} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\ell_2} \right)^2 \right] t} \times \sin \left(\frac{m\pi}{\ell_1} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{\ell_2} y \right). \quad (\text{C.78})$$

• **Homogenní jednorozměrná úloha, nehomogenní okrajové podmínky, homogenní počáteční podmínka:**

V případě nehomogenních okrajových podmínek bude nalezení partikulárního řešení komplikovanější. Uvažujme rovnici chladnutí tyče

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \langle 0, \ell \rangle, \quad (\text{C.79})$$

s podmínkami $u(0, x) = 0$, $u(t, 0) = T_1$, $u(t, \ell) = T_2$. Funkci linearizujeme: $u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$, kdy funkce $w(t, x)$ přejde na stacionární funkci $w(x)$ a bude splňovat okrajové podmínky následujícím způsobem, $w(t, 0) = T_1$, $w(t, \ell) = T_2$, $v(t, 0) = v(t, \ell) = 0$. Pro stacionární funkce dále platí,

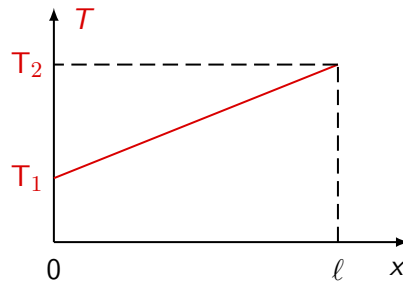
$$w(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ell} x, \quad v(0, x) = -T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ell} x, \quad v(0, x) + w(0, x) = 0. \quad (\text{C.80})$$

Rovnici (C.79) rozepíšeme pro obě funkce v a w , $v_t = a^2 v_{xx}$, $w_t = a^2 w_{xx}$. Prostorové derivace funkce w budou $w_x = (T_2 - T_1)/\ell$, $w_{xx} = 0$. Zahrneme-li dále podmínky pro funkci v , $v_t = a^2 v_{xx}$, $v = XT$, $v(t, 0) = 0 = v(t, \ell)$, dostáváme

$$X(x) = A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x, \quad \text{tedy} \quad X_k = \sin \left(\frac{k\pi}{\ell} x \right). \quad (\text{C.81})$$

Funkci v můžeme zapsat ve tvaru

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell} \right)^2 t} \sin \left(\frac{k\pi}{\ell} x \right). \quad (\text{C.82})$$

Obrázek C.1: Schématické znázornění průběhu funkce $w(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ell}x$.

Z počáteční podmínky (C.80) dále vyplývá

$$v(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) = -T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ell}x, \quad (\text{C.83})$$

z toho vypočítáme Fourierův koeficient,

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \left(-T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ell}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) d\xi = \\ &= \frac{2T_1}{k\pi} \left[(-1)^k - 1\right] - \frac{2(T_1 - T_2)}{k\pi} (-1)^k = (-1)^k \left(\frac{2T_2}{k\pi}\right) - \left(\frac{2T_1}{k\pi}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.84})$$

Výsledná funkce bude mít tvar

$$u(t, x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ell}x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^k \left(\frac{2T_2}{k\pi}\right) - \left(\frac{2T_1}{k\pi}\right)\right] e^{-(\frac{ak\pi}{\ell})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{C.85})$$

• **Nehomogenní jednorozměrná úloha s konstantním zdrojem tepla T_0 , s homogenními podmínkami:**

Uvažujme rovnici chlazení tyče s konstantním zdrojem tepla

$$u_t = a^2 u_{xx} + T_0, \quad t > 0, \quad x \in \langle 0, \ell \rangle, \quad (\text{C.86})$$

s podmínkami $u(0, x) = 0$, $u(t, 0) = 0 = u(t, \ell)$. Funkci separujeme způsobem

$$u(t, x) = TX, \quad X(x) = A \sin \sqrt{\lambda}x + B \cos \sqrt{\lambda}x, \quad X_k(x) = v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{C.87})$$

Předpokládáme řešení ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{C.88})$$

Pomocí další podmínky získáme nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici

$$\dot{C}_k(t) + a^2 \lambda_k C_k(t) = F_k(t), \quad (\text{C.89})$$

kde $F_k(t)$ je tzv. Fourierův koeficient nehomogenity. Tuto rovnici dále řešíme:

$$f(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \quad (\text{C.90})$$

$$F_k(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(t, \xi) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) d\xi = \frac{2T_0}{\ell} \frac{\ell}{k\pi} \left[-\cos\frac{k\pi}{\ell}\xi\right]_0^{\ell} = \frac{2T_0}{k\pi} [1 - (-1)^k]. \quad (\text{C.91})$$

Nejdříve řešíme homogenní rovnici

$$\dot{C}_k(t) = -a^2 \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 C_k(t) = -\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 K(t) e^{-(\frac{ak\pi}{\ell})^2 t} + \dot{K}(t) e^{-(\frac{ak\pi}{\ell})^2 t}. \quad (\text{C.92})$$

Dosazením do nehomogenní rovnice dostáváme

$$\dot{C}_k(t) + \left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 K(t) e^{-(\frac{ak\pi}{\ell})^2 t} = \frac{2T_0}{k\pi} [1 - (-1)^k], \quad (\text{C.93})$$

$$K(t) = \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^2 \frac{2T_0}{k\pi} [1 - (-1)^k] e^{(\frac{ak\pi}{\ell})^2 t} + K_2. \quad (\text{C.94})$$

Z počáteční podmínky $C_k(0) = 0$ vyplývá,

$$K_2 = \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^2 \frac{2T_0}{k\pi} [(-1)^k - 1], \quad (\text{C.95})$$

$$C_k(t) = \left[1 - e^{-(\frac{ak\pi}{\ell})^2 t}\right] \frac{2T_0}{k\pi} \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^2 [1 - (-1)^k]. \quad (\text{C.96})$$

Výsledná funkce bude mít tvar

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - e^{-(\frac{ak\pi}{\ell})^2 t}\right] \frac{2T_0}{k\pi} \left(\frac{\ell}{ak\pi}\right)^2 [1 - (-1)^k] \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{C.97})$$

• **Nehomogenní jednorozměrná úloha s nekonstantním zdrojem tepla, homogenní podmínky:**

Uvažujme rovnici chlazení tyče s prostorově i časově závislým zdrojem tepla,

$$u_t = a^2 u_{xx} + tx, \quad t > 0, \quad x \in \langle 0, \ell \rangle, \quad (\text{C.98})$$

s podmínkami $u(0, x) = 0$, $u(t, 0) = 0 = u(t, \ell)$. Funkci separujeme,

$$u(t, x) = TX, \quad X(x) = A \sin \sqrt{\lambda}x + B \cos \sqrt{\lambda}x, \quad X_k(x) = v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{C.99})$$

Opět předpokládáme řešení ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \quad \text{kde} \quad \dot{C}_k(t) + a^2 \lambda_k C_k(t) = F_k(t). \quad (\text{C.100})$$

Tuto rovnici dále řešíme:

$$f(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \quad F_k(t) = (-1)^{k+1} \frac{2\ell}{k\pi} t. \quad (\text{C.101})$$

Řešení homogenní obyčejné diferenciální rovnice

$$\dot{C}_k(t) = - \left(\frac{ak\pi}{\ell} \right)^2 K(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + \dot{K}(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t}. \quad (\text{C.102})$$

Opět dosadíme do nehomogenní rovnice, dostáváme:

$$\dot{C}_k(t) + \left(\frac{ak\pi}{\ell} \right)^2 K(t) e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} = (-1)^{k+1} \frac{2\ell}{k\pi} t, \quad (\text{C.103})$$

$$K(t) = \frac{2\ell}{k\pi} (-1)^{k+1} \left[t \left(\frac{\ell}{ak\pi} \right)^2 e^{\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} \right] - \left(\frac{\ell}{ak\pi} \right)^4 e^{\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + K_2. \quad (\text{C.104})$$

Z počáteční podmínky $C_k(0) = 0$ vyplývá,

$$K_2 = \frac{2\ell}{k\pi} (-1)^{k+1} \left(\frac{\ell}{ak\pi} \right)^4, \quad (\text{C.105})$$

$$C_k(t) = \frac{2\ell}{k\pi} (-1)^{k+1} \left(\frac{\ell}{ak\pi} \right)^4 \left[e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + t \left(\frac{ak\pi}{\ell} \right)^2 - 1 \right]. \quad (\text{C.106})$$

Výsledná funkce má tvar

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\ell}{k\pi} (-1)^{k+1} \left(\frac{\ell}{ak\pi} \right)^4 \left[e^{-\left(\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t} + t \left(\frac{ak\pi}{\ell} \right)^2 - 1 \right] \sin \left(\frac{k\pi}{\ell} x \right). \quad (\text{C.107})$$

• **Nehomogenní jednorozměrná úloha s nehomogenními podmínkami** (nástin řešení):

Uvažujme rovnici

$$u_t = a^2 u_{xx} + tx, \quad t > 0, \quad x \in \langle 0, \ell \rangle, \quad (\text{C.108})$$

s podmínkami $u(0, x) = \varphi(x)$, $u(t, 0) = u_1(t)$, $u(t, \ell) = u_2(t)$. Funkci $u(t, x)$ opět rozložíme na součet $u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$, kde w bude splňovat okrajové podmínky. Rozepíšeme-li rovnici (C.108) jako $v_t + w_t = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} + tx$, dostáváme

$$v_t = a^2 v_{xx} + tx + a^2 w_{xx} - w_t, \quad (\text{C.109})$$

kde poslední tři členy reprezentují nehomogenitu. Počáteční podmínka pro funkci u dává $\varphi(x) = v(0, x) + w(0, x)$ a tedy $v(0, x) = \varphi(x) - w(0, x)$. Pomocí funkcí v a w řešíme úlohu v principu stejně jako v předchozích případech.

C.2.4 Jednoduché příklady prostorových úloh

• **Teplota v nekonečném rotačním válci** (použití Besselových funkcí) :

Uvažujme rovnici (kde c je poloměr válce)

$$u_t = a^2 \left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} \right), \quad t > 0, \quad \rho \in \langle 0, c \rangle, \quad (\text{C.110})$$

reprezentující radiální část laplaciánu ve válcových souřadnicích (B.46), s podmínkami $u(0, \rho) = f(\rho)$, $u(t, 0) = 0 = u(t, c)$. Pomocí rozdělení funkce $u = R(\rho)T(t)$ můžeme rovnici separovat,

$$\frac{\dot{T}}{a^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{R'}{R} = -\lambda^2. \quad (\text{C.111})$$

Po úpravě dostáváme pro obě strany

$$\text{LS: } \dot{T} + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad \text{PS: } \rho R'' + R' + \lambda^2 \rho R = 0. \quad (\text{C.112})$$

Substitucí $\lambda \rho = z$ a úpravami

$$\frac{dR}{d\rho} = \lambda \frac{dR}{dz}, \quad \frac{d^2 R}{d\rho^2} = \lambda^2 \frac{d^2 R}{dz^2} \quad (\text{C.113})$$

dostaneme tzv. *Besselovu rovnici* s indexem $\nu = 0$,

$$z \frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{dR}{dz} + zR = 0, \quad (\text{C.114})$$

kdy obecná Besselova rovnice má tvar $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$. Řešením rovnice (C.114) a řešením obecné Besselovy rovnice jsou funkce

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad (\text{C.115})$$

kde výraz $\Gamma(\nu + k + 1)$ je tzv. Γ funkce, definovaná jako $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$. V našem případě dostáváme řešení PS rovnice (C.112) ve tvaru $R(z) = J_0(z)$, tedy $R(\rho) = J_0(\lambda \rho)$ a tedy $J_0(\lambda_n \rho) = R_n(\rho)$, s okrajovou podmínkou $J_0(\lambda_n c) = 0$ kde λ_n pro $n = 1, 2, 3, \dots$, je kořenem této rovnice. Řešením LS rovnice (C.112) bude funkce

$$T_n(t) = e^{-a^2 \lambda_n^2 t}. \quad (\text{C.116})$$

Pomocí tzv. Fourierova-Besselova rozvoje, definovaného jako $\sum_{k=1}^{\infty} C_n J_\nu(\lambda_n x) = f(x)$ v každém bodě spojitosti funkce $f(x)$, získáme koeficient C_n (Fourierův-Besselův koeficient), kdy pro J_0 a obecné J_ν z rovnice (C.115) platí

$$C_n = \frac{2}{c^2 J_1^2(\lambda_n c)} \int_0^c \xi J_0(\lambda_n \xi) f(\xi) d\xi, \quad C_n = \frac{2}{c^2 J_{\nu+1}^2(\lambda_n c)} \int_0^c \xi J_\nu(\lambda_n \xi) f(\xi) d\xi. \quad (\text{C.117})$$

Výsledná funkce bude mít podobu

$$u(t, \rho) = \frac{2}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \rho)}{J_1^2(\lambda_n c)} \int_0^c [\xi J_0(\lambda_n \xi) f(\xi) d\xi] e^{-a^2 \lambda_n^2 t}. \quad (\text{C.118})$$

● **Chladnutí koule** (homogenní rovnice) :

Uvažujme funkci s Laplaciánem

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad t > 0, \quad r \in (0, R), \quad (\text{C.119})$$

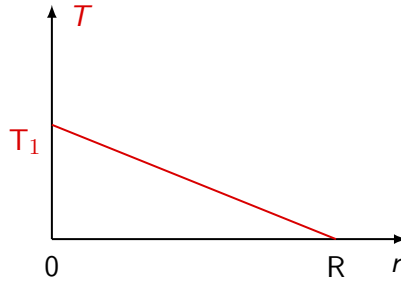
pro kartézské souřadnice $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ kde R je poloměr koule, s podmínkami $u(0, x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = f(r)$ a tedy $u(0, r) = f(r)$, $u(t, x, y, z) = u(t, r)$, $u(t, 0) = T_1$, $u(t, R) = 0$. Jednotlivé parciální derivace budou

$$u_x = u_r r_x + \underbrace{u_\theta \theta_x + u_\phi \phi_x}_0, \quad \text{tedy} \quad u_x = u_r \frac{x}{r}, \quad (\text{C.120})$$

$$u_{xx} = u_{rr} \frac{x^2}{r^2} + u_r \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = u_{rr} \frac{x^2}{r^2} + u_r \frac{r^2 - x^2}{r^3}, \quad (\text{C.121})$$

$$\Delta u = u_{rr} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + u_r \frac{3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{r^3} = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r, \quad \text{tedy} \quad (\text{C.122})$$

$$u_t = a^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right) \quad (\text{sférická radiální část Laplaciánu - viz rovnice (B.72)}). \quad (\text{C.123})$$

Obrázek C.2: Schématické znázornění průběhu funkce $w(r) = T_1 - \frac{T_1}{R}r$.

Pomocí substituce $v(r) = ru(r)$ tedy $u = v/r$ dostáváme:

$$u_t = \frac{1}{r}v_t, \quad u_r = -\frac{1}{r^2}v + \frac{1}{r}v_r, \quad u_{rr} = \frac{2}{r^3}v - \frac{1}{r^2}v_r - \frac{1}{r^2}v_r + \frac{1}{r}v_{rr} = \frac{2}{r^3}v - \frac{2}{r^2}v_r + \frac{1}{r}v_{rr}, \quad (\text{C.124})$$

$$u_t = a^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r \right), \quad \text{tedy } \frac{1}{r}v_t = a^2 \left(\frac{2}{r^3}v - \frac{2}{r^2}v_r + \frac{1}{r}v_{rr} - \frac{2}{r^3}v + \frac{2}{r^2}v_r \right), \quad \text{a tedy} \quad (\text{C.125})$$

$$v_t = a^2 v_{rr}, \quad \text{kde } v(0, r) = rf(r), \quad v(t, 0) = rT_1, \quad v(t, R) = 0. \quad (\text{C.126})$$

Pomocí linearizace $u = z + w$ dále dostáváme:

$$u(0, r) = f(r), \quad \text{tedy } z(0, r) = u(0, r) - w(r), \quad (\text{C.127})$$

$$w(r) = T_1 - \frac{T_1}{R}r, \quad z(0, r) = f(r) - T_1 + \frac{T_1}{R}r, \quad \tilde{z}(0, r) = rz(0, r). \quad (\text{C.128})$$

$$v(0, r) = rf(r), \quad \text{tedy } \tilde{z}(0, r) = r \left[f(r) - T_1 + \frac{T_1}{R}r \right] \quad \text{dává} \quad (\text{C.129})$$

$$v = ru = r(z + w), \quad z_t = a^2 z_{rr}, \quad z(t, 0) = z(t, R) = 0, \quad z = TX, \quad \text{tedy} \quad (\text{C.130})$$

$$z(t, r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(\frac{ak\pi}{R})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{R}r\right). \quad (\text{C.131})$$

Fourierův koeficient bude mít tvar:

$$C_k = \frac{2}{R} \int_0^R r \left[f(r) - T_1 + \frac{T_1}{R}r \right] \sin\left(\frac{k\pi}{R}r\right) dr. \quad (\text{C.132})$$

Výsledná funkce bude mít tvar:

$$u(t, r) = \underbrace{T_1 - \frac{T_1}{R}r}_w + \frac{2}{R} \int_0^R \left[f(r) - T_1 + \frac{T_1}{R}r \right] \times \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\frac{ak\pi}{R})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{R}r\right) dr. \quad (\text{C.133})$$

C.2.5 Řešení hyperbolických parciálních diferenciálních rovnic Fourierovou metodou

Následující dva jednoduché řešení příklady ilustrují princip použití této metody v případě hyperbolických PDR:

• **Homogenní vlnová rovnice :**

Uvažujme rovnici

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \langle 0, \ell \rangle, \quad (\text{C.134})$$

s Cauchyho počátečními podmínkami (viz odstavec 3.1.1)

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (\text{C.135})$$

a se smíšenými okrajovými podmínkami (viz odstavec 3.2.1), kde $\alpha, \beta \neq 0$,

$$\alpha u(t, 0) + \beta u_x(t, 0) = 0, \quad \alpha u(t, \ell) + \beta u_x(t, \ell) = 0. \quad (\text{C.136})$$

Separací proměnných:

$$u(t, x) = T(t)X(x) \quad \text{a tedy} \quad \frac{\ddot{T}}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad (\text{C.137})$$

po úpravě dostáváme

$$\text{LS: } \ddot{T} + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad \text{PS: } X'' + \lambda^2 X = 0. \quad (\text{C.138})$$

Z rovnice (C.138) dostáváme

$$T_k(t) = a_k \cos(\lambda_k a t) + b_k \sin(\lambda_k a t), \quad X_k(x) = c_k \cos(\lambda_k x) + d_k \sin(\lambda_k x), \quad (\text{C.139})$$

Obdobným způsobem jako v rovnici (C.64) dostáváme ze smíšených okrajových podmínek (C.136)

$$\alpha + \beta \lambda = 0, \quad \beta - \alpha \lambda = \beta^2 + \alpha^2 \neq 0, \quad \text{tedy} \quad \sin(\lambda_k x) = 0 \quad \text{a tedy} \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}. \quad (\text{C.140})$$

Pro prostorovou funkci tedy dostáváme řešení (viz rovnice (C.65))

$$X_k = c_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) + d_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right). \quad (\text{C.141})$$

Obecné řešení lze tedy zapsat ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{ak\pi}{\ell} t\right) + B_k \sin\left(\frac{ak\pi}{\ell} t\right) \right] \left[\cos\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) \right]. \quad (\text{C.142})$$

Z Cauchyho počáteční podmínky (C.135) dostáváme

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\cos\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) \right] = \varphi(x) \quad (\text{C.143})$$

a z podmínky (C.135) dostáváme

$$u_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak\pi}{\ell} B_k \left[\cos\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) \right] = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak\pi}{\ell} B_k v_k. \quad (\text{C.144})$$

Fourierovy koeficienty A_k, B_k najdeme z rovnic (C.143) a (C.144) (viz také rovnice (C.68)),

$$A_k = \frac{1}{\|v_k\|^2} \int_0^\ell \varphi(\xi) v_k(\xi) d\xi, \quad B_k = \frac{\ell}{ak\pi\|v_k\|^2} \int_0^\ell \psi(\xi) v_k(\xi) d\xi. \quad (\text{C.145})$$

Normu $\|v_k\|$ funkce v_k řešíme jako normu spojitě definovaného vektoru (viz rovnice (2.1)), tedy

$$\|v_k\|^2 = \int_0^\ell v_k^2(\xi) d\xi = \int_0^\ell \left[\cos\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) \right]^2 d\xi = \int_0^\ell d\xi = \ell. \quad (\text{C.146})$$

Po dosazení dostáváme rovnici (C.142) ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right] \times \\ \times \left[\frac{1}{\ell} \int_0^\ell \varphi(\xi) v_k(\xi) \cos\left(\frac{ak\pi}{\ell}t\right) d\xi + \frac{1}{ak\pi} \int_0^\ell \psi(\xi) v_k(\xi) \sin\left(\frac{ak\pi}{\ell}t\right) d\xi \right]. \quad (\text{C.147})$$

• Nehomogenní vlnová rovnice s homogenními počátečními podmínkami :

Uvažujme rovnici

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f \quad (\text{kde } f \text{ je zdroj energie vlnění}), \quad t > 0, \quad x \in \langle 0, \ell \rangle, \quad (\text{C.148})$$

s homogenními Cauchyho počátečními podmínkami (viz odstavec 3.1.1)

$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 0 \quad (\text{C.149})$$

a se smíšenými okrajovými podmínkami (viz odstavec 3.2.1), kde $\alpha, \beta \neq 0$,

$$\alpha u(t, 0) + \beta u_x(t, 0) = 0, \quad \alpha u(t, \ell) + \beta u_x(t, \ell) = 0. \quad (\text{C.150})$$

Obdobně jako v předchozím příkladu:

$$u(t, x) = TX, \quad X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x), \quad X_k(x) = v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{C.151})$$

Zvolíme rovnici ve tvaru:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right). \quad (\text{C.152})$$

Pomocí další podmínky získáme nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici:

$$\ddot{C}_k(t) + a^2 \lambda_k^2 C_k(t) = F_k(t) \quad \text{kde } F_k(t) \text{ je tzv. Fourierův koeficient nehomogenity}, \quad (\text{C.153})$$

$$f(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \quad \text{a tedy} \quad F_k(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(t, \xi) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right) d\xi. \quad (\text{C.154})$$

Dále bychom museli řešit nehomogenní diferenciální rovnici 2. řádu (C.153) (například metodou variace konstant - viz oddíl 3.2.1) pro konkrétní funkci $F_k(t)$. Zahnutím počátečních podmínek (C.149) dostáváme řešení rovnice (C.153) alespoň v obecné integritabilní podobě:

$$C_k(t) = \frac{\ell}{ak\pi} \int_0^t F_k(\sigma) \sin \left[\frac{ak\pi}{\ell} (t - \sigma) \right] d\sigma. \quad (\text{C.155})$$

Jejím dosazením do rovnice obecného řešení (C.152) dostaneme (viz řešení rovnice obdobného typu v případě parabolických parciálních diferenciálních rovnic v oddíle C.2.3):

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell}{ak\pi} \sin \left(\frac{k\pi}{\ell} x \right) \int_0^t F_k(\sigma) \sin \left[\frac{ak\pi}{\ell} (t - \sigma) \right] d\sigma. \quad (\text{C.156})$$

C.2.6 Ukázka možných způsobů řešení jednoduchých eliptických parciálních diferenciálních rovnic

Následující řešené příklady demonstrují některé základní způsoby počítání eliptických PDR:

• Laplaceova rovnice :

Laplaceova rovnice je v kartézských souřadnicích v nejjednodušší formě definovaná ve tvaru

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0. \quad (\text{C.157})$$

V tomto příkladu budeme řešit Laplaceovu rovnici na obdélníkové oblasti s rozměry a, b , se smíšenými Dirichletovými a Neumannovými podmínkami (viz odstavec 3.2.1), v podobě

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = 0 \quad (y \neq 0), \quad u_y(x, b) = u_0 \sin \left(\frac{\pi}{2a} x \right) \quad (x \neq 0). \quad (\text{C.158})$$

Separací proměnných $u(x, y) = X(x)Y(y)$ dostáváme rovnici

$$X''Y + XY'' = 0 \text{ a tedy } \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda, \quad (\text{C.159})$$

kde konstanta λ může nabývat hodnot $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, $\lambda < 0$.

1. $\lambda = 0$: Budeme předpokládat separované funkce $X(x)$ a $Y(y)$ ve tvaru polynomů, vzhledem k okrajovým podmínkám budou dostatečné polynomy 1. stupně, tedy $X(x) = Ax + B$, $Y(y) = Cy + D$. Z okrajové podmínky $u(0, y) = 0$ vyplývá $B = 0 \vee C = D = 0$, pokud ovšem $C = D = 0$, potom $Y(y) = 0$ a tedy $u(x, y) = 0$ všude. Pokračujeme-li s $B = 0$, dostáváme $Ax(Cy + D) = 0$ a tedy, zahrneme-li další okrajovou podmínku $u(x, 0) = 0$, musí být $AxD = 0$. Příklad $A = 0$ dává $X(x) = 0$, tedy $u(x, y) = 0$ všude. Uvažujeme-li také $D = 0$, potom $u(x, y) = AxCy = 0$, z další okrajové podmínky $u_x(a, y) = 0$ vyplývá $ACy = 0$, tedy $A = 0 \vee C = 0$, v obou případech ovšem $u(x, y) = 0$. Příklad $\lambda = 0$ dává tedy pouze triviální řešení.

2. $\lambda > 0$: Z rovnice (C.159) dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$u(x, y) = \left[A \cosh(\sqrt{\lambda}x) + B \sinh(\sqrt{\lambda}x) \right] \left[C \cos(\sqrt{\lambda}y) + D \sin(\sqrt{\lambda}y) \right]. \quad (\text{C.160})$$

Z okrajové podmínky $u(0, y) = 0$ vyplývá $A[C \cos(\sqrt{\lambda}y) + D \sin(\sqrt{\lambda}y)] = 0$, tedy $C = D = 0$, potom ovšem $Y(y) = 0$ a tedy $u(x, y) = 0$ všude. Pokračujeme-li s $A = 0$, dostáváme $u(x, y) = B \sinh(\sqrt{\lambda}x)[C \cos(\sqrt{\lambda}y) + D \sin(\sqrt{\lambda}y)]$. Zahrneme-li další okrajovou podmínku $u(x, 0) = 0$, musí být $BC \sinh(\sqrt{\lambda}x) = 0$. Příklad $B = 0$ dává $X(x) = 0$, tedy $u(x, y) = 0$ všude. Pokračujeme-li s $C = 0$, potom $u(x, y) = BD \sinh(\sqrt{\lambda}x) \sin(\sqrt{\lambda}y)$ a z další okrajové podmínky $u_x(a, y) = 0$ vyplývá $\sqrt{\lambda}BD \cosh(\sqrt{\lambda}a) \sin(\sqrt{\lambda}y) = 0$, tedy $B = 0 \vee D = 0$, v obou případech ovšem $u(x, y) = 0$. Příklad $\lambda > 0$ dává tedy také pouze triviální řešení.

3. $\lambda < 0$: Z rovnice (C.159) dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$u(x, y) = \left[A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x) \right] \left[C \cosh(\sqrt{\lambda}y) + D \sinh(\sqrt{\lambda}y) \right]. \quad (\text{C.161})$$

Z okrajové podmínky $u(0, y) = 0$ vyplývá $A[C \cosh(\sqrt{\lambda}y) + D \sinh(\sqrt{\lambda}y)] = 0$, tedy $C = D = 0$, potom $Y(y) = 0$ a tedy $u(x, y) = 0$ všude. Pokračujeme s $A = 0$, dostáváme $u(x, y) = B \sin(\sqrt{\lambda}x)[C \cosh(\sqrt{\lambda}y) + D \sinh(\sqrt{\lambda}y)]$. Zahrneme-li další okrajovou podmínku $u(x, 0) = 0$, musí být $BC \sin(\sqrt{\lambda}x) = 0$. Příklad $B = 0$ dává $X(x) = 0$, tedy $u(x, y) = 0$ všude. Pokračujeme-li s $C = 0$, potom $u(x, y) = BD \sin(\sqrt{\lambda}x) \sinh(\sqrt{\lambda}y)$ a z další okrajové podmínky $u_x(a, y) = 0$ vyplývá $\sqrt{\lambda}BD \cos(\sqrt{\lambda}a) \sinh(\sqrt{\lambda}y) = 0$, tedy $B = 0 \vee D = 0$ (v obou případech ovšem $u(x, y) = 0$) $\vee \cos(\sqrt{\lambda}a) = 0$. Poslední případ dává řešení

$$\cos(\sqrt{\lambda}a) = 0, \text{ tedy } \sqrt{\lambda} = \frac{(2k-1)\pi}{2a} \text{ a tedy}$$

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} K_k \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2a} x \right] \sinh \left[\frac{(2k-1)\pi}{2a} y \right], \text{ kde } K_k = BD. \quad (\text{C.162})$$

Uplatníme-li také čtvrtou okrajovou podmínku, dostáváme

$$u_0 \sin \frac{\pi}{2a} x = \sum_{k=1}^{\infty} K_k \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2a} x \right] \sinh \left[\frac{(2k-1)\pi}{2a} b \right]. \quad (\text{C.163})$$

Z argumentů funkce sinus vyplývá řešení pouze pro $k = 1$, tedy $K_1 = u_0 / \sinh[\pi b / (2a)]$. Výsledné řešení se zahrnutím všech okrajových podmínek bude

$$u(x, y) = u_0 \left[\sinh \left(\frac{\pi b}{2a} \right) \right]^{-1} \sin \left(\frac{\pi x}{2a} \right) \sinh \left(\frac{\pi y}{2a} \right). \quad (\text{C.164})$$

Další typickou eliptickou parciální diferenciální rovnicí může být například tzv. *Poissonova rovnice* typu $\Delta u(x, y) = f(x, y)$, tedy nehomogenní eliptická rovnice, nejčastěji používaná ve formě gravitační Poissonovy rovnice, $\Delta \Phi = 4\pi G\rho$, kde Φ je gravitační potenciál, ρ je hustota hmoty a G je gravitační konstanta, nebo Poissonovy rovnice elektrostatičkého potenciálu, $\Delta \Phi = -\rho/\epsilon$, kde ρ je hustota elektrického náboje a ϵ je permitivita. Řešení vícerozměrné Poissonovy rovnice je analogické k řešení Laplaceovy rovnice a také například k řešení nehomogenní hyperbolické parciální diferenciální rovnice:

• **Poissonova rovnice s konstantní pravou stranou:**

Řešme jednoduchou rovnici, definovanou na oblasti $x > y^2$, tj. na oblasti ohraničené parabolou $x = y^2$ s vrcholem v bodě $[0, 0]$, jejíž osu tvoří kladná část osy x ,

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 2, \quad (\text{C.165})$$

s Dirichletovou podmínkou na hranici oblasti, $u(y^2, y) = 0$. Předpokládejme řešení ve formě všech členů polynomu 2. stupně s neurčitými koeficienty,

$$u(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2, \quad (\text{C.166})$$

kdy po jeho parciálním derivování ve smyslu rovnice (C.165) snadno zjistíme: $F = 1 - D$. Po dosazení okrajové podmínky, tedy z rovnice

$$A + Cy + (B - D + 1)y^2 + Ey^3 + Dy^4 = 0, \quad (\text{C.167})$$

dostáváme nenulové hodnoty koeficientů pouze pro $B = -1$, $F = 1$. Hledaná rovnice tedy bude

$$u(x, y) = y^2 - x. \quad (\text{C.168})$$

• **Poissonova rovnice s konstantní pravou stranou na kruhové oblasti, s nehomogenní okrajovou podmínkou:**

Uvnitř kruhové oblasti s poloměrem R platí následující rovnice,

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 4, \quad (\text{C.169})$$

kdy na hranici oblasti platí Dirichletova podmínka $u(x, y_1) = 1$, z níž vyplývá $y_1 = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Analogicky k parabolickým rovnicím s nehomogenními okrajovými podmínkami rozdělíme hledanou funkci $u(x, y)$ na součet dvou funkcí, například $U(x, y)$ a $v(x, y)$, pro které bude platit:

$$u(x, y) = U(x, y) + v(x, y), \quad U_{xx} + U_{yy} = 4, \quad U(x, y_1) = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad v(x, y_1) = 1. \quad (\text{C.170})$$

Obdobně jako v předchozím případě předpokládáme pro každou funkci úplný polynom 2. stupně s neurčitými koeficienty,

$$U(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2, \quad (\text{C.171})$$

$$v(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2, \quad (\text{C.172})$$

což dává $F = 2 - D$, $f = -d$. Po dosazení okrajové podmínky můžeme rovnice (C.171) a (C.172) přepsat ve tvaru

$$A + Bx \pm (C + Ex) \sqrt{R^2 - x^2} + 2(D - 1)x^2 + (2 - D)R^2 = 0, \quad (\text{C.173})$$

$$a + bx \pm (c + ex) \sqrt{R^2 - x^2} + 2dx^2 - dR^2 = 1, \quad (\text{C.174})$$

jednotlivé nenulové koeficienty budou: $A = -R^2$, $D = 1$, $F = 1$, $a = 1$. Po sečtení rovnic (C.173) a (C.174) dostáváme hledanou výslednou funkci

$$u(x, y) = 1 - R^2 + x^2 + y^2. \quad (\text{C.175})$$

• **Poissonova rovnice s obecnou pravou stranou, smíšené okrajové podmínky:**

Řešme obdobným způsobem Poissonovu rovnici ve tvaru

$$u_{xx}(x, y) + 4u_{yy}(x, y) = xy, \quad (\text{C.176})$$

s okrajovými podmínkami $u(0, y) = y^2$, $u_x(0, y) = 0$. Abychom po derivování dostali členy potřebného stupně, musíme nyní ovšem předpokládat řešení ve tvaru úplného polynomu 4. stupně s neurčitými koeficienty,

$$u(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + Gx^3 + Hx^2y + Ixy^2 + Jy^3 + Kx^4 + Lx^3y + Mx^2y^2 + Nxy^3 + Qy^4. \quad (\text{C.177})$$

Příslušné druhé derivace tedy v tomto případě budou

$$u_{xx} = 2D + 6Gx + 2Hy + 12Kx^2 + 6Lxy + 2My^2, \quad (\text{C.178})$$

$$u_{yy} = 2F + 2Ix + 6Jy + 2Mx^2 + 6Nxy + 12Qy^2. \quad (\text{C.179})$$

Pro jednotlivé koeficienty dostáváme

$$D = -4F, \quad G = -\frac{4}{3}I, \quad H = -12J, \quad K = -\frac{2}{3}M, \quad L = \frac{1 - 24N}{6}, \quad M = -24Q. \quad (\text{C.180})$$

Dosazením Dirichletovy okrajové podmínky dostáváme $A = 0$, $C = 0$, $F = 1$, $J = 0$, $Q = 0$, z relací (C.180) ihned vyplývá $D = -4$, $H = 0$, $K = 0$, $M = 0$. Dosazením Neumannovy okrajové podmínky dostáváme $B = 0$, $E = 0$, $I = 0$, $N = 0$, z relací (C.180) následně vyplývá $G = 0$, $L = 1/6$. Dosazením nenulových koeficientů do rovnice (C.177) dostáváme hledanou výslednou funkci,

$$u(x, y) = -4x^2 + y^2 + \frac{1}{6}x^3y. \quad (\text{C.181})$$

Podrobně je tato problematika popsána např. v učebnici Franců (2011).

Příloha D

Praktické základy numerických výpočtů ★

Smyslem této kapitoly není podávat systematický popis základních metod numerické matematiky, v tomto směru odkazuji zájemce například na skriptum Humlíček (2009) nebo odpovídající učebnice (například Příkrýl, 1985; Vitásek, 1987; Čermák & Hlavička, 2006, atd), ale pouze stručně a názorně ilustrovat některé principy a možné postupy při praktickém numerickém modelování nejčastěji se v praxi vyskytujících (a výše popsaných) analytických okruhů. Vybrané příklady jednoduchého modelování jsou také doprovázeny ukázkami velmi jednoduše sestavených programovacích skriptů pro daný konkrétní problém, případně obrázky a grafy výsledných modelů. Programové skripty jsou zde demonstrovány v co nejvíce elementární podobě, zbaveny všech podprogramů, modulů a dalších „programátorských vylepšení“, ve kterých by se ovšem podstata algoritmu, zejména pro začátečníky, mohla ztrácet.

Rozsáhlé využívání numerické matematiky ve většině přírodních a technických disciplín přineslo také tvorbu celé řady hotových knihoven, rozepsaných do hlavních programových jazyků; jejich přehledné úložiště se nachází například na stránkách GAMS (Guide to Available Mathematical Software) <http://gams.nist.gov/>. Některé z nich jsou komerční (a poměrně komplexní), například NAG (Numerical Algorithm Group) <https://www.nag.com/content/nag-library> nebo IMSL (International Mathematics and Statistics Library) <http://www.roguewave.com/products-services/imsl-numerical-libraries>, jiné jsou volně dostupné a bývají zpravidla zaměřené na specifickou oblast, například FFTPACK <http://www.netlib.org/fftpack/> - (rychlá) Fourierova transformace, LAPACK (viz odstavec D.1) - lineární algebra, MINPACK <http://www.netlib.org/minpack/> - nelineární rovnice, atd. Jejich úplná nebo i částečná implementace do vlastních algoritmů může výrazně urychlit a usnadnit jejich tvorbu i kvalitu.

D.1 Numerické metody lineární algebry

V tomto oddíle nebudeme probírat jednotlivé metody numerických řešení lineární algebry, k základům tohoto tématu existuje rozsáhlá literatura (např. Humlíček (2009)), popisující jak vlastní numerické rovnice tak jejich stabilitu a *podmíněnost* (tj. zejména stanovení přesnosti numerických maticových algoritmů), odhady chyb, atd. V současnosti existuje řada hotových balíčků (procedur), sestávajících z jednotlivých podprogramů (knihoven), určených pro řešení dílčích nebo i kombinovaných algebraických úloh (například řešení soustav lineárních rovnic, ře-

★ jsou označeny odstavce a příklady, určené primárně studentům vyšších ročníků bakalářského studia

šení tzv. *tridiagonálních* matic (tj. matic s nenulovými prvky pouze na hlavní a obou sousedních diagonálách), hledání determinantů, inverzních matic, vlastních hodnot a vlastních vektorů, atd. Jedním z nejvýkonnějších takových balíčků, který zde podrobněji představíme, je programový balíček LAPACK (Linear Algebra PACKage, Anderson et al. (1999)), který se vyvinul ze starších balíčků EISPACK a LINPACK a je určen pro fortran 77, fortran 90, existují také C++ verze. Existují rozšířené verze tohoto balíčku nebo další knihovny na něm postavené, se zabudovanými podprogramy pro paralelizaci na výkonných počítačových clusterech (viz odstavec D.6), například ScaLAPACK, MAGMA, MORSE, CHAMELEON, atd.

Programový balíček LAPACK je volně dostupná softwarová knihovna, její instalaci provedeme buď ze softwarového centra používané systémové distribuce, nebo z adresy <http://www.netlib.org/lapack>. Při překladu (kompilaci) používaného programového souboru zadáme odkaz na LAPACK, například: `gfortran název_souboru.f95 -llapack`. Popis jednotlivých podprogramů a jejich využití (např. knihovna DGBSV pro řešení soustav reálných lineárních rovnic o libovolném počtu proměnných nebo DGTSV, vhodná pro řešení tridiagonálních matic, atd.) jsou dostupné v uživatelských příručkách, například v Anderson et al. (1999).

- Ukázka schématu podprogramu DGBSV, určeného pro řešení soustavy lineárních rovnic (překlad):

N (vstup, INTEGER) = počet rovnic = řád čtvercové matice A, $N \geq 0$.

KL (vstup, INTEGER) = počet spodních diagonál matice A, $KL \geq 0$.

KU (vstup, INTEGER) = počet horních diagonál matice A, $KU \geq 0$.

NRHS (vstup, INTEGER) = počet sloupců pravé strany (tj. matice B), $NRHS \geq 0$.

AB (vstup/výstup, DOUBLE PRECISION) = pole dimenze (LDAB,N).

Na vstupu: matice A v pásovém uložení, v řádcích od $KL+1$ do $2*KL+KU+1$; řádky 1 až KL pole nemusí být vypsány. j-tý sloupec pole A je uložen jako j-tý sloupec pole AB následovně: $AB(KL+KU+1+i-j, j) = A(i,j)$ pro $\max(1, j-KU) \leq i \leq \min(N, j+KL)$.

Na výstupu: detaily faktorizace - matice U je uložena jako horní trojúhelníková pásová matice s $KL+KU$ horními diagonálami v řádcích od 1 do $KL+KU+1$, multiplikátory M, použité během faktorizace jsou uchovány v řádcích od $KL+KU+2$ do $2*KL+KU+1$ (viz schéma níže).

LDAB (vstup, INTEGER) = určující dimenze pole AB. $LDAB \geq 2*KL+KU+1$.

IPIV (výstup, INTEGER) = pole dimenze (N), indexy pivotů, které definují permutační matici; i-tý řádek matice byl zaměněn za řádek IPIV(i).

B (vstup/výstup, DOUBLE PRECISION) = pole dimenze (LDB, NRHS), na vstupu je N : NRHS matice pravé strany B. Na výstupu, pokud INFO = 0, je N : NRHS řešení matice X.

LDB (vstup, INTEGER) = určující dimenze pole B. $LDB \geq \max(1,N)$.

INFO (výstup, INTEGER) = 0: úspěšný výstup, < 0: pokud INFO = -i, pak i-tý argument má nepovolenou hodnotu, > 0: pokud INFO = i, U(i,i) je přesně 0. Faktorizace je ukončena, ale faktor U je přesně singulární, řešení nemohlo být vypočteno.

DALŠÍ DETAILS:

Schéma pásového uložení je ilustrováno na následujícím příkladu, kdy $M = N = 6$, $KL = 2$, $KU = 1$:

Na vstupu:						Na výstupu:					
*	*	*	+	+	+	*	*	*	u14	u25	u36
*	*	+	+	+	+	*	*	u13	u24	u35	u46
*	a12	a23	a34	a45	a56	*	u12	u23	u34	u45	u56
a11	a22	a33	a44	a55	a66	u11	u22	u33	u44	u55	u66
a21	a32	a43	a54	a65	*	m21	m32	m43	m54	m65	*
a31	a42	a53	a64	*	*	m31	m42	m53	m64	*	*

Prvky pole označené * nejsou používány ve výpočetním procesu; prvky označené + nemusí být uvedeny na vstupu, ale jsou nutné ve výpočetním procesu pro uložení prvků pole U z důvodu nedostatku místa, vyplývajícího z výměny řádků.

- Ukázka schématu podprogramu DGTSV, určeného pro řešení tridiagonálních matic:

N (vstup, INTEGER) = počet rovnic = řád čtvercové tridiagonální matice A, $N \geq 0$.

NRHS (vstup, INTEGER) = počet sloupců pravé strany (tj. matice B), $NRHS \geq 0$.

DL (vstup/výstup, DOUBLE PRECISION) = na vstupu pole prvků spodní (sub) diagonály matice A, dimenze N-1, na výstupu je toto pole přepsáno N-2 prvky druhé horní diagonály horní trojúhelníkové matice U, dané LU faktorizací.

D (vstup/výstup, DOUBLE PRECISION) = pole dimenze N, na vstupu obsahuje diagonální prvky matice A, na výstupu je toto pole přepsáno diagonálními prvky matice U.

DU (vstup/výstup, DOUBLE PRECISION) = pole dimenze N-1, na vstupu obsahuje N-1 prvků horní (super) diagonály matice A, na výstupu je toto pole přepsáno N-1 prvky první horní diagonály horní trojúhelníkové matice U.

B (vstup/výstup, DOUBLE PRECISION) = pole dimenze (LDB, NRHS), na vstupu je N : NRHS matice pravé strany B. Na výstupu, pokud INFO = 0, je N : NRHS řešení matice X.

LDB (vstup, INTEGER) = určující dimenze pole B. $LDB \geq \max(1, N)$.

INFO (výstup, INTEGER) = 0: úspěšný výstup, < 0: pokud INFO = -i, pak i-tý argument má nepovolenou hodnotu, > 0: pokud INFO = i, U(i,i) je přesně 0. Faktori-zace je ukončena, ale faktor U je přesně singulární, řešení nemohlo být vypočteno.

Obdobným způsobem jsou sestaveny i ostatní knihovny. Příklady řešení a programových skriptů s odkazem na LAPACK uvádíme v dalších odstavcích D.2.1, D.3.1, D.3.2, D.3.3, D.5.1, D.5.7, atd.

D.2 Interpolace

Interpolací rozumíme nahrazení složitější funkční závislosti závislostí jednodušší, tedy aproximace dané funkce jinou vhodnou funkcí. Interpolací rozumíme interpolaci diskretní funkce, tj. funkce, dané konečným souborem bodů definičního oboru a jim přiřazených funkčních hodnot (reprezentovaných zpravidla tabulkou), pomocí funkce (případně i jejích derivací),

nabývající v těchto bodech stejných hodnot jako původní zadaná funkce. Nejvhodnějšími interpolačními funkcemi jsou polynomy různého (zvoleného) stupně, např. tzv. *Lagrangeův* a *Newtonův* interpolační polynom (Humlíček, 2009; Vításek, 1987) nebo tzv. *splajny*. V následujícím odstavci D.2.1 je stručně ukázán často používaný tzv. *kubický interpolační splajn* pro jednorozměrné interpolace. V odstavcích D.2.2 a D.2.3 jsou dokumentovány dvourozměrné *bilineární* a *bikubické* interpolace pomocí polynomů 1. a 3. stupně, vedených ve dvou směrech.

Při praktických výpočtech je třeba vždy zvážit, případně vyzkoušet, který typ interpolace je pro danou úlohu nejvhodnější. Jsou-li například velké disproporce mezi vzdálenostmi zadaných bodů (tj. zadaná „sít“ bodů je místy hustá a místy velmi řídká), je vhodnější použít jednodušší, „po částech“ lineární interpolaci, protože interpolace spojitou funkcí (například kubickým interpolačním splajnem, viz odstavce D.2.1) může být v řídkých oblastech neúměrně „rozkmitaná“. Případně je možné použít pro různé úseky interpolované závislosti různé typy aproximací (a ve styčných bodech je vhodným způsobem navázat).

D.2.1 Kubický interpolační splajn

(z anglického *spline*) je jednou z nejčastěji používaných interpolačních funkcí. Jedná se o tzv. *po částech* (piecewise) interpolační polynom 3. stupně s_i ve tvaru

$$S(x) = s_1(x) \text{ pro } x_1 \leq x < x_2, s_2(x) \text{ pro } x_2 \leq x < x_3, \dots, s_{n-1}(x) \text{ pro } x_{n-1} \leq x < x_n, \quad (\text{D.1})$$

definovaný jako

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad (\text{D.2})$$

jehož druhé derivace označíme jako M_i . Je to tedy soustava kubických funkcí, které na sebe v zadaných bodech $[x_i, y_i]$ navazují jak funkční hodnotou, tak první a druhou derivací. Podle okrajových podmínek rozlišujeme různé typy těchto splajnů, například tzv. *přirozený splajn* je určen okrajovými podmínkami $M_1 = M_n = 0$, *parabolický ukončený splajn* je určen okrajovými podmínkami $M_1 = M_2, M_n = M_{n-1}$ (extrapolace nultého řádu), *kubický ukončený splajn* je určen okrajovými podmínkami $M_1 = 2M_2 - M_3, M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2}$ (extrapolace 1. řádu nebo také lineární extrapolace), atd.

Z podmínek spojitosti funkčních hodnot i prvních a druhých derivací v bodech x_i , vyplývá pro $i = 0, \dots, n - 1$ následující:

$$s_i(x_i) = y_i, \quad s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad (\text{D.3})$$

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i) = c_i, \quad s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i) = M_i = 2b_i, \quad (\text{D.4})$$

tyto vnitřní podmínky jsou dále doplněny dvěma uvedenými okrajovými podmínkami, danými typem splajnu. Porovnáním všech uvedených podmínek ve všech uzlových bodech $[x_i, y_i]$ dostáváme soustavu lineárních rovnic pro neznámé druhé derivace M_i ve vnitřních uzlových bodech:

$$(x_{i+1} - x_i) M_{i+1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1}) M_i + (x_i - x_{i-1}) M_{i-1} = 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right). \quad (\text{D.5})$$

Tuto soustavu rovnic lze zapsat pomocí tzv. *tridiagonální matice* ve tvaru (kde zavedeme $\Delta x_i =$

integer :: INFO, KL, KU, LDAB, LDB, N, RHS deklarace celočíselných proměnných procedury LAPACK - viz sekce D.1.

parameter(KL=np-3, KU=np-3, N=np-2, KUKL=KL+KU+1, LDAB=2*KL+KU+1, & LDB=N, RHS=1) zadání fixních hodnot celočíselných parametrů

integer :: IPIV(N) zadání parametru jako pole o N prvcích

double precision, dimension(np) :: x, y deklarace reálných veličin x, y jako pole (vektoru) o np prvcích s tzv. dvojitou přesností, umožňující výpočet čísla na 16 desetinných míst a do mocniny cca 10^{300} (v závislosti na parametrech počítače).

double precision, dimension(np) :: M(N,N), AB(LDAB,N), B(LDB,RHS) zadání parametrů jako dvojrozměrných polí

double precision :: f(np), res(np), a(np), b(np), c(np), d(np) jiný způsob deklarace reálných veličin jako pole (vektoru) o np prvcích s dvojitou přesností.

double precision :: h deklarace reálných skalárních veličin.

parameter (h=1.d0) zadání fixní hodnoty intervalu nezávisle proměnné, kterou nelze v programu dále měnit

x=(/1.d0*i, i=1,np)/
y=(/1.d0, 3.d0, 4.d0, 1.5d0, 1.5d0, 5.d0, 7.d0, 5.d0, 2.d0, 0.d0/) vektor hodnot nezávisle proměnné.

y-ové (naměřené) hodnoty, np = počet naměřených hodnot

do i=1,N cyklus výpočtu druhých derivací M, zápis tridiagonální matice

do j=1,N

if(j.eq.i)**then**

 M(i,j)=4.d0

elseif(j.eq.i-1)**then**

 M(i,j)=1.d0

elseif(j.eq.i+1)**then**

 M(i,j)=1.d0

else

 M(i,j)=0.d0

endif

end do

end do

do i=1,N výpočetní cyklus procedury LAPACK

do j=1,N

 AB(KUKL+i-j, j)=M(i,j)

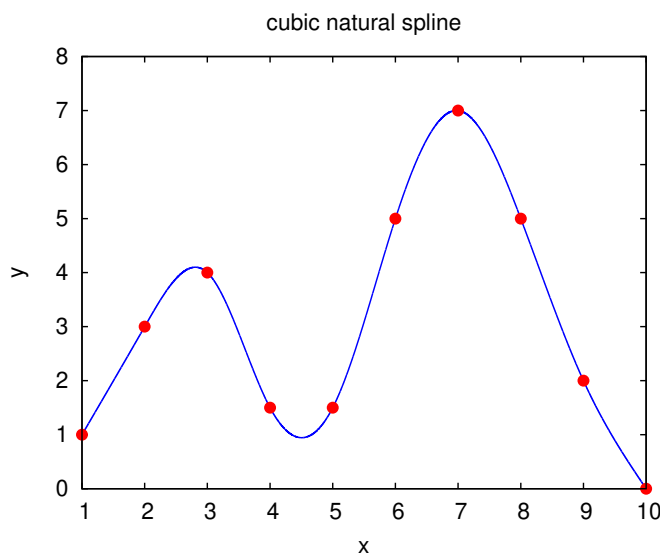
end do

end do

do i=1,N výpočet pravé strany

 B(i,1)=6.d0/h**2.d0*(y(i)-2.d0*y(i+1)+y(i+2))

end do



Obrázek D.1: Graf kubického přirozeného interpolačního splajnu, popsaného v oddíle D.2.1.

volání podprogramu DGBSV (viz oddíl D.1):

```
call DGBSV(N,KL,KU,1,AB,LDAB,IPIV,B,N,INFO)
```

```
if(INFO.ne.0) write(*,*) "INFO=",INFO,"!!!"
```

```
a(1)=B(1,1)/6.d0/h
```

výpočet koeficientů a,b,c,d v 1. poli splajnu

```
b(1)=0.d0
```

```
c(1)=(y(2)-y(1))/h-B(1,1)/6.d0*h
```

```
d(1)=y(1)
```

```
do i=2,np-2
```

cyklus výpočtu koeficientů a,b,c,d v prostředních polích splajnu

```
  a(i)=(B(i,1)-B(i-1,1))/6.d0/h
```

```
  b(i)=B(i-1,1)/2.d0
```

```
  c(i)=(y(i+1)-y(i))/h-(B(i,1)+2.d0*B(i-1,1))/6.d0*h
```

```
  d(i)=y(i)
```

```
end do
```

```
a(np-1)=-B(N,1)/6.d0/h
```

výpočet koeficientů v posledním poli

```
b(np-1)=B(N,1)/2.d0
```

```
c(np-1)=(y(np)-y(np-1))/h-2.d0*B(N,1)/6.d0*h
```

```
d(np-1)=y(np-1)
```

```
do i=1,np-1
```

zápis koeficientů do souboru fort.1

```
  write(1,*) a(i), b(i), c(i), d(i)
```

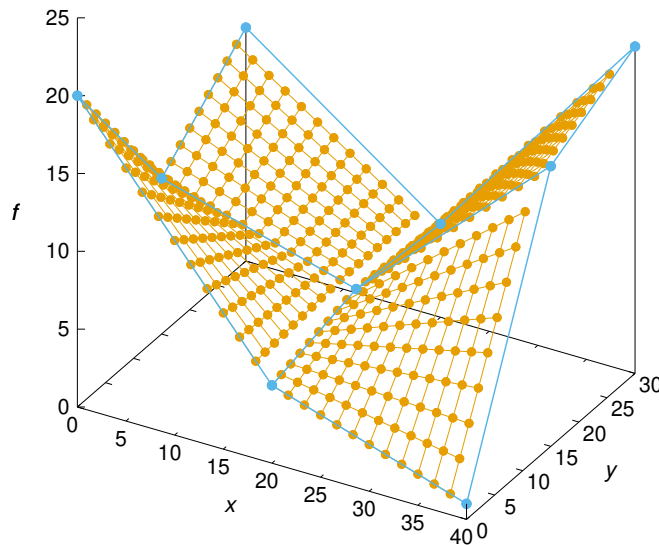
```
end do
```

```
end program nat3_splajn
```

ukončení programu

D.2.2 Bilineární interpolace

V praxi jsou často velmi důležité interpolace funkcí dvou nebo více proměnných. Například tabulku naměřené hodnoty určité veličiny v různých časech a v různých vzdálenostech od zvoleného referenčního bodu, chceme interpolovat jak pro mezilehlé časy, tak pro mezilehlé polohy.



Obrázek D.2: Schématické znázornění bilineární interpolace. Zadané body funkce $f(x_\alpha, y_\beta)$ se nacházejí v uzlech modré sítě (zvýrazněné modrými kotoučky), okrová síť představuje její interpolaci, kdy ve směru x je každá buňka modré sítě dělena na 12 dílčích intervalů a ve směru y na 9 dílčích intervalů. Vzhledem ke zvolenému výpočetnímu algoritmu je interpolace na „vnějších“ okrajích modrých buněk „nedokončená“, v případě dalších sousedních modrých buněk by se počítaly na jejich „vnitřních“ hranách.

Tyto interpolace se rovněž velmi často používají při úpravách obrazu, kdy se hodnoty barev a intenzit jednotlivých nasnímaných pixelů přepočítávají pro mezilehlé body a tím se docílí (zdánlivě) vyššího rozlišení.

Nejjednodušší dvourozměrnou interpolací je tzv. *bilineární interpolace* funkce dvou proměnných, která je rozšířením lineární interpolace do dvou rozměrů, kde v každém mezikroku přiřadíme indexům i, j pro „vnitřní“ a „vnější“ okraj dílčí interpolované oblasti (buňky) v obou směrech hodnoty 0 a 1. Pro zadané i interpolované funkční hodnoty platí (připomínáme, že $\lim_{x \rightarrow 0} x^0 = 1$)

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 a_{ij} x^i y^j = a_{00} + a_{01}y + a_{10}x + a_{11}xy, \quad (\text{D.10})$$

s neznámými prvky *konstantní* 1×4 matice $\mathbf{a} = a_{ij}$ (kde horní indexy i, j v rovnici (D.10) znamenají mocniny). Označme x, y *relativní* (vůči počátku buňky) souřadnice interpolované hodnoty (interpolantu), x_α, y_β ($\alpha, \beta = 0, 1$) souřadnice okrajů buňky se zadanými hodnotami $\mathbf{f}_0 = [f(x_0, y_0), f(x_0, y_1), f(x_1, y_0), f(x_1, y_1)]$, $\mathbf{k} = x^i y^j$ a $\mathbf{A} = x_\alpha^i y_\beta^j$ (matice 4×4). Z rovnice (D.10) dostáváme $\mathbf{f}_0 = \mathbf{aA}$ a tedy $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}_0$. Zároveň musí platit $f(x, y) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}$, tedy

$$f(x, y) = \mathbf{kA}^{-1}\mathbf{f}_0. \quad (\text{D.11})$$

Uvedený princip si ukážeme na příkladu jedné „buňky“ se souřadnicemi okrajů $x_0 = 0, x_1 = 20, y_0 = 0, y_1 = 15$ a se zadanými hodnotami $f(x_0, y_0) = 20, f(x_0, y_1) = 10, f(x_1, y_0) = 5, f(x_1, y_1) = 6,5$ („levá spodní“ modrá buňka na obrázku D.2). V rámci této buňky chceme zjistit bilineární interpolant $f(x, y)$ například v bodě $x = 10, y = 5$. Explicitní zápis rovnice

(D.11) v tomto případě bude

$$f(10, 5) = (1, 5, 10, 50) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 20 & 0 \\ 1 & 15 & 20 & 300 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \\ 6,5 \end{pmatrix} = \frac{133}{12}. \quad (\text{D.12})$$

Analogickým způsobem se budou počítat interpolace i v ostatních zadaných buňkách.

Následující numerický algoritmus ilustruje způsob výpočtu bilineární interpolace dvourozměrné sítě, sestávající ze čtyř buněk se zadanými hodnotami v rozích, kdy ve směru x je každá buňka sítě rozdělena na 12 dílčích intervalů a ve směru y na 9 dílčích intervalů. Výsledek interpolace je znázorněn na obrázku D.2.

- **Příklad programového skriptu pro bilineární interpolaci na čtyřech prostorových buňkách dvourozměrné diskrétní funkce (fortran 95):**

program bilinear	deklarace názvu programu
implicit none	
integer :: i, j, ii, jj	deklarace celočíselných proměnných: i, j = pořadová čísla bodů „modré“ sítě, ii, jj = pořadová čísla bilineárních interpolačních uzlů (okrová síť).
parameter (ni=3, nj=3, nii=13, njj=10)	zadání rozsahu deklarovaných proměnných
double precision :: x(ni), y(nj), f(ni,nj)	zadání reálných proměnných s dvojitou přesností
double precision :: p(ni,nii), q(nj,njj), ff(ni,nj, nii,njj)	
double precision, parameter :: dx=40.d0, dy=30.d0	zadání rozsahu celé domény

výpočet souřadnic síťových uzlů se zadanými hodnotami funkce f:

```
do i=1,ni
  x(i)=dx/dfloat(ni-1)*dfloat(i-1)
end do
do j=1,nj
  y(j)=dy/dfloat(nj-1)*dfloat(j-1)
end do
```

tabulkový výčet zadaných hodnot funkce f v uzlových bodech (1. pořadovému číslu odpovídá směr x, 2. směr y):

```
f(1,1)=20.d0
f(2,1)=5.d0
f(3,1)=1.d0
f(1,2)=10.d0
f(2,2)=6.5d0
f(3,2)=18.d0
f(1,3)=15.d0
f(2,3)=6.d0
f(3,3)=21.d0
```

výpis (uzlové) sítě se zadanými hodnotami funkce f do souboru fort.10:

```
do i=1,ni
```

```

do j=1,nj
  write(10,*) x(i), y(j), f(i,j)
end do
write(10,*)
end do

```

volání podprogramu pro výpočet interpolací v jednotlivých buňkách uzlové sítě:

```
call interpol(ni,nj,nii,njj,x,y,p,q,dx,dy,f,ff)
```

```
stop
```

```
end program bilinear
```

konec hlavního programu

podprogram pro výpočet interpolací:

```
subroutine interpol(ni,nj,nii,njj,x,y,p,q,dx,dy,f,ff)
```

```
implicit none
```

```
integer :: i, j, k, ii, jj
```

```
integer, intent(in) :: ni, nj, nii, njj
```

```
double precision, intent(in) :: x(ni), y(nj), dx, dy, f(ni,nj)
```

```
double precision :: xx(nii), yy(njj)
```

```
double precision, intent(out) :: p(ni,nii), q(nj,njj), ff(ni,nj,nii,njj)
```

```
double precision :: B1(ni-1,nj-1), B2(ni-1,nj-1), B3(ni-1,nj-1), B4(ni-1,nj-1)
```

```
integer :: INFO
```

```
integer, parameter :: N=4
```

```
integer,dimension(size(A,1)) :: IPIV
```

```
double precision, dimension(N,N) :: A
```

```
double precision, dimension(size(A,1),size(A,2)) :: AINV
```

```
double precision, dimension(size(A,1)) :: WORK
```

matice A:

```
do i=1,N
```

inicializace nulové matice

```
  do j=1,N
```

```
    A(i,j)=0.d0
```

```
  end do
```

```
end do
```

```
A(1,1)=1.d0
```

nenulové prvky matice A

```
A(2,1)=1.d0
```

```
A(2,3)=dy/dfloat(nj-1)
```

```
A(3,1)=1.d0
```

```
A(3,2)=dx/dfloat(ni-1)
```

```
A(4,1)=1.d0
```

```
A(4,2)=dx/dfloat(ni-1)
```

```
A(4,3)=dy/dfloat(nj-1)
```

```
A(4,4)=dx/dfloat(ni-1)*dy/dfloat(nj-1)
```

Uložíme A jako AINV, abychom předešli jejímu přepsání

```
AINV=A
```

----- procedura LAPACK pro výpočet inverzní matice -----

procedura DGETRF počítá LU faktorizaci obecné matice A.

```
call DGETRF(N,N,AINV,N,IPIV,INFO)
if(INFO.ne.0) write(*,*) "Matrix is numerically singular"
  stop
endif
```

procedura DGETRI počítá inverzní matici.

```
call DGETRI(N,AINV,N,IPIV,WORK,N,INFO)
if(INFO.ne.0) write(*,*) "Matrix inversion failed"
  stop
endif
```

----- Konec procedury LAPACK -----

```
do ii=1,nii
  xx(ii)=dx/dfloat(ni-1)/dfloat(nii-1)*dfloat(i-1)
end do
do jj=1,njj
  yy(jj)=dy/dfloat(nj-1)/dfloat(njj-1)*dfloat(j-1)
end do
do i=1,ni-1
  do j=1,nj-1
    B1(i,j)=AINV(1,1)*f(i,j)+AINV(1,2)*f(i,j+1)+AINV(1,3)*f(i+1,j) &
      +AINV(1,4)*f(i+1,j+1)
    B2(i,j)=AINV(2,1)*f(i,j)+AINV(2,2)*f(i,j+1)+AINV(2,3)*f(i+1,j) &
      +AINV(2,4)*f(i+1,j+1)
    B3(i,j)=AINV(3,1)*f(i,j)+AINV(3,2)*f(i,j+1)+AINV(3,3)*f(i+1,j) &
      +AINV(3,4)*f(i+1,j+1)
    B4(i,j)=AINV(4,1)*f(i,j)+AINV(4,2)*f(i,j+1)+AINV(4,3)*f(i+1,j) &
      +AINV(4,4)*f(i+1,j+1)
  end do
end do
```

absolutní souřadnice p,q:

```
do i=1,ni-1
  do ii=1,nii-1
    p(i,ii)=xx(ii)+x(i)
  end do
end do
do j=1,nj-1
  do jj=1,njj-1
    q(j,jj)=yy(jj)+y(j)
  end do
end do
```

výpočet interpolantu:

```
do i=1,ni-1
  do j=1,nj-1
    do ii=1,nii-1
      do jj=1,njj-1
        ff(i,j,ii,jj)=B1(i,j)+yy(jj)*B2(i,j)+xx(ii)*B3(i,j)+xx(ii)*yy(jj)*B4(i,j)
      end do
    end do
  end do
end do
```

```

    end do
  end do
end do

zápis interpolantů funkce f do souboru fort.11:
do i=1,ni-1
  do j=1,nj-1
    do ii=1,nii-1
      do jj=1,njj-1
        write(11,*) p(i,ii), q(j,jj), ff(i,j,ii,jj)
      end do
    end do
  end do
end do

return
end subroutine interpol

```

D.2.3 Bikubická interpolace

Bilineární interpolace bývá často málo vhodná, vzhledem k tomu, že interpolované plochy jednotlivých buněk zadané funkce tvoří jako celek nespojitou plochu. Z toho důvodu je výhodnější použít tzv. *bikubickou interpolaci*, která je dvourozměrnou obdobou spojitě interpolace jedno-rozměrné funkce polynomem třetího stupně, například kubickým interpolačním splajnem (viz odstavec D.2.1).

Na rozhraní jednotlivých interpolovaných buněk se musí shodovat nejen funkční hodnoty interpolačních kubických křivek, ale i jejich první derivace a také smíšená druhá derivace. Analogicky k rovnici (D.10) (včetně způsobu značení, zavedeného v odstavci D.2.2) tak dostáváme

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j, \quad (\text{D.13})$$

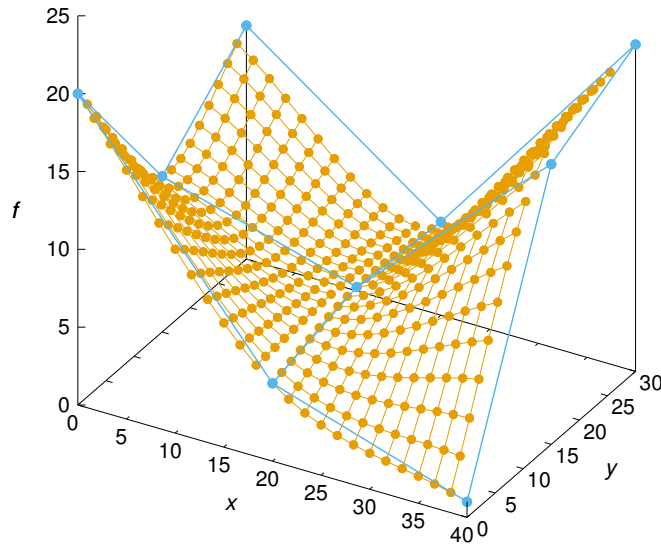
$$f_x(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 i a_{ij} x^{i-1} y^j, \quad (\text{D.14})$$

$$f_y(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 j a_{ij} x^i y^{j-1}, \quad (\text{D.15})$$

$$f_{xy}(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 i j a_{ij} x^{i-1} y^{j-1}, \quad (\text{D.16})$$

kde horní indexy $i, j, i-1, j-1$ znamenají mocniny.

Pro stejnou zadanou funkci $f_0(x_\alpha, y_\beta)$ jako v odstavci D.2.2 budou rovnice (D.13) - (D.16)



Obrázek D.3: Schématické znázornění bikubické interpolace stejné (modré) sítě jako na obrázku D.2.

pro „levou dolní“ buňku explicitně rozepsány ve tvaru:

$$f_0(0, 0) = a_{00}, \quad (\text{D.17})$$

$$f_0(0, 15) = a_{00} + 15a_{01} + 225a_{02} + 3375a_{03}, \quad (\text{D.18})$$

$$f_0(20, 0) = a_{00} + 20a_{10} + 400a_{20} + 8000a_{30}, \quad (\text{D.19})$$

$$\begin{aligned} f_0(20, 15) = & a_{00} + 15a_{01} + 225a_{02} + 3375a_{03} + 20a_{10} + 300a_{11} + 4500a_{12} + 67\,500a_{13} + \\ & + 400a_{20} + 6000a_{21} + 90\,000a_{22} + 1\,350\,000a_{23} + 8000a_{30} + 120\,000a_{31} + 1\,800\,000a_{32} + \\ & + 27\,000\,000a_{33}. \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

$$f_{0x}(0, 0) = a_{10}, \quad (\text{D.21})$$

$$f_{0x}(0, 15) = a_{10} + 15a_{11} + 225a_{12} + 3375a_{13}, \quad (\text{D.22})$$

$$f_{0x}(20, 0) = a_{10} + 40a_{20} + 1200a_{30}, \quad (\text{D.23})$$

$$\begin{aligned} f_{0x}(20, 15) = & a_{10} + 15a_{11} + 225a_{12} + 3375a_{13} + 40a_{20} + 600a_{21} + 9000a_{22} + 135\,000a_{23} + \\ & + 1200a_{30} + 18\,000a_{31} + 270\,000a_{32} + 4\,050\,000a_{33}. \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

$$f_{0y}(0, 0) = a_{01}, \quad (\text{D.25})$$

$$f_{0y}(0, 15) = a_{01} + 30a_{02} + 675a_{03}, \quad (\text{D.26})$$

$$f_{0y}(20, 0) = a_{01} + 20a_{11} + 400a_{21} + 8000a_{31}, \quad (\text{D.27})$$

$$\begin{aligned} f_{0y}(20, 15) = & a_{01} + 30a_{02} + 675a_{03} + 20a_{11} + 600a_{12} + 13\,500a_{13} + 400a_{21} + 12\,000a_{22} + \\ & + 270\,000a_{23} + 8000a_{31} + 240\,000a_{32} + 5\,400\,000a_{33}. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

$$f_{0xy}(0, 0) = a_{11}, \quad (\text{D.29})$$

$$f_{0xy}(0, 15) = a_{11} + 30a_{12} + 675a_{13}, \quad (\text{D.30})$$

$$f_{0xy}(20, 0) = a_{11} + 40a_{21} + 1200a_{31}, \quad (\text{D.31})$$

$$\begin{aligned} f_{0xy}(20, 15) = & a_{11} + 30a_{12} + 675a_{13} + 40a_{21} + 1200a_{22} + 27\,000a_{23} + 1200a_{31} + 36\,000a_{32} + \\ & + 810\,000a_{33}. \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

Označme opět (viz odstavec D.2.2) x, y relativní souřadnice interpolantu a x_α, y_β souřadnice okrajů buňky se zadanými hodnotami $\mathbf{f}_0 = [f(x_0, y_0), f(x_0, y_1), f(x_1, y_0), f(x_1, y_1)]$. Na rozdíl od bilineární interpolace bude matice $\mathbf{a} = a_{ij}$ dimenze 1×16 . Zavedeme vektor se 16 složkami,

$$\mathbf{F}_0 = [f(x_0, y_0), f(x_0, y_1), f(x_1, y_0), f(x_1, y_1), f_x(x_0, y_0), f_x(x_0, y_1), f_x(x_1, y_0), f_x(x_1, y_1), f_y(x_0, y_0), f_y(x_0, y_1), f_y(x_1, y_0), f_y(x_1, y_1), f_{xy}(x_0, y_0), f_{xy}(x_0, y_1), f_{xy}(x_1, y_0), f_{xy}(x_1, y_1)], \quad (\text{D.33})$$

vektor

$$\mathbf{K} = x^i y^j = 1, y, y^2, y^3, x, xy, xy^2, \dots, x^3 y^3, \quad (\text{D.34})$$

kde $i, j = 0, 1, 2, 3$, bude mít rovněž 16 složek a matice \mathbf{A} , daná v tomto případě koeficienty rovnic (D.17) - (D.32),

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & y_1 & y_1^2 & y_1^3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & y_1 & y_1^2 & y_1^3 & x_1 & x_1 y_1 & \cdots & x_1^3 y_1^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 9x_1^2 y_1^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.35})$$

bude dimenze 16×16 . Derivace v uzlových bodech sítě budou vypadat následovně: ve vnitřních bodech budou definovány jako

$$f_x(x_\alpha, y_\beta) = \frac{f(x_{\alpha+1}, y_\beta) - f(x_{\alpha-1}, y_\beta)}{x_{\alpha+1} - x_{\alpha-1}}, \quad (\text{D.36})$$

$$f_y(x_\alpha, y_\beta) = \frac{f(x_\alpha, y_{\beta+1}) - f(x_\alpha, y_{\beta-1})}{y_{\beta+1} - y_{\beta-1}}, \quad (\text{D.37})$$

$$f_{xy}(x_\alpha, y_\beta) = \frac{f(x_{\alpha+1}, y_{\beta+1}) - f(x_{\alpha-1}, y_{\beta+1}) - f(x_{\alpha+1}, y_{\beta-1}) + f(x_{\alpha-1}, y_{\beta-1})}{(x_{\alpha+1} - x_{\alpha-1})(y_{\beta+1} - y_{\beta-1})}, \quad (\text{D.38})$$

v „horních“ krajních bodech budou

$$f_x(x_\alpha, y_\beta) = \frac{f(x_\alpha, y_\beta) - f(x_{\alpha-1}, y_\beta)}{x_\alpha - x_{\alpha-1}}, \quad (\text{D.39})$$

$$f_y(x_\alpha, y_\beta) = \frac{f(x_\alpha, y_\beta) - f(x_\alpha, y_{\beta-1})}{y_\beta - y_{\beta-1}}, \quad (\text{D.40})$$

$$f_{xy}(x_\alpha, y_\beta) = \frac{f(x_\alpha, y_\beta) - f(x_{\alpha-1}, y_\beta) - f(x_\alpha, y_{\beta-1}) + f(x_{\alpha-1}, y_{\beta-1})}{(x_\alpha - x_{\alpha-1})(y_\beta - y_{\beta-1})} \quad (\text{D.41})$$

a v „dolních“ krajních bodech budou

$$f_x(x_\alpha, y_\beta) = \frac{f(x_{\alpha+1}, y_\beta) - f(x_\alpha, y_\beta)}{x_{\alpha+1} - x_\alpha}, \quad (\text{D.42})$$

$$f_y(x_\alpha, y_\beta) = \frac{f(x_\alpha, y_{\beta+1}) - f(x_\alpha, y_\beta)}{y_{\beta+1} - y_\beta}, \quad (\text{D.43})$$

$$f_{xy}(x_\alpha, y_\beta) = \frac{f(x_{\alpha+1}, y_{\beta+1}) - f(x_\alpha, y_{\beta+1}) - f(x_{\alpha+1}, y_\beta) + f(x_\alpha, y_\beta)}{(x_{\alpha+1} - x_\alpha)(y_{\beta+1} - y_\beta)}. \quad (\text{D.44})$$

Obdobným způsobem budou definovány i derivace v interpolovaných bodech. Analogicky k rovnici (D.11) bude mít výsledná rovnice pro výpočet interpolantů tvar:

$$f(x, y) = \mathbf{K}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}_0. \quad (\text{D.45})$$

Numerický algoritmus bude v tomto případě výrazně rozsáhlejší, než v odstavci D.2.2, nicméně jej lze sestavit zcela obdobně jako v případě bilineární interpolace. Z toho důvodu zde uvádíme pouze podobu matice \mathbf{A} , členu B1 (kdy ostatní členy \mathbf{B} budou zcela obdobné, vždy s prvním indexem sčítacím) a výpočtu výsledných interpolantů, ostatní operace budou (až na případnou dimenzi) shodné s odstavcem D.2.2:

matice \mathbf{A} ($N=16$):

```

do i=1,N                                     inicializace nulové matice
  do j=1,N
    A(i,j)=0.d0
  end do
end do
A(1,1)=1.d0                                  nenulové prvky matice A
A(2,1)=1.d0
A(2,2)=dy/dfloat(nj-1)
A(2,3)=(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(2,4)=(dy/dfloat(nj-1))**3.d0
A(3,1)=1.d0
A(3,5)=dx/dfloat(ni-1)
A(3,9)=(dx/dfloat(ni-1))**2.d0
A(3,13)=(dx/dfloat(ni-1))**3.d0
A(4,1)=1.d0
A(4,2)=dy/dfloat(nj-1)
A(4,3)=(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(4,4)=(dy/dfloat(nj-1))**3.d0
A(4,5)=dx/dfloat(ni-1)
A(4,6)=dx/dfloat(ni-1)*dy/dfloat(nj-1)
A(4,7)=dx/dfloat(ni-1)*(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(4,8)=dx/dfloat(ni-1)*(dy/dfloat(nj-1))**3.d0
A(4,9)=(dx/dfloat(ni-1))**2.d0
A(4,10)=(dx/dfloat(ni-1))**2.d0*dy/dfloat(nj-1)
A(4,11)=(dx/dfloat(ni-1))**2.d0*(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(4,12)=(dx/dfloat(ni-1))**2.d0*(dy/dfloat(nj-1))**3.d0
A(4,13)=(dx/dfloat(ni-1))**3.d0
A(4,14)=(dx/dfloat(ni-1))**3.d0*dy/dfloat(nj-1)
A(4,15)=(dx/dfloat(ni-1))**3.d0*(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(4,16)=(dx/dfloat(ni-1))**3.d0*(dy/dfloat(nj-1))**3.d0
A(5,5)=1.d0
A(6,5)=1.d0
A(6,6)=dy/dfloat(nj-1)
A(6,7)=(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(6,8)=(dy/dfloat(nj-1))**3.d0
A(7,5)=1.d0
A(7,9)=2.d0*dx/dfloat(ni-1)

```

```

A(7,13)=3.d0*(dx/dfloat(ni-1))**2.d0
A(8,5)=1.d0
A(8,6)=dy/dfloat(nj-1)
A(8,7)=(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(8,8)=(dy/dfloat(nj-1))**3.d0
A(8,9)=2.d0*dx/dfloat(ni-1)
A(8,10)=2.d0*dx/dfloat(ni-1)*dy/dfloat(nj-1)
A(8,11)=2.d0*dx/dfloat(ni-1)*(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(8,12)=2.d0*dx/dfloat(ni-1)*(dy/dfloat(nj-1))**3.d0
A(8,13)=3.d0*(dx/dfloat(ni-1))**2.d0
A(8,14)=3.d0*(dx/dfloat(ni-1))**2.d0*(dy/dfloat(nj-1))
A(8,15)=3.d0*(dx/dfloat(ni-1))**2.d0*(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(8,16)=3.d0*(dx/dfloat(ni-1))**2.d0*(dy/dfloat(nj-1))**3.d0
A(9,2)=1.d0
A(10,2)=1.d0
A(10,3)=2.d0*dy/dfloat(nj-1)
A(10,4)=3.d0*(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(11,2)=1.d0
A(11,6)=dx/dfloat(ni-1)
A(11,10)=(dx/dfloat(ni-1))**2.d0
A(11,14)=(dx/dfloat(ni-1))**3.d0
A(12,2)=1.d0
A(12,3)=2.d0*dy/dfloat(nj-1)
A(12,4)=3.d0*(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(12,6)=dx/dfloat(ni-1)
A(12,7)=dx/dfloat(ni-1)*2.d0*dy/dfloat(nj-1)
A(12,8)=dx/dfloat(ni-1)*3.d0*(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(12,10)=(dx/dfloat(ni-1))**2.d0
A(12,11)=(dx/dfloat(ni-1))**2.d0*2.d0*dy/dfloat(nj-1)
A(12,12)=(dx/dfloat(ni-1))**2.d0*3.d0*(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(12,14)=(dx/dfloat(ni-1))**3.d0
A(12,15)=(dx/dfloat(ni-1))**3.d0*2.d0*dy/dfloat(nj-1)
A(12,16)=(dx/dfloat(ni-1))**3.d0*3.d0*(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(13,6)=1.d0
A(14,6)=1.d0
A(14,7)=2.d0*dy/dfloat(nj-1)
A(15,10)=2.d0*dx/dfloat(ni-1)
A(15,14)=3.d0*(dx/dfloat(ni-1))**2.d0
A(16,6)=1.d0
A(16,7)=2.d0*dy/dfloat(nj-1)
A(16,8)=3.d0*(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(16,10)=2.d0*dx/dfloat(ni-1)
A(16,11)=4.d0*dx/dfloat(ni-1)*dy/dfloat(nj-1)
A(16,12)=6.d0*dx/dfloat(ni-1)*(dy/dfloat(nj-1))**2.d0
A(16,15)=6.d0*(dx/dfloat(ni-1))**2.d0*dy/dfloat(nj-1)
A(16,16)=9.d0*(dx/dfloat(ni-1))**2.d0*(dy/dfloat(nj-1))**2.d0

```

```
do j=1,nj-1
```

```
do j=1,nj-1
```

členy B: f_x , f_y , f_{xy} jsou příslušné parciální derivace

```

B1(i,j)= &
AINV(1,1)*f(i,j)+AINV(1,2)*f(i,j+1)+AINV(1,3)*f(i+1,j)+AINV(1,4)*f(i+1,j+1)+ &
AINV(1,5)*fx(i,j)+AINV(1,6)*fx(i,j+1)+AINV(1,7)*fx(i+1,j)+AINV(1,8)*fx(i+1,j+1)+ &
AINV(1,9)*fy(i,j)+AINV(1,10)*fy(i,j+1)+AINV(1,11)*fy(i+1,j)+AINV(1,12)*fy(i+1,j+1)+ &
AINV(1,13)*fxy(i,j)+AINV(1,14)*fxy(i,j+1)+AINV(1,15)*fxy(i+1,j)+AINV(1,16)*fxy(i+1,j+1)
ostatní členy B2 - B16 budou obdobné jako B1, vždy s prvním maticovým indexem sčítacím
end do
end do
výpočet interpolantu:
do i=1,ni-1
do j=1,nj-1
do ii=1,nii-1
do jj=1,njj-1
ff(i,j,ii,jj)=
B1(i,j)+yy(jj)*B2(i,j)+yy(jj)**2.d0*B3(i,j)+yy(jj)**3.d0*B4(i,j)+ &
xx(ii)*B5(i,j)+xx(ii)*yy(jj)*B6(i,j)+ &
xx(ii)*yy(jj)**2.d0*B7(i,j)+xx(ii)*yy(jj)**3.d0*B8(i,j)+ &
xx(ii)**2.d0*B9(i,j)+xx(ii)**2.d0*yy(jj)*B10(i,j)+ &
xx(ii)**2.d0*yy(jj)**2.d0*B11(i,j)+xx(ii)**2.d0*yy(jj)**3.d0*B12(i,j)+ &
xx(ii)**3.d0*B13(i,j)+xx(ii)**3.d0*yy(jj)*B14(i,j)+ &
xx(ii)**3.d0*yy(jj)**2.d0*B15(i,j)+xx(ii)**3.d0*yy(jj)**3.d0*B16(i,j)
end do
end do
end do
end do

```

Výsledná podoba bikubické interpolace stejně zadané sítě jako v odstavci D.2.2, popsané rovnicemi (D.17) - (D.32), je vykreslena na obrázku D.3.

D.3 Regrese

Regresí (*regresní analýzou*) nazýváme hledání takové funkce (tzv. *regresní funkce*), která nejlépe vystihuje vztah mezi dvěma skupinami proměnných, např. závislost náhodných veličin (naměřených hodnot) na čase, atd. Předem je dáno, která proměnná je nezávislá (vysvětlující nebo také regresor) a která je závislá (vysvětlovaná nebo také odezva). Jednoduchá regrese popisuje závislost odezvy na jednom regresoru, naproti tomu vícenásobná regrese popisuje situaci, kdy odezva závisí na více regresorech. Podle charakteru a průběhu zkoumané závislosti volíme typ *regresního modelu*, například *lineární regresi* (proložení závisle proměnných hodnot přímkou), regresi polynomem n -tého stupně, atd., a také nejvhodnější statistickou metodu, například *metodu nejmenších čtverců* nebo tzv. *robustní regresi*, která eliminuje extrémně vychýlené hodnoty, atd. (viz také pojmy a statistické metody, uvedené v kapitole 12.2 nebo například na stránkách <http://physics.muni.cz/~mikulas/zvc.html>).

D.3.1 Lineární regrese metodou nejmenších čtverců

Souborem n diskrétních hodnot odezvy (vysvětlované proměnné) y_i , $i = 1, \dots, n$, který je určen výčtem uspořádaných dvojic $[x_i, y_i]$, proložíme přímkou (polynom 1. stupně) $f^1(x) = kx + q$ tak, aby součet S druhých mocnin tzv. *reziduí*, tj. vzdáleností bodů y_i od funkčních hodnot

$f(x_i)$ v bodech x_i byl minimální (2. mocniny se zde používají kvůli nezávislosti na znaménku odchylky). Dostáváme tedy rovnici

$$S = \sum_i [y_i - f^I(x_i)]^2 = \sum_i [y_i - (kx_i + q)]^2 = \min, \quad (\text{D.46})$$

pro dvě neznámé hodnoty k a q . Minimalizaci této funkce provedeme položením $\partial S/\partial k = 0$ a zároveň $\partial S/\partial q = 0$, výsledek můžeme zapsat pomocí maticového formalismu jako

$$\begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i y_i \\ \sum_i y_i \end{pmatrix}. \quad (\text{D.47})$$

Snadno tak nalezneme výrazy pro oba hledané parametry v závislosti na uspořádané n -tici $[x_i, y_i]$ (např. na naměřených hodnotách v závislosti na čase nebo poloze),

$$k = \frac{n \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}, \quad q = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}. \quad (\text{D.48})$$

Metodu navrhl a poprvé použil Karl Friedrich Gauss pro výpočet geodetických chyb.

- **Příklad skriptu pro lineární regresi metodou nejmenších čtverců, program fortran 95:**

```

program linearni_regrese deklarace názvu programu
implicit none
tabulka hodnot [xi, yi]:
[1,2], [2,1], [3,4], [4,12], [5,7], [6,8], [7,10], [8,14], [9,19], [10,17]
integer :: i, np deklarace celočíselných proměnných: i =
pořadové číslo dvojice proměnných, np =
celkový počet diskretních hodnot

parameter (np=10) zadání fixní hodnoty np
double precision, dimension(np) :: x, y deklarace reálných veličin x, y jako pole
(vektoru) o np prvcích
double precision :: f(np), res(np) jiný způsob deklarace reálných veličin f, res
jako pole (vektoru) o np prvcích
double precision :: k, q, sumres deklarace reálných skalárních veličin

x=(/1.d0*i, i=1,np)/ vektor hodnot regresoru
y=(/2.d0, 1.d0, 4.d0, 12.d0, 7.d0, 8.d0, 10.d0, 14.d0, 19.d0, 17.d0/) vektor hodnot odezvy

```

1. možnost - přímé použití vzorce (D.48):

hledané koeficienty lineární funkce:

$$k = \frac{(np * \text{SUM}(x*y) - \text{SUM}(x) * \text{SUM}(y))}{(np * \text{SUM}(x**2.d0) - (\text{SUM}(x))**2.d0)}$$

$$q = \frac{(\text{SUM}(x**2.d0) * \text{SUM}(y) - \text{SUM}(x) * \text{SUM}(x*y))}{(np * \text{SUM}(x**2.d0) - (\text{SUM}(x))**2.d0)}$$

2. možnost - použití soustavy rovnic (D.47) a procedury LAPACK - viz sekce D.1:

v záhlaví programu je nutné navíc deklarovat tyto proměnné:

integer :: j, INFO, KL, KU, LDAB, LDB, N, RHS

parameter(KL=1,KU=1,N=2,KUKL=KL+KU+1,LDAB=2*KL+KU+1,LDB=N,RHS=1)

integer :: IPIV(N)

double precision :: M(N,N),AB(LDAB,N),B(LDB,RHS)

double precision :: max

M(1,1)=SUM(x**2.d0) matice levé strany, M(N,N)

M(1,2)=SUM(x)

M(2,1)=SUM(x)

M(2,2)=np

do i=1,N výpočetní cyklus procedury LAPACK

do j=1,N

AB(KUKL+i-j, j)=M(i, j)

end do

end do

B(1,1)=SUM(x*y) výpočet pravé strany procedurou LAPACK

B(2,1)=SUM(y)

volání podprogramu DGBSV:

call DGBSV(N,KL,KU,1,AB,LDAB,IPIV,B,N,INFO)

if(INFO.ne.0) **write**(* ,*) "INFO=",INFO,"!!!"

k=B(1,1)

q=B(2,1)

společné pokračování:

write(1,*) k, q tisk vypočítaných hodnot do souboru „fort.1“
write(1,*) oddělovací řádek

do i=1,np výpočetní cyklus

f(i)=k*x(i)+q výpočet hodnot lineární funkce

res(i)=(f(i)-y(i))**2.d0 výpočet reziduí

sumres=SUM(res) výpočet sumy reziduí

end do

do i=1,np zápis cyklu do souboru

write(1,*) x(i), y(i), f(i), res(i)

end do

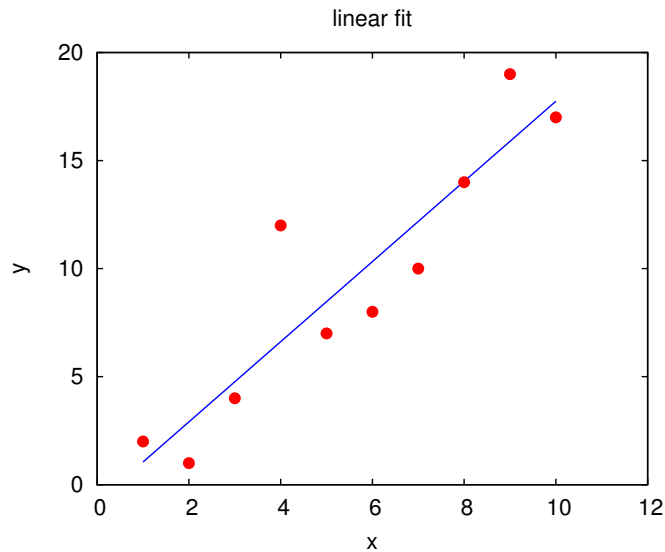
write(1,*)

write(1,*) sumres zápis sumy reziduí do souboru

end program linearni_regrese ukončení programu

D.3.2 Polynomiální regrese metodou nejmenších čtverců

Postup uvedený v předchozím odstavci D.3.1 lze zobecnit pro polynom libovolného (m -tého) stupně, kdy analogii rovnice (D.46) můžeme přepsat do tvaru (horní indexy zde vždy znamenají



Obrázek D.4: Vykreslení příkladu lineární regrese, tj. proložení uvedených 10 bodů přímkou s parametry vypočítanými metodou nejmenších čtverců.

mocniny)

$$S = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=0}^m p_j x_i^j \right)^2 = \min, \quad (\text{D.49})$$

kde koeficienty p_j jsou koeficienty j -tého stupně polynomu, u lineární regrese tak platí $p_0 = q$, $p_1 = k$ (viz rovnice (D.47)). Zároveň je jasné, že počet rovnic N v proceduře LAPACK odpovídá $m + 1$. Minimum rovnice (D.49) nalezneme, položíme-li $\partial S / \partial p_j = 0$, získáme tak soustavu $m + 1 = N$ lineárních rovnic, které můžeme vyjádřit pomocí maticového zápisu ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \sum_i x_i^{2m} & \cdots & \sum_i x_i^{m+1} & \sum_i x_i^m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_i x_i^{m+1} & \cdots & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i^m & \cdots & \sum_i x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_m \\ \vdots \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i^m y_i \\ \vdots \\ \sum_i x_i y_i \\ \sum_i y_i \end{pmatrix}. \quad (\text{D.50})$$

Výpočetní cyklus procedury LAPACK (viz programový skript v kapitole D.3.1) můžeme takto zobecnit do následující podoby (fortran 95):

```

do i=1,N-1                                matice levé strany, M(N,N)
  do j=1,N
    M(i,j)=SUM(x**(2*N-i-j))
  end do
end do
i=N
do j=1,N-1
  M(N,j)=SUM(x**(N-j))
end do
M(N,N)=np

```



```

do i=1,N                                výpočetní cyklus procedury LAPACK
  do j=1,N
    AB(KUKL+i-j, j)=M(i, j)
  end do
end do

do i=1,N                                výpočet pravé strany procedurou LAPACK
  B(i,1)=SUM(x**(N-i)*y)
end do

```

V ostatních bodech zůstává programová procedura popsaná v odstavci D.3.1 prakticky nezměněna.

D.3.3 Robustní regrese

V případě, že chceme eliminovat vliv velmi vychýlených („ustřelených“) hodnot, zvolíme tzv. *váženou* nebo také *robustní* regresi. Robustních regresních modelů existuje celá řada (viz například Huber & Ronchetti (2009)), za všechny zde uvedeme jednoduchou tzv. *Tukeyho metodu M-odhadu* (Tukey's bisquare method), založenou na vážení reziduí pomocí dvojí druhé mocniny. Nejprve spočítáme nevážená rezidua $\text{res}_i = y_i - f(x_i)$ (stejně jako např. v odstavcích D.3.1, D.3.2), potom použijeme následující váhovou funkci:

$$w_i(\text{res}_i) = \left[1 - \left(\frac{\text{res}_i}{6 \text{ med}} \right)^2 \right]^2 \quad (\text{D.51})$$

kde med je medián absolutní odchylky reziduí, kterou můžeme zvolit jako samotné reziduum, nebo odchylku každého rezidua od jejich vlastního mediánu. Váha $w_i = 0$, pokud absolutní hodnota rezidua $|\text{res}_i| > 6 \text{ med}$. Extrémně odchýlené hodnoty jsou takto zcela vyřazeny, méně vychýlené hodnoty jsou ponechány, avšak se sníženou váhou.

Naprogramování tohoto robustního (váženého) regresního modelu je snadné, do pravé strany rovnice (D.50) vložíme vypočítané váhy:

$$\begin{pmatrix} \sum_i x_i^{2m} & \cdots & \sum_i x_i^{m+1} & \sum_i x_i^m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_i x_i^{m+1} & \cdots & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i^m & \cdots & \sum_i x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_m \\ \vdots \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i^m w_i y_i \\ \vdots \\ \sum_i x_i w_i y_i \\ \sum_i w_i y_i \end{pmatrix}. \quad (\text{D.52})$$

Pro výpočet mediánu existují v každém programovacím jazyce hotové moduly, jako příklad lze použít následující podprogram, výsledek je zahrnut do rovnice (D.51) (fortran 95):

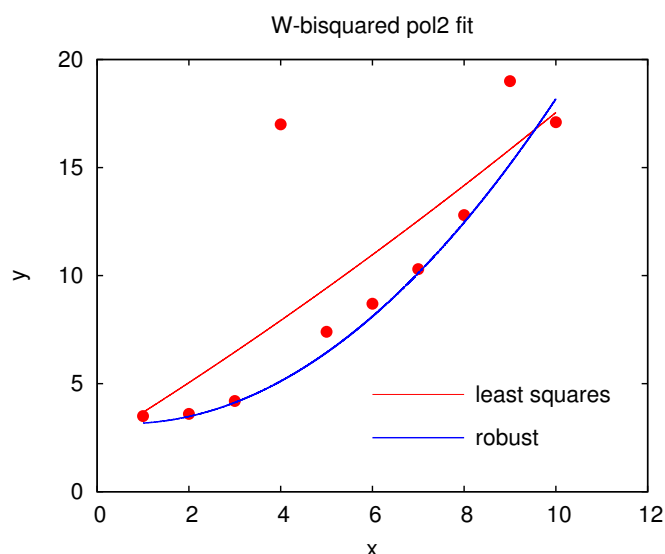
```

subroutine median(i, j, k, np, res, med)
implicit none

integer :: i, j, k, np
double precision :: res(np)
double precision, intent(out) :: med
double precision :: temp

Seřazení čísel ve vzestupném pořadí:
do j=1,np-1

```



Obrázek D.5: Porovnání kvadratické regrese, tj. proložení polynomem 2. stupně s parametry vypočítanými metodou nejmenších čtverců podle odstavce D.3.2 (červená čára) a robustní Tukeyho metodou podle odstavce D.3.3 (modrá čára). Soubor 10 bodů o souřadnicích [1;3,5], [2;3,6], [3;4,2], [4;17], [5;7,4], [6;8,7], [7;10,3], [8;12,8], [9;19], [10;17,1] obsahuje silně odchylené hodnoty (hrubé chyby), na které robustní křivka reaguje slabě nebo vůbec.

```

do k=j+1,np
  if(res(j)>res(k))then
    temp=res(k)
    res(k)=res(j)
    res(j)=temp
  endif
end do
end do

```

Výpočet mediánu v případě sudého nebo lichého počtu čísel:

```

if(mod(np,2)==0)then
  med=(res(np/2)+res(np/2+1))/2.d0
else
  med=res(np/2+1)
endif

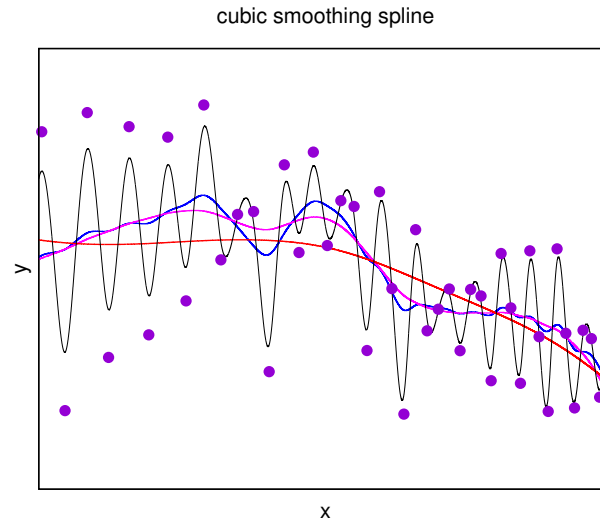
```

end subroutine median

Následuje výpočet vah: $w(y(i))=(1.d0-(y(i)/6.d0*med)**2.d0)**2.d0$, atd.

D.3.4 Kubický vyhlazovací splajn

Tzv. *vyhlazování* (smoothing) může být užitečné v případě, že hustě naměřená nebo vypočítaná závislost jeví značný lokální rozptyl, přitom je ale patrný její celkový trend (viz obrázek D.6), který je ovšem dostatečně nepravidelný či komplikovaný a nepodobá se tak žádné z jednoduchých funkcí (polynomu, exponenciále a podobně). Proložení takové bodové závislosti $[x_i, y_i]$ *kubickým vyhlazovacím splajnem*, reprezentovaným funkcí $S(x)$, jejíž nejjednodušší tvar nalez-



Obrázek D.6: Proložení soustavy bodů (naměřených nebo vypočítaných hodnot) sérií kubických vyhlazovacích splajnů s různými hodnotami parametru λ ; černá čára s nejnižším λ se nejvíce přimyká k prokládaným bodům, červená čára s nejvyšším λ vyhlazuje celkovou závislost nejvíce. V případě $\lambda = 0$ získáme kubický interpolační splajn (viz odstavec D.2.1), přímo procházející zadanými body, zatímco v případě $\lambda \rightarrow \infty$ získáme lineární regresi dané soustavy bodů (viz odstavec D.3.1).

neme pomocí minimalizace (srovnej s rovnicí (D.46))

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - S(x_i)]^2 + \lambda \int S''(x)^2 dx = \min, \quad (\text{D.53})$$

probíhá de facto ve dvou krocích. V prvním kroku nalezneme nové body $[x_i, \tilde{Y}_i]$ s menším rozptylem (kdy $S(x_i) = \tilde{Y}_i$), ve druhém kroku pak tyto nové body $[x_i, \tilde{Y}_i]$ proložíme kubickým interpolačním splajnem podle odstavce D.2.1. Kladné číslo λ v rovnici (D.53) je tzv. *vyhlazovací parametr*, který řídí „hrubost“ nebo „jemnost“ vyhlazování, kdy větší λ znamená robustnější vyhlazení (viz porovnání křivek s různými parametry λ na obrázku D.6).

Protože se jedná o kubický splajn, budou jednotlivé segmenty funkce $S''(x)$ (druhé derivace funkce $S(x)$) lineárními úsečkami, které v bodech x_i a x_{i+1} musí nabývat hodnot $S''(x_i) = M_i$, $S''(x_{i+1}) = M_{i+1}$ (viz rovnice (D.3)). V obecném bodě uvnitř jednotlivých segmentů musí tedy platit

$$S''(x) = M_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i). \quad (\text{D.54})$$

Integrál v rovnici (D.53) bude tedy mít pro každý jednotlivý segment řešení ve tvaru

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[M_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \right]^2 dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{3} (M_{i+1}^2 + M_{i+1}M_i + M_i^2). \quad (\text{D.55})$$

Podrobným rozbořením rovnice (D.6), nyní ovšem na pravé straně s hledanými hodnotami \tilde{Y}_i , stručně maticově zapsané jako

$$WM = RS, \quad (\text{D.56})$$

zjistíme, že rovnice (D.55) je identicky řešitelná pomocí maticového násobení v následujícím pořadí,

$$\int S''(x)^2 dx = \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{W}}^{-1} \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{S}, \quad (\text{D.57})$$

kde \mathbf{S} je (sloupcový) n rozměrný vektor hledaných hodnot \tilde{Y}_i , $\tilde{\mathbf{W}}$ je tridiagonální symetrická matice dimenze $(n-2) \times (n-2)$, s prvky

$$W_{i-1,i} = W_{i,i-1} = \frac{x_{i+1} - x_i}{6}, \quad W_{ii} = \frac{x_{i+2} - x_i}{3} \quad (\text{D.58})$$

a $\tilde{\mathbf{R}}$ je matice dimenze $(n-2) \times n$ s prvky

$$\tilde{R}_{ii} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}, \quad \tilde{R}_{i,i+1} = -\left(\frac{1}{x_{i+1} - x_i} + \frac{1}{x_{i+2} - x_{i+1}}\right), \quad \tilde{R}_{i,i+2} = \frac{1}{x_{i+2} - x_{i+1}}. \quad (\text{D.59})$$

Přepíšeme-li tímto způsobem minimalizační rovnici (D.53), dostáváme její levou stranu ve tvaru

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{S})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{S}) + \lambda \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{W}}^{-1} \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{S}. \quad (\text{D.60})$$

Položíme-li její derivaci vzhledem k \mathbf{S} rovnu nule, dostaneme výsledný výraz pro hledané hodnoty v rámci výše popsaného prvního kroku,

$$\mathbf{S} = \left(\mathbf{E} + \lambda \tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{W}}^{-1} \tilde{\mathbf{R}} \right)^{-1} \mathbf{Y}, \quad (\text{D.61})$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice.

Výpočet druhého kroku, tedy proložení nalezených bodů \tilde{Y}_i kubickým interpolačním splajnem, již provedeme podle odstavce D.2.1. Pro numerické výpočty maticového násobení, inverzních matic, tridiagonálních matic a podobně, opět použijeme procedury například z balíčku LAPACK, popsané výše v rámci předchozích ukázek.

D.4 Numerické metody výpočtů funkcí jedné proměnné

D.4.1 Hledání kořene funkce jedné proměnné - Newtonova metoda

Kořeny obecně nelineární funkce (rovnice) $f(x) = 0$ často nelze vyjádřit formou explicitního analytického vzorce. k nalezení řešení takové rovnice musíme potom použít některou z numerických (iteračních) metod, kdy pomocí určitého počtu počátečních aproximací hledaného kořene x_0 generujeme posloupnost x_1, x_2, x_3, \dots , která ke kořenu x_0 konverguje. V některých případech je třeba zadat interval a, b , který podle předběžného předpokladu obsahuje hledaný kořen, čím lépe se k němu na počátku přiblížíme, tím rychleji daná metoda konverguje. V následujících příkladech předpokládejme reálnou spojitou funkci $f(x)$ s odpovídajícím počtem spojitých derivací na vymezeném intervalu, s hledaným kořenem $f(x_0) = 0$.

Počáteční odhad intervalu (intervalů) kde se kořen (kořeny) mohou nalézat provedeme například grafickou metodou: pomocí vhodného výpočetního programu nebo vypisováním funkčních hodnot do tabulky vykreslíme funkci $f(x)$ a vyhledáme její přibližné průsečíky s osou x . Například u funkce, dané předpisem

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \quad (\text{D.62})$$

snadno zjistíme že existuje jeden reálný kořen, který musí s určitostí ležet uvnitř intervalu $x_0 \in (2, 3)$.

Existuje celá řada možných numerických postupů (například metoda sečen, atd.), asi nejznámější je tzv. *Newtonova metoda* neboli metoda tečen. Vyjdeme z počáteční aproximace x_0 a postupně počítáme x_1, x_2, x_3, \dots . Známe-li určitou aproximaci x_k a chceme určit lepší aproximaci x_{k+1} , proložíme bodem $[x_k, f(x_k)]$ tečnu ke křivce $y = f(x)$, průsečík této tečny s osou x považujeme potom za hodnotu x_{k+1} . Dostáváme tak rovnici popsané tečny ve tvaru

$$f'(x_k) = \{3x_k^2 - 6x_k + 2\} = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}, \quad (\text{D.63})$$

z níž odvodíme vztah pro výpočet každého následujícího kroku (iterace),

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (\text{D.64})$$

Ukončení výpočtu s tím, že hodnota poslední iterace x_{k+1} je prohlášena za hledaný kořen x_0 s požadovanou přesností, nastane (podle velikosti malého čísla ϵ které stanovuje požadovanou přesnost) například v těchto případech:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon \quad \text{nebo} \quad |f(x_{k+1})| \leq \epsilon. \quad (\text{D.65})$$

- **Příklad možného způsobu naprogramování rovnice (D.62) - program fortran 95:**

program newton	deklarace názvu programu
implicit none	
integer :: i	deklarace celočíselných proměnných v záhlaví programu: i = pořadové číslo prostorového kroku
double precision :: x, dx, f, df	deklarace reálných veličin, kde výrazy $x = x_k$, $dx = x_k - x_{k+1}$, $f = f(x_k)$, $df = f'(x_k)$, s dvojitou přesností
x=3.d0	odhad vstupní hodnoty x_k
do	výpočetní cyklus
i = i+1	
f = x**3 - 3.d0*x**2 + 2.d0*x - 3.d0	vlastní rovnice (D.62)
df = 3.d0*x**2 - 6.d0*x + 2.d0	derivace funkce (D.62)
dx = f/df	rovnice (D.64)
x = x-dx	nová hodnota x_k
if (dabs(dx).lt.1.d-12) exit	stop kritérium: $ x_k - x_{k+1} < 10^{-12}$
end do	
write (100,*) x	zápis kořene funkce f do souboru fort.100
stop	zastavení celého procesu
end program newton	konec programu

- Tabulka výsledků programu výpočtu kořene funkce $f(x_k)$ pro jednotlivé iterace k :

k	x_k	$f(x_k)$	$x_k - x_{k+1}$
0	3.0000000000000000	3.0000000000000000	0.27272727272727271
1	2.7272727272727275	0.42599549211119836	5.3581553581554045E-002
2	2.6736911736911733	1.4723079585858834E-002	1.9886039436713345E-003
3	2.6717025697475019	1.9848200396133109E-005	2.6880854327577796E-006
4	2.6716998816620690	3.6242120415863610E-011	4.9083680000275664E-012
5	2.6716998816571604	1.7763568394002505E-015	2.4057679206275180E-016

D.4.2 Numerické derivování

Nejjednodušší numerická aproximace 1. derivace má podobu tzv. *dopředné difference*,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (\text{D.66})$$

kde $h = \Delta x > 0$, s chybou aproximace $\delta f'(x)$ vyjádřenou pomocí Taylorova rozvoje x , tj. $\delta f'(x) = -(h/2)f''(\xi)$, kde $\xi \in (x, x+h)$. Podobně jednoduchá je i tzv. *zpětná difference*,

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad (\text{D.67})$$

s chybou stejného řádu. Aproximací s vyšší přesností je tzv. *centrální difference*,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad (\text{D.68})$$

s chybou aproximace $\delta f'(x) = -(h^2/6)f'''(\xi)$, kde $\xi \in (x-h, x+h)$, zabírající ovšem dva prostorové kroky (buňky) výpočetní sítě. Analogickým způsobem můžeme odvodit i 2. derivaci ve tvaru

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}, \quad (\text{D.69})$$

s chybou aproximace $\delta f''(x) = -(h^2/12)f^{(4)}(\xi)$, kde $\xi \in (x-h, x+h)$.

Existují i přesnější a propracovanější diferenční schémata (viz například [van Leer, 1977](#), [1982](#); [Vitásek, 1987](#); [LeVeque, 2002](#)), například jednostranná aproximace 1. derivace, která je 2. řádu přesnosti,

$$f'(x) \approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}, \quad (\text{D.70})$$

s chybou aproximace $\delta f'(x) = (h^2/3)f'''(\xi)$, kde $\xi \in (x, x+2h)$, nebo aproximace 1. derivace, která je 4. řádu přesnosti, ve tvaru

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}, \quad (\text{D.71})$$

tedy s chybou, která je řádu h^4 , atd. Jejich nevýhodou ovšem je, že zabírají několik prostorových intervalů (buněk) výpočetní sítě a také při složitých a objemných výpočtech díky nim mohou narůstat nároky na dobu výpočtu. Je proto vždy nutné zvážit výpočetní schéma, adekvátní dané úloze a její požadované přesnosti, odpovídající ale reálným možnostem používaného výpočetního zařízení.

D.4.3 Numerické integrování

je vždy založené na nahrazení složitě ohraničeného geometrického útvaru (plochy pod křivkou dané funkce v případě jedné proměnné) jednodušším útvarem, nebo součtem takových útvarů. Používá se také název *numerická kvadratura*, ve smyslu konstrukce plošných (tedy dvourozměrných, kvadraturních) útvarů. Ukážeme zde příklady pouze nejběžnějších (většinou ovšem zcela dostačujících) způsobů numerické integrace funkce jedné proměnné pomocí tzv. *Newton-Cotesových* vzorců, existuje samozřejmě celá řada jiných metod numerické integrace, například *Gaussovy kvadraturní vzorce*, *Rombergova kvadratura*, atd. Nebudeme zde uvádět ani přesnosti a způsob stanovení chyb, atd., vše je standardně dostupné v literatuře.

- **Newton-Cotesovy (kvadraturní) vzorce**

Obdélníková metoda: Tato metoda se formálně nepočítá mezi tzv. *Newton-Cotesovy* vzorce, představuje sice nejjednodušší ale zároveň nejméně přesnou numerickou integrační metodu, kdy se určitý integrál dané funkce (tj. velikost plochy pod křivkou grafu funkčních hodnot funkce $f(x)$ v rámci intervalu $\langle a, b \rangle$) aproximuje obdélníkem. Tuto aproximaci můžeme zpřesnit, rozdělíme-li například interval $\langle a, b \rangle$ na zvolený počet n dílčích stejných intervalů, vypočítáme obdélníkovou aproximaci pro každý interval zvlášť a výsledky sečteme, tedy

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right). \quad (\text{D.72})$$

Lichoběžníková metoda: představuje přesnější numerickou integrační metodu, kdy se určitý integrál dané funkce aproximuje lichoběžníky (body funkce se spojí úsečkami). Rozdělíme-li interval $\langle a, b \rangle$ na zvolený počet n dílčích stejných intervalů, vypočítáme lichoběžníkovou aproximaci opět pro každý interval zvlášť a výsledky sečteme, tedy

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) + f(x_k)], \quad (\text{D.73})$$

kde $x_k = a + k(b-a)/n$.

Simpsonovo pravidlo: založené na kvadratické (parabolické) interpolaci dílčích intervalů integrované funkce. V případě integrace polynomů dává tato metoda velmi přesné výsledky. Složená aproximace Simpsonovým pravidlem, kdy interval $\langle a, b \rangle$ je rozdělen na sudý počet n dílčích intervalů, má tvar (kdy $x_k = a + k(b-a)/n$)

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} \sum_{k=1}^{n/2} [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})]. \quad (\text{D.74})$$

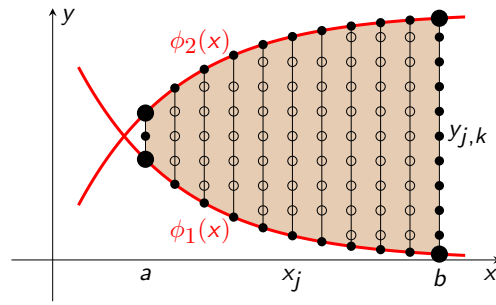
Simpsonovo 3/8 pravidlo (nebo také druhé Simpsonovo pravidlo): založené na kubické interpolaci dílčích intervalů integrované funkce. Složená aproximace Simpsonovým 3/8 pravidlem, kdy interval $\langle a, b \rangle$ je rozdělen na n dílčích intervalů, kde n je dělitelné třemi, má tvar (kdy opět $x_k = a + k(b-a)/n$)

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{3(b-a)}{8n} \sum_{k=1}^{n/3} [f(x_{3k-3}) + 3f(x_{3k-2}) + 3f(x_{3k-1}) + f(x_{3k})]. \quad (\text{D.75})$$

Obdobným způsobem lze sestavit Newton-Cotesovy formule libovolně vyšších řádů, vyšší řády než 4 (*Booleovo pravidlo*) se nicméně používají málo, jejich nevýhodou je velmi rychle (až exponenciálně) narůstající chyba integrace.

- **Numerická integrace ve vyšších dimenzích**

Uvedené metody lze aplikovat různými způsoby i pro vícenásobné integrování, jejich volba závisí například na tvaru integrační oblasti a na konkrétních funkcích, obsažených v integrandu. Zde ukážeme pouze dva základní způsoby.



Obrázek D.7: Schématické znázornění hustoty sítě pro numerickou integraci dvojného integrálu s optimálním rozložením uzlů podle rovnice (D.81). Jednotlivým uzlům x_j ve vodorovném směru x je přiřazen různý počet uzlů $y_{j,k}$ ve svislém směru y . Prázdné kroužky odpovídají vnitřním uzlům sítě, kde $w_{j,k} = 1$, menší plné kroužky odpovídají uzlům na hranici integrační oblasti (vyznačené hnědou plochou), kde $w_{j,k} = 1/2$, velké plné kroužky odpovídají uzlům v rozích integrační oblasti, kde $w_{j,k} = 1/4$.

Lichoběžníková metoda ve 2D: uvažujme dvojný integrál (viz rovnice (7.3))

$$I = \iint_S f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy \right] dx. \quad (\text{D.76})$$

Vnitřní integrál aproximujeme jednorozměrnou numerickou kvadraturou, kde x vystupuje jako konstanta. Získané hodnoty potom použijeme k výpočtu vnějšího integrálu, rovněž pomocí jednorozměrného pravidla. Označme dva rozdělené jednoduché integrály následujícím způsobem,

$$F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy, \quad I = \int_a^b F(x) \, dx. \quad (\text{D.77})$$

Výpočet vnitřní kvadratury $F(x)$ v bodě x_j provedeme například jako (viz rovnici (D.73))

$$F(x) = h_j \left[\frac{1}{2} f(x_j, y_{j,0}) + f(x_j, y_{j,1}) + \dots + f(x_j, y_{j,n_j-1}) + \frac{1}{2} f(x_j, y_{j,n_j}) \right], \quad (\text{D.78})$$

kde

$$h_j = \frac{\phi_2(x_j) - \phi_1(x_j)}{n_j}, \quad y_{j,k} = \phi_1(x_j) + kh_j. \quad (\text{D.79})$$

Četnost a velikost kroku n_j vyplývá z toho, že obecně počet výpočetních bodů ve směru y může být různá x_j (viz obrázek D.7), v závislosti na tvaru integrační oblasti. Následně aproximujeme integrál I pomocí vnější (složené) jednorozměrné kvadratury,

$$I = h \left[\frac{1}{2} F(x_0) + F(x_1) + \dots + F(x_{m-1}) + \frac{1}{2} F(x_m) \right], \quad (\text{D.80})$$

kde, za předpokladu rovnoměrného kroku m v x -ovém směru, $h = (b-a)/m$ a $x_j = a + jh$. Pokud integrand $f(x, y)$ je hladká a pomalu rostoucí nebo klesající funkce, volíme četnost bodů n_j zpravidla tak, aby $h_j \approx h$ pro všechna j , což minimalizuje výpočetní nároky v rámci požadované přesnosti.

Celkovou kvadraturu můžeme tedy zapsat jako

$$I \approx \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{n_j} w_{j,k} f(x_j, y_{j,k}) h h_j, \quad (\text{D.81})$$

kde $w_{j,k} = 1$ v bodech uvnitř integrační oblasti ($j \neq 0 \wedge j \neq m \wedge k \neq 0 \wedge k \neq n_j$), $w_{j,k} = 1/2$ na hranici integrační oblasti s výjimkou rohů ($j = 0 \vee j = m \wedge k \neq 0 \wedge k \neq n_j$ nebo $j \neq 0 \wedge j \neq m \wedge k = 0 \vee k = n_j$) a $w_{j,k} = 1/4$ v rozích integrační oblasti ($j = 0 \vee j = m \wedge k = 0 \vee k = n_j$). Přesnost uvedené metody je druhého řádu, její chyba $\delta I = \mathcal{O}(h^2 + \max h_j^2)$.

Lichoběžníková metoda ve 3D: V případě trojného integrálu (viz rovnice (7.6))

$$I = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx \quad (\text{D.82})$$

použijeme obdobnou strategii jako ve 2D případě; výsledná formule (analogie ke vzorci (D.81)) bude

$$I \approx \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{n_j} \sum_{l=0}^{n_{j,k}} w_{j,k,l} f(x_j, y_{j,k}, z_{j,k,l}) h h_j h_{j,k}, \quad (\text{D.83})$$

kde, opět za předpokladu rovnoměrného kroku m v x -ovém směru, $h = (b - a)/m$, $x_j = a + jh$, a dále

$$h_j = \frac{\phi_2(x_j) - \phi_1(x_j)}{n_j}, \quad y_{j,k} = \phi_1(x_j) + kh_j, \quad (\text{D.84})$$

$$h_{j,k} = \frac{\psi_2(x_j, y_k) - \psi_1(x_j, y_k)}{n_{j,k}}, \quad z_{j,k,l} = \psi_1(x_j, y_k) + lh_{j,k} \quad (\text{D.85})$$

a kde $w_{j,k,l} = 1$ v bodech uvnitř integrační oblasti ($j \neq 0 \wedge j \neq m \wedge k \neq 0 \wedge k \neq n_j \wedge l \neq 0 \wedge l \neq n_{j,k}$), $w_{j,k} = 1/2$ uvnitř ploch, tvořících hranici integrační oblasti, s výjimkou hran, kde se stýkají dvě z těchto ploch a s výjimkou rohů, kde se stýkají všechny tři ($j = 0 \vee j = m \wedge k \neq 0 \wedge k \neq n_j \wedge l \neq 0 \wedge l \neq n_{j,k}$ nebo $j \neq 0 \wedge j \neq m \wedge k = 0 \vee k = n_j \wedge l \neq 0 \wedge l \neq n_{j,k}$ nebo $j \neq 0 \wedge j \neq m \wedge k \neq 0 \wedge k \neq n_j \wedge l = 0 \vee l = n_{j,k}$), $w_{j,k} = 1/4$ na hranách integrační oblasti, s výjimkou rohů ($j = 0 \vee j = m \wedge k = 0 \vee k = n_j \wedge l \neq 0 \wedge l \neq n_{j,k}$ nebo $j = 0 \vee j = m \wedge k \neq 0 \wedge k \neq n_j \wedge l = 0 \vee l = n_{j,k}$ nebo $j \neq 0 \wedge j \neq m \wedge k = 0 \vee k = n_j \wedge l = 0 \vee l = n_{j,k}$) a $w_{j,k} = 1/8$ v rozích integrační oblasti ($j = 0 \vee j = m \wedge k = 0 \vee k = n_j \wedge l = 0 \vee l = n_{j,k}$). Přesnost uvedené metody je opět druhého řádu, její chyba $\delta I = \mathcal{O}(h^2 + \max h_j^2 + \max h_{j,k}^2)$.

Simpsonovo pravidlo ve 2D: S použitím tohoto pravidla (viz principy a značení, uvedené v rovnici (D.74)) budou rovnice (D.78) a (D.80) postupně vypadat:

$$F(x) = \frac{h_j}{3n_j} \left[f(x_j, y_{j,0}) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n_j}{2}-1} f(x_j, y_{j,2k}) + 4 \sum_{k=1}^{\frac{n_j}{2}} f(x_j, y_{j,2k-1}) + f(x_j, y_{j,n_j}) \right], \quad (\text{D.86})$$

$$I = \frac{h}{3m} \left[F(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} F(x_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} F(x_{2k-1}) + F(x_m) \right]. \quad (\text{D.87})$$

Postupným řetězením stejného principu bychom snadno zkonstruovali také Simpsonovo pravidlo ve 3D.

Obdobným způsobem lze zkonstruovat i vícerozměrné numerické kvadratury, založené na metodách vyšších řádů. Vzhledem k uvedeným analogiím k jednorozměrným kvadraturám je zde již dále explicitně neuvádím.

D.4.4 Jednoduché numerické metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic

Existuje opět celá řada způsobů numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic, například řešení rovnic *Eulerovou metodou* nebo tzv. *Runge-Kuttovou metodou* (metodami), atd. (další podrobnosti - viz například (Humlíček, 2009)).

• Eulerova metoda

je nejjednodušší a také ovšem nejméně přesnou metodou, vhodnou pro numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu nebo jejich soustav. Metoda vychází z definice rovnice 1. řádu, $y' = f(x, y)$, kde x je nezávisle proměnná a y je závisle proměnná, jejíž přepis do numerického schématu s $n + 1$ body prostorové sítě a s konstantním krokem $h = (x_n - x_0)/n$ (například pomocí dopředné difference) bude vypadat následovně:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x, y) \quad \text{a tedy} \quad y_{i+1} = y_i + hf, \quad (\text{D.88})$$

kde $i = 0, \dots, n$. Analogicky můžeme tento princip rozšířit i na soustavu více rovnic 1. řádu.

Použití metody si prakticky ukážeme na soustavě dvou (nelineárních, analyticky velmi těžko řešitelných) rovnic 1. řádu, vzniklých rozkladem rovnice 2. řádu ve tvaru $y'' - 5(y' - 1)^2 + 6y^2 = 0$, s okrajovými podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, v intervalu $x \in \langle 0, 10 \rangle$, tedy

$$\begin{aligned} y' &= z + 1, \\ z' &= 5z^2 - 6y^2. \end{aligned} \quad (\text{D.89})$$

Numerický algoritmus soustavy rovnic (D.89) lze zapsat například takto (fortran 95):

• program Euler	deklarace názvu programu
implicit none	
double precision :: x, y, z, h, f, g	deklarace reálných veličin a funkcí
x=0.d0, y=1.d0, z=1.d0, h=1.d-3	deklarace parametrů a okrajových podmínek
do	výpočetní cyklus
f=z+1.d0	
g=5.d0*z**2.-6.d0*y**2.	
y=y+h*f	
z=z+h*g	
write (1,*) x,y,z	zápis do souboru fort.1
x=x+h	
if (x>10.d0) exit	stop kritérium
end do	konec cyklu
end program Euler	

Tímto výpočtem získáme ve skutečnosti diskrétní průběh funkcí y a $z = y' - 1$ v daném intervalu $\langle 0, 10 \rangle$, s krokem 10^{-3} . Hodnoty obou funkcí v konečném bodě intervalu jsou zde $y(10) = 0.91287365321267411$ a $z(10) = -1.0000034112031584$.

• Metody Runge-Kutta (RK)

Obecně mohou být tyto metody různých řádů, *Eulerova metoda* je vlastně Runge-Kuttova metoda 1. řádu. Nejpoužívanější je ale tzv. „RK4“ (metoda 4. řádu), „*klasická Runge-Kuttova metoda*“ nebo často nazývaná prostě jen „*Runge-Kuttova metoda*“. Ta je definovaná (použijeme notaci, zavedenou v předchozím odstavci *Eulerova metoda*) jako

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (\text{D.90})$$

kde koeficienty k_α jsou obecně stanoveny tak, aby metoda řádu p odpovídala Taylorovu polynomu funkce $y(x)$ stejného řádu. V případě „RK4“ tedy budou

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad (\text{D.91})$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \quad (\text{D.92})$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right), \quad (\text{D.93})$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3). \quad (\text{D.94})$$

Jako příklad zde uvedeme numerický algoritmus stejné soustavy rovnic (D.89) jako v předchozí Eulerově metodě (fortran 95):

• program RK	deklarace názvu programu
implicit none	
double precision :: x, y, z, h, f, g	deklarace reálných veličin a funkcí
double precision :: k1y, k2y, k3y, k4y	deklarace koeficientů pro proměnnou y
double precision :: k1z, k2z, k3z, k4z	deklarace koeficientů pro proměnnou z
x=0.d0, y=1.d0, z=1.d0, h=1.d-3	deklarace parametrů a okrajových podmínek
do	výpočetní cyklus
f=z+1.d0	
g=5.d0*z**2.-6.d0*y**2.	
k1y=f	
k1z=g	
k2y=(z+k1z*h/2.d0+1.d0)	
k2z=(5.d0*(z+k1z*h/2.d0)**2.-6.d0*(y+k1y*h/2.d0)**2.)	
k3y=(z+k2z*h/2.d0+1.d0)	
k3z=(5.d0*(z+k2z*h/2.d0)**2.-6.d0*(y+k2y*h/2.d0)**2.)	
k4y=(z+h*k3z)	
k4z=(5.d0*(z+h*k3z)**2.-6.d0*(y+h*k3y)**2.)	
y=y+h*(k1y+2.d0*k2y+2.d0*k3y+k4y)/6.d0	
z=z+h*(k1z+2.d0*k2z+2.d0*k3z+k4z)/6.d0	
write (1,*) x,y,z	write to file fort.1
x=x+h	
if (x>10.d0) exit	stop criterion
end do	konec cyklu
end program RK	

Dostáváme obdobný průběh funkcí y a $z = y' - 1$ v daném intervalu $\langle 0, 10 \rangle$, s krokem 10^{-3} , jako pomocí Eulerovy metody. Hodnoty obou funkcí v konečném bodě intervalu jsou zde $y(10) = 0.91287365717860480$ a $z(10) = -1.0000034161695313$, číselné hodnoty se tedy pro obě metody liší nejdříve v řádu 10^{-9} .

• Odhad chyby metodou polovičního kroku

Oblíbenou jednoduchou metodou odhadu chyb je tzv. *metoda polovičního kroku*, která v celé řadě praktických aplikací dává spolehlivé výsledky (podrobný popis a teoretický rozbor existuje prakticky v každé učebnici numerické matematiky). Jejím principem je, že výpočet provedeme znovu, se stejnými okrajovými podmínkami, ovšem s polovičním krokem $h/2$, takže pro stanovení chyby (odchylky od přesného řešení) δy funkce y se v rámci jednoho kroku h tento proces opakuje dvakrát. Výsledný odhad odchylky je pak stanoven jako

$$\delta y = \frac{y\left(x, \frac{h}{2}\right) - y(x, h)}{2^p - 1}, \quad (\text{D.95})$$

kde p je řád numerické metody (například v případě uvedené Eulerovy metody bude jmenovatel rovnice (D.95) roven 1, v případě metody „RK4“ bude roven 15). Pro porovnání, takto provedený odhad chyb výpočtů soustav diferenciálních rovnic 1. řádu z tohoto odstavce (kde $h = 10^{-3}$) bude $\delta y(10) \approx 3,973 \times 10^{-9}$ a $\delta z(10) \approx -4,976 \times 10^{-9}$ pro Eulerovu metodu a $\delta y(10) \approx 4,441 \times 10^{-17}$ a $\delta z(10) \approx -1,480 \times 10^{-17}$ pro metodu „RK4“.

• Dormand-Princova metoda (DOPRI)

Tato metoda je de facto součástí (rozšířením) metod Runge-Kutta, odpovídá ovšem Taylorovu polynomu 6., resp. 7. řádu. Touto metodou dostáváme řešení 4. a 5. řádu RK přesnosti (Dormand & Prince, 1980). Rozdíl přesností v řešení 4. a 5. řádu RK bereme potom jako chybu přesnosti řešení RK 4. řádu. Na základě této chyby potom implementujeme algoritmus *adaptivního iteračního kroku* h pro udržení požadované přesnosti (viz níže).

Uvedená metoda je nezastupitelná v případech obyčejných diferenciálních rovnic s tzv. silným tlumením neboli „tuhých“ (anglicky *stiff equations*), kde se jednodušší metody rychle stávají nestabilní a dávají nepřesná řešení. Příkladem takové „tuhé“ rovnice může být například $y' = 3\frac{y}{x} + x^3 + x$, $y(1) = 3$, která je navíc analyticky řešitelná ($y = 3x^3 + x^4 - x^2$) takže si výsledky dané různými metodami můžeme porovnat.

Řešení 4. řádu v bodě x_{i+1} získáme pomocí

$$y_{i+1} = y_i + h \left(\frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6 \right). \quad (\text{D.96})$$

Řešení pátého řádu v bodě x_{i+1} získáme pomocí

$$Y_{i+1} = y_i + h \left(\frac{5179}{57600}k_1 + \frac{7571}{16695}k_3 + \frac{393}{640}k_4 - \frac{92097}{339200}k_5 + \frac{187}{2100}k_6 + \frac{1}{40}k_7 \right). \quad (\text{D.97})$$

kde koeficienty k_α budou (viz tzv. *Butcherova tabulka*, Butcher (2008))

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_i, y_i) \\
 k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{5}h, y_i + \frac{1}{5}k_1\right) \\
 k_3 &= f\left(x_i + \frac{3}{10}h, y_i + \frac{3}{40}k_1 + \frac{9}{40}k_2\right) \\
 k_4 &= f\left(x_i + \frac{4}{5}h, y_i + \frac{44}{45}k_1 - \frac{56}{15}k_2 + \frac{32}{9}k_3\right) \\
 k_5 &= f\left(x_i + \frac{8}{9}h, y_i + \frac{19372}{6561}k_1 - \frac{25360}{2187}k_2 + \frac{64448}{6561}k_3 - \frac{212}{729}k_4\right) \\
 k_6 &= f\left(x_i + h, y_i + \frac{9017}{3168}k_1 - \frac{355}{33}k_2 - \frac{46732}{5247}k_3 + \frac{49}{176}k_4 - \frac{5103}{18656}k_5\right) \\
 k_7 &= f\left(x_i + h, y_i + \frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6\right). \tag{D.98}
 \end{aligned}$$

Rozdíl řešení 4. a 5. řádu definuje chybu řešení 4. řádu,

$$\delta y_{i+1} = |Y_{i+1} - y_{i+1}|. \tag{D.99}$$

Pokud chyba přesáhne horní zvolenou mez přesnosti δ_{\max} , algoritmus sníží velikost iteračního kroku h (typicky na polovinu) a výpočet opakuje. Iterační krok h je snižován tak dlouho, dokud nedosáhne požadované přesnosti. Naopak, pokud chyba klesne pod spodní zvolenou mez přesnosti δ_{\min} , zvýší se velikost iteračního kroku h (typicky na dvojnásobek) a výpočet se opakuje, dokud nedosáhne požadované přesnosti. Podstatnou výhodou je, že se výpočet neopakuje v oblastech již stabilního řešení, šetří se tak výpočetní čas.

Dále zde ukážeme příklad řešení obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu často používanou jednoduchou tzv. *metodu střelby* a také pomocí tridiagonální matice (viz odstavec D.2.1):

• Metoda střelby

je jednoduchá metoda řešení obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu, kdy potřebujeme dvě okrajové podmínky - polohu při „výstřelu“ a při „dopadu“ (Dirichletovy podmínky) nebo směr „výstřelu“ a „dopadu“ (Neumannovy podmínky), případně smíšené (například polohu a směr „výstřelu“), založená na „vystřelení“ dané funkce v závislosti na okrajových podmínkách. Hledáme potom takové koeficienty funkce, které zajistí „dopadnutí“ funkce požadovaným způsobem do požadovaného bodu. Metodu si ukážeme na příkladu řešení tzv. *Lane-Emdenovy* rovnice, což je obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu, obvykle zapsaná v implicitním tvaru

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + y^n = 0 \quad \text{a tedy} \quad y'' + \frac{2}{x} y' + y^n = 0, \tag{D.100}$$

kde x je nezávisle proměnná, y je závisle proměnná a n je konstanta. Tato rovnice je řešitelná analyticky pouze pro $n = 0, 1, 5$, pro všechna ostatní n musí být řešena numericky. Pro $n = 0$ získáme řešení přímou integrací se zahrnutím uvedených okrajových podmínek, pro $n = 1$ řešíme sférickou Besselovu diferenciální rovnici (viz rovnice (C.115)), Pro $n = 5$ dostáváme řešení prostřednictvím tzv. Emdenovy transformace, kde $y = Ar^\omega s$, kde r, s jsou nové proměnné a $\omega = 2/(n - 1)$.

Budeme počítat rovnicí (D.100) pro $n = 1,5$ a se smíšenými okrajovými podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Algoritmus je tedy „vystřelen“ z bodu $[0,1]$ vodorovně, nová hodnota y je v každém prostorovém kroku vypočítána jako $y = y + (\Delta y/\Delta x)\Delta x$. Druhá derivace y'' je rozepsána jako $(y')'$, tedy $\Delta(\Delta y/\Delta x)/\Delta x$ a každá nová hodnota y'' je v každém prostorovém kroku počítána jako $(\Delta y/\Delta x)/\Delta x = (\Delta y/\Delta x)/\Delta x - [(2/x)(\Delta y/\Delta x) + y^n]$, což můžeme po vynásobení celé rovnice Δx přepsat jako $(\Delta y/\Delta x) = (\Delta y/\Delta x) - [(2/x)(\Delta y/\Delta x) + y^n]\Delta x$. Numerický algoritmus rovnice (D.100) lze tedy zapsat například takto (fortran 95):

• program Emden	deklarace názvu programu
implicit none	
double precision :: x, y, dydx, n, dx	deklarace reálných veličin x, y, dydx, n, dx s dvojitou přesností, kde $dydx = y' = \Delta y/\Delta x$ a $dx = \Delta x$
x=0.d0 y=1.d0 dydx=0.d0 dx=1.d-3 n=1.5d0	deklarace parametrů a okrajových podmínek
do	výpočetní cyklus
x=x+dx y=y+dydx*dx dydx=dydx-(2.d0*dydx/x+y**n)*dx	
if (x>15.d0) exit	stop kritérium, dané předběžným odhadem
write (1,*) x,y,dydx	zápis do souboru fort.1
end do	konec cyklu
end program Emden	

• Příklad řešení obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu pomocí tridiagonální matice

Řešení okrajové úlohy obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu $p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = f(x)$, na intervalu a, b , s Dirichletovými okrajovými podmínkami $y(a) = A$, $y(b) = B$, lze snadno řešit pomocí tridiagonální matice (viz odstavec D.2.1). Jako příklad řešení uvedeme jednoduchou rovnici s konstantními koeficienty $y'' + 3y' + 2y = (20x + 29)e^{3x}$ (snadno řešitelnou i analyticky), na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, s Dirichletovými okrajovými podmínkami $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Po přepsání dané rovnice do diferenčního schématu s $n+2$ body prostorové sítě, kdy jednotlivé derivace levé strany rozepíšeme podle rovnic (D.68) a (D.69), dostáváme rovnici ve tvaru

$$\left(p - \frac{h}{2}q\right) y_{i-1} + (h^2r - 2p) y_i + \left(p + \frac{h}{2}q\right) y_{i+1} = h^2 f_i, \quad (\text{D.101})$$

kde $i = 0, 1, \dots, n, n+1$, s koeficienty $p = 1$, $q = 3$, $r = 2$ a s konstantním prostorovým krokem $h = (x_{n+1} - x_0)/(n+1) = [x(1) - x(0)]/(n+1)$, při $n = 99$ tak bude $h = 0,01$. Označíme-li jednotlivé závorky na levé straně rovnice (D.101) postupně P , Q , R , dostáváme

rovnici s tridiagonální maticí na levé straně ve tvaru

$$\begin{pmatrix} Q & R & & & \\ P & Q & R & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & P & Q & R \\ & & & & P & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f_1 - P y_0 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_{n-1} \\ h^2 f_n - R y_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.102})$$

Numerický algoritmus zapíšeme následujícím způsobem (fortran 95):

- **program** tridiag deklarace názvu programu
- implicit none**
- integer** :: i, ni, N, LDB, NRHS, INFO deklarace celočíselných proměnných: i = pořadové číslo nezávisle proměnné, ni = celkový počet diskretních hodnot, ostatní jsou parametry podprogramu DGTSV balíčku LAPACK - viz odstavec D.1
- parameter(ni=99,N=ni,LDB=N,NRHS=1) hodnoty celočíselných proměnných
- double precision** :: x(ni), y(ni), h(ni), p(ni), q(ni), r(ni), f(ni), B(LDB,NRHS), DL(N-1), DU(N-1), D(N) deklarace reálných proměnných jako pole s dvojitou přesností
- double precision, parameter** :: x0=0.d0, xn=1.d0, y0=0.d0, yn=1.d0 deklarace reálných konstant s dvojitou přesností
- do** i=1,N výpočetní cyklus prostorového kroku
- x(i)=x0+(xn-x0)*i/dfloat(ni+1) příkaz dfloat mění celočíselnou proměnnou na reálnou
- end do**
- do** i=1,N hlavní výpočetní cyklus
- h(i)=x(i)-x(i-1) konstantní krok h je zde zapsán obecně
- p(i)=1.d0 konstantní koeficienty jsou zapsány obecně
- q(i)=3.d0
- r(i)=2.d0
- f(i)=(20.d0*x(i)+29.d0)*dexp(3.d0*x(i))
- if**(i.eq.1) **then** spodní okrajová podmínka
- B(i,1)=h(i)**2.d0*f(i)-(p(i)-q(i)*h(i)/2.d0)*y0
- elseif**((i.gt.1).and.(i.lt.N)) **then** hlavní pole
- B(i,1)=h(i)**2.d0*f(i)
- else** horní okrajová podmínka
- B(i,1)=h(i)**2.d0*f(i)-(p(i)+q(i)*h(i)/2.d0)*yn
- endif**
- end do**
- do** i=1,N-1 zadání spodní diagonály
- DL(i)=p(i)-q(i)*h(i)/2.d0
- end do**
- do** i=1,N zadání hlavní diagonály

```

      D(i)=r(i)*h(i)**2.d0-2.d0*p(i)
end do
do i=2,N                                zadání horní diagonály
  DU(i)=p(i)+q(i)*h(i)/2.d0
end do
volání podprogramu DGTSV balíčku LAPACK (viz oddíl D.1):
call DGTSV(N, NRHS, DL, D, DU, B, LDB, INFO)
if(INFO.ne.0) write(*,*) "INFO=",INFO,"!!!"
write(1,*) x0, y0
do i=1,N
  y(i)=B(i,1)
  write(1,*) x(i), y(i)                !zápis do souboru fort.1
end do
write(1,*) xn, yn
end program tridiag

```

D.5 Numerické metody výpočtů funkcí více proměnných - řešení parciálních diferenciálních rovnic

D.5.1 Hledání kořenů soustavy funkcí více proměnných Newtonova-Raphsonova metoda

Newtonova (Newtonova-Raphsonova) metoda představuje velmi účinný nástroj také pro řešení obecné soustavy (nelineárních) rovnic. Soustavu P , obsahující n rovnic můžeme obecně zapsat jako

$$P_i(\vec{x}) = 0, \quad (\text{D.103})$$

kde $i = 1, \dots, n$ a kde \vec{x} je vektor proměnných x_j . Pomocí Taylorova rozvoje rovnice (D.103) do prvního řádu dostáváme obecný výraz pro k -tou iteraci (k -tý iterativní krok) řešení systému rovnic P_i , který můžeme zapsat kompaktní formou

$$J^k \Delta \vec{x}^k = -\vec{P}^{k-1}(\vec{x}^{k-1}), \quad (\text{D.104})$$

kde vektor $\Delta \vec{x}$ představuje korekci řešení pro každou proměnnou x_j vzhledem k předchozímu iterativnímu kroku. Explicitní zápis vektoru $\Delta \vec{x}^k$ bude mít tvar

$$\Delta \vec{x}^k = (x_1^k - x_1^{k-1}, \dots, x_n^k - x_n^{k-1})^T. \quad (\text{D.105})$$

Výraz \vec{P}^k v rovnici (D.104) představuje vektor k -té iterace všech systémových rovnic P_i^k , zatímco výraz J^k značí odpovídající Jacobiho matici, jejíž každý prvek J_{ij}^k můžeme snadno analyticky vyjádřit ze systému rovnic P_i^k , položíme-li

$$J_{ij}^k = \frac{\partial P_i^k}{\partial x_j^k}. \quad (\text{D.106})$$

Řešíme-li například (jako jednoduchý modelový příklad) soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x^4 + 6y^2 - 12z &= 16, \\ 5x^3 - 3y + z^2 &= 9, \\ x^3 + 7y^2 - z &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.107})$$

můžeme explicitní podobu rovnice (D.104) zapsat jako

$$\begin{pmatrix} 4x_0^3 & 12y_0 & -12 \\ 15x_0^2 & -3 & 2z_0 \\ 3x_0^2 & 14y_0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_0^4 + 6y_0^2 - 12z_0 - 16 \\ 5x_0^3 - 3y_0 + z_0^2 - 9 \\ x_0^3 + 7y_0^2 - z_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.108})$$

kteřou dále řešíme iterativně například pomocí balíčku LAPACK (viz odstavec D.1) jako soustavu tří lineárních rovnic pro tři neznámé $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ a $\Delta z = z - z_0$, z nichž potom v každém kroku získáme nové hodnoty x , y a z jako $x = \Delta x + x_0$, $y = \Delta y + y_0$, $z = \Delta z + z_0$.

- Příklad možného způsobu naprogramování soustavy rovnic (D.107) - program fortran 95:

```
program eqsystem deklarace názvu programu
implicit none
```

deklarace celočíselných proměnných v záhlaví programu, viz odstavec D.1:

```
integer :: i,j,K,INFO,KL,KU,LDAB,LDB,N,NRHS
parameter(N=3,KL=2,KU=2,K=KU+KL+1,LDAB=2*KL+KU+1,LDB=N,NRHS=1)
integer :: IPIV(N)
```

deklarace reálných veličin s dvojitou přesností:

```
double precision :: AB(LDAB,N),B(LDB,NRHS),DER(N,N),C(N),x0,y0,z0
přesměrování konečného zápisu výsledku do souboru "solve.dat":
open(10,file="solve.dat",status="unknown")
```

```
x0=-4.0d0 odhad vstupní hodnoty  $x_k$ 
y0=-3.0d0 odhad vstupní hodnoty  $y_k$ 
z0=14.0d0 odhad vstupní hodnoty  $z_k$ 
do výpočetní cyklus
```

matice derivací levých stran:

```
DER(1,1)=4.d0*x0**3.d0
DER(1,2)=12.d0*y0
DER(1,3)=-12.d0
DER(2,1)=15.d0*x0**2.d0
DER(2,2)=-3.0
DER(2,3)=2.d0*z0
DER(3,1)=3.d0*x0**2.d0
DER(3,2)=14.d0*y0
DER(3,3)=-1.d0
```

transformovaná pásová matice AB podle schématu LAPACK, viz odstavec D.1:

```
do j=1,N
  do i=max(1,j-KU),min(N,j+KL)
    AB(K+i-j,j)=DER(i,j)
  end do
end do
```

matice pravých stran:

```
B(1,1)=-(x0**4.d0+6.d0*y0**2.d0-12.d0*z0-16.d0)
```

```
B(2,1)=-(5.d0*x0**3.d0-3.d0*y0+z0**2.d0-9.d0)
B(3,1)=-(x0**3.d0+7.d0*y0**2.d0-z0)
```

vlastní výpočet pomocí podprogramu DGBSV, viz odstavec D.1.:

```
call DGBSV(N,KL,KU,1,AB,LDAB,IPIV,B,N,INFO)
```

```
if (INFO.ne.0) write(*,*) "INFO=",INFO,"!!!"
```

```
C=(/(dabs(B(i,1)),i=1,N)/)
```

```
if (maxval(C).lt.1.d-15) exit    stop kritérium:  $\max|\Delta x, \Delta y, \Delta z| < 10^{-15}$ 
```

```
x0=B(1,1)+x0
```

```
y0=B(2,1)+y0
```

```
z0=B(3,1)+z0
```

zápis výsledných hodnot $x, y, z, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ z jednotlivých iterací do souboru:

```
write(10,*)x0,y0,z0,(B(i,1),i=1,N)
```

```
end do
```

```
stop                                zastavení celého procesu
```

```
end program eqsystem                konec programu
```

- Tabulka vypočtených hodnot $x_k, y_k, z_k, \Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ ze všech provedených iterací :

k	x_k	y_k	z_k
1	-3.5568659855769229	-2.8660523504273505	14.644631410256411
2	-3.4484177335542667	-2.8088357894123277	14.321062859837509
3	-3.4422190042021756	-2.8052747443938260	14.300861993036721
4	-3.4421993029036972	-2.8052630869488695	14.300795971729505
5	-3.4421993027044500	-2.8052630868291244	14.300795971052235
6	-3.4421993027044500	-2.8052630868291244	14.300795971052233

k	Δx_k	Δy_k	Δz_k
1	0.44313401442307693	0.13394764957264957	0.64463141025641035
2	0.10844825202265625	5.7216561015022732E-002	-0.32356855041890148
3	6.1987293520911584E-003	3.5610450185016187E-003	-2.0200866800787826E-002
4	1.9701298478486783E-005	1.1657444956463351E-005	-6.6021307216049201E-005
5	1.9924720437988766E-010	1.1974503494876664E-010	-6.7726957780015056E-010
6	6.2835370146182566E-017	1.8208999862070576E-016	-1.3650720993330078E-015

Počáteční odhad (pokud neznáme, jako v případě standardních fyzikálních dějů, nějaké „předem očekávané“ hodnoty) může být poměrně obtížný - na našem příkladě můžete vyzkoušet, že pokud zvolíme např. všechny počáteční hodnoty rovny 1, výpočet zkonverguje rovněž, ovšem bude zapotřebí 24 325 iterací (namísto 6 iterací pro uvedené blízké celočíselné počáteční odhady).

D.5.2 Principy konečných diferencí

Jednoduchý příklad - jednorozměrná rovnice se dvěma proměnnými: t -čas, x -délka - Burgersova (transportní) parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + u \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (\text{D.109})$$

kde u je konstanta (rychlost). Numerický tvar funkce $f(t, x)$ je reprezentován na jednorozměrné síti, tvořené M prostorovými body,

$$x_0, x_1, \dots, x_M \quad (x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_M). \quad (\text{D.110})$$

Výpočet proběhne opakovaně během N časových kroků,

$$t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_1 + \Delta t = t_0 + 2\Delta t, \dots, t_N = t_0 + N\Delta t. \quad (\text{D.111})$$

Numerické řešení veličiny $f(t, x)$ v obecném j -tém prostorovém a n -tém časovém ($x = x_j$, $t = t_n$) kroku označíme f_j^n . Taylorův rozvoj funkce $f(t, x)$ má tvar

$$f(x + h, t) = f(x, t) + h \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^3) + \dots \quad (\text{D.112})$$

$$f(x - h, t) = f(x, t) - h \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \mathcal{O}(h^3) + \dots, \quad (\text{D.113})$$

kde $h = \Delta x$ je přírůstek prostorové proměnné x (viz rovnice (1.1)) a symbol \mathcal{O} značí zanedbatelný, dále nezapočítávaný příspěvek členů vyšších řádů. V numerické matematice jsou derivace nahrazeny tzv. *diferencemi* (viz odstavec D.4.2):

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \approx \frac{f(x + h, t) - f(x, t)}{h} = \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x}, \quad \text{apod.} \quad (\text{D.114})$$

Typy diferencí pro aproximace derivací 1. řádu:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_j^n &\approx (f_{j+1}^n - f_j^n) / \Delta x && \text{dopředné diference,} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_j^n &\approx (f_j^n - f_{j-1}^n) / \Delta x && \text{zpětné diference,} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_j^n &\approx (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) / (2\Delta x) && \text{centrální diference.} \end{aligned} \quad (\text{D.115})$$

Příklad numerického diferenčního schématu pro aproximace derivací 2. řádu:

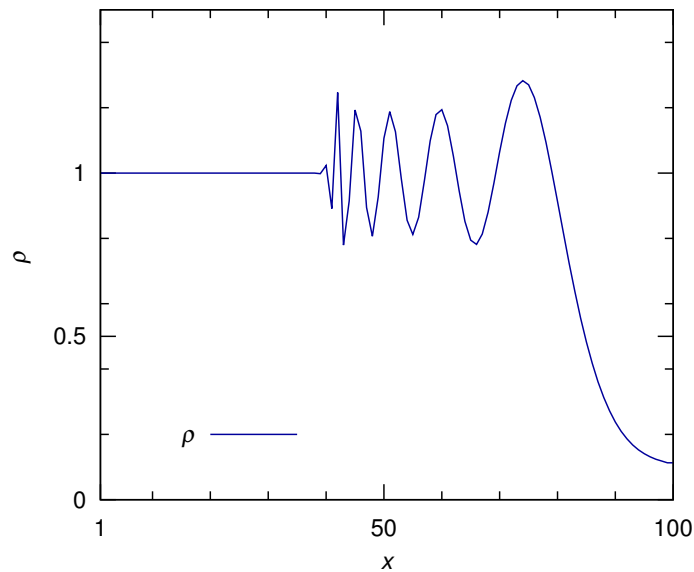
$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_j^n \approx (f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n) / (\Delta x)^2. \quad (\text{D.116})$$

Numerické diferenční schéma uvedené transportní (advektivní) rovnice (D.109) má tvar

$$\frac{(f_j^{n+1} - f_j^n)}{\Delta t} = -u \frac{(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)}{2\Delta x}, \quad (\text{D.117})$$

kde časový krok je počítán jako dopředná diference a prostorový krok je počítán jako centrální diference. Po jednoduché úpravě dostáváme diferenční rovnici (D.117) v programovatelném tvaru:

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n). \quad (\text{D.118})$$



Obrázek D.8: Graf (časový snímek) postupné hustotní vlny, popsané Burgersovou rovnicí (D.109), modelované metodou explicitního Eulerova schématu na principu konečných diferencí (rovnice (D.118), viz také programový skript, uvedený v tomto odstavci). V grafu je zřetelná nestabilní vlnová poruha, jejíž oblast i amplituda neustále narůstá (viz sekce D.5.3).

- Příklad možného způsobu naprogramování rovnice (D.118) - program fortran 95:

program explicit	deklarace názvu programu
implicit none	
integer :: j, n, t	deklarace celočíselných proměnných v záhlaví programu: j = pořadové číslo prostorového kroku, n = pořadové číslo časového kroku
integer :: nj, nn	deklarace celočíselných proměnných v záhlaví programu: nj = celkový počet prostorových kroků j, nn = celkový počet časových kroků n
parameter (nj=100, nn=200)	zadání číselných hodnot pro nj, nn
double precision :: x(nj), f(nj), u(nj)	deklarace reálných veličin x, f a u jako pole (vektoru) o nj prvcích s dvojitou přesností
double precision :: dt	deklarace reálné veličiny dt (časového kroku)
parameter (dt = 1.d0, u = 1.2d0)	deklarace pevně zadaných hodnot konstantních reálných veličin
do j=1,nj	cyklus počáteční podmínky (počáteční funkce)
x(j) = dfloat(j)	příkaz dfloat mění celočíselnou proměnnou na reálnou
if (j.le.nj/2) then	tzv. logická podmínka (kde .le. znamená \leq)
f(j) = 1.d0	
else	
f(j) = 0.1d0	zadaná počáteční funkce: pro $x \leq 0.5nj \rightarrow f = 1.0$, pro $x > 0.5nj \rightarrow f = 0.1$
endif	
end do	konec cyklu

t=0.d0	změna typu proměnné t na real s dvojitou přesností
do	vnější (časový) cyklus
t = t+dt	
do j=2,nj-1	vnitřní (prostorový) cyklus
f(j) = f(j)-u(j)*dt*(f(j+1)-f(j-1))/(x(j+1)-x(j-1))	vlastní rovnice (D.118)
end do	konec vnitřního cyklu
f(1) = f(1)	vnitřní tzv. pevná okrajová podmínka
f(nj) = f(nj-1)	vnější tzv. volná okrajová podmínka
do j=1,nj	cyklus zápisu do souboru s názvem fort.100
write (100,*) x(j), f(j)	zápis spočítaných hodnot
end do	
write (100,*)	
write (100,*)	dvouřádková mezera, nutná pro animaci časových cyklů
if (t.gt.200.d0) exit	vystoupení z časového cyklu, pokud $t > 200$
end do	ukončení časového cyklu
stop	zastavení celého procesu při $t > 200$
end program explicit	konec programu

Toto tzv. explicitní Eulerovo numerické schéma je sice jednoduché, přehledné a názorné, je ale *vždy* numericky nestabilní (viz obrázek D.8 a odstavec D.5.3):

D.5.3 von Neumannova analýza stability

Jednoduchá analytická metoda, založená na předpokladu periodické numerické poruchy, tedy na *Fourierovské dekompozici* (rozkladu) numerické chyby. Metoda byla publikována v roce 1947 matematiky Johnem Crankem a Phyllis Nicolsonovou, za spoluautorství významného matematika, fyzika a průkopníka digitálních počítačů Johna von Neumanna.

Předpokládejme obecné poruchy stability (periodické perturbace, vibrace) vlnového charakteru ve tvaru

$$\xi^n e^{ikj\Delta x}, \quad (\text{D.119})$$

kde $\xi(k)$ je amplituda vlny, k je vlnové číslo libovolné hodnoty. Pokud $|\xi| > 1$, pro $n \rightarrow \infty$ bude

$$|\xi|^n \rightarrow \infty, \quad (\text{D.120})$$

porucha se neustále zvětšuje, numerické schéma je nestabilní. Pokud

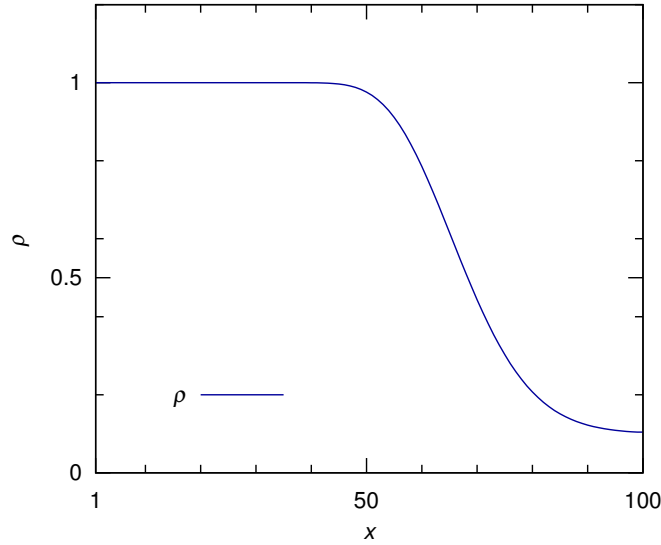
$$|\xi| < 1, \quad (\text{D.121})$$

numerické schéma je stabilní. Po dosazení poruchové vlnové funkce do explicitního řešení (D.118) dostáváme

$$(\xi^{n+1} - \xi^n) e^{ikj\Delta x} = -\frac{u\Delta t}{2\Delta x} \xi^n \left[e^{ik(j+1)\Delta x} - e^{ik(j-1)\Delta x} \right] \quad (\text{D.122})$$

a po vydělení celé rovnice (D.122) výrazem $\xi^n e^{ikj\Delta x}$ dostáváme

$$\xi = 1 - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} \left(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x} \right) = 1 - i \frac{u\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x). \quad (\text{D.123})$$



Obrázek D.9: Časový snímek postupné hustotní vlny, popsané Burgersovou rovnicí (D.109), modelované Laxovou metodou (rovnice (D.125)). Křivka hustoty je na rozdíl od explicitního schématu stabilní, je zde však příliš velká tzv. *numerická difúzivita*, projevující se značným rozmytím (rozostřením) původní vlny ostře schodovitého tvaru (srovnej s grafem D.13 v odstavci D.5.8), způsobená přidáním výrazu, odpovídajícímu druhé derivaci advekčního členu, tj. kdy výraz $(f_{j+1} + f_{j-1})/2$ v rovnici (D.125) můžeme chápat jako $f_j + (f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1})/2$.

Protože $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$, bude druhá mocnina rovnice (D.123) rovna výrazu

$$|\xi|^2 = 1 + \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x), \quad (\text{D.124})$$

kde pravá strana zjevně bude téměř vždy větší než 1 (výjimečně se bude rovnat 1). Je tedy zřejmé, že v případě explicitního numerického schématu musí vždy platit, že $|\xi| \geq 1$, toto schéma je tedy vždy nestabilní.

D.5.4 Laxova metoda

Numerická varianta explicitního schématu, které podstatně stabilizuje, je pojmenovaná podle matematika Petera Davida Laxe. Základem je jednoduchá změna ve struktuře časového členu. Člen f_j^n v explicitním řešení je zde nahrazen aritmetickým průměrem sousedních hodnot,

$$f_j^{n+1} = \frac{1}{2} (f_{j+1}^n + f_{j-1}^n) - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n), \quad (\text{D.125})$$

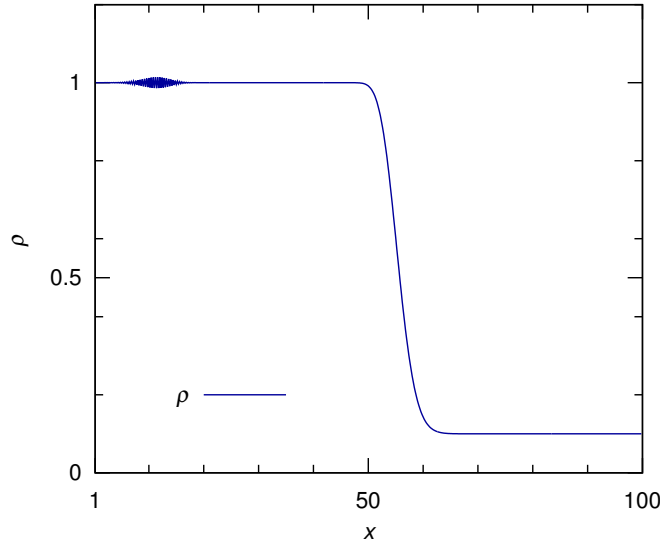
von Neumannova analýza stability v tomto případě dává

$$\xi = \cos(k\Delta x) - i\frac{u\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x), \quad \text{a tedy} \quad |\xi|^2 = \cos^2(k\Delta x) + \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x). \quad (\text{D.126})$$

Schéma je zjevně stabilní, pokud pro tzv. *Courant-Friedrichs-Lewyho* číslo $u\Delta t/\Delta x$ (zkráceně Courantovo číslo, cfl) platí

$$\frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad \text{Courantův teorém stability.} \quad (\text{D.127})$$

Stejná rovnice (D.109), modelovaná Laxovou metodou (D.125) je zobrazena v grafu D.9.



Obrázek D.10: Časový snímek postupné hustotní vlny (D.109), modelované metodou implicitního schématu (rovnice (D.134)). Křivka hustoty je stabilní a na rozdíl od Laxova schématu není zdaleka tak rozšířená. Amplituda postupného klubka vlnové poruchy v levé části grafu se v čase snižuje, jeho rozsah se nemění.

D.5.5 Metoda zpětného kroku (Upwind method)

Metoda zpětného kroku používá v prostorovém (advektivním) členu zpětnou diferenci,

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} (f_j^n - f_{j-1}^n), \quad (\text{D.128})$$

von Neumannova analýza stability v tomto případě dává (cfl = α):

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - \alpha + \alpha \cos(k\Delta x) - i\alpha \sin(k\Delta x), \quad \text{a tedy,} \\ |\xi|^2 &= [1 - \alpha + \alpha \cos(k\Delta x)]^2 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x). \end{aligned} \quad (\text{D.129})$$

Z požadavku $|\xi|^2 < 1$ vyplývá nerovnost

$$2\alpha(1 - \alpha)[1 - \cos(k\Delta x)] > 0. \quad (\text{D.130})$$

Protože pokud $\alpha > 0$ potom $\cos(k\Delta x) < 1$, schéma bude stabilní, pokud obdobně jako v odstavci D.5.4 Courantovo číslo $\alpha < 1$.

D.5.6 Laxova-Wendroffova metoda

Dvoukroková metoda, pojmenovaná podle již zmíněného Petera Laxe (viz odstavec D.5.4) a dalšího matematika Burta Wendroffa, kombinuje výhody Laxova a explicitního schématu následujícím způsobem:

1. krok (Laxův) a 2. krok (explicitní):

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f_{j+1}^n + f_j^n) - \frac{1}{2} \frac{u\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_j^n), \quad f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{D.131})$$

von Neumannova analýza stability v tomto případě dává (cfl = α):

$$\xi = 1 - 2\alpha \sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \left[\alpha \sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) + i \cos\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \right], \quad \text{a tedy,} \quad (\text{D.132})$$

$$|\xi|^2 = 1 - 4\alpha^2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \left[1 - \alpha^2 \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \right]. \quad (\text{D.133})$$

Z požadavku $|\xi|^2 < 1$ opět vyplývá podmínka stability $\alpha < 1$.

D.5.7 Implicitní schéma

Princip tzv. implicitního schématu je založen na tom, že hodnoty veličiny f v prostorovém (advěkčném) členu na pravé straně rovnice (D.118) jsou zadány v čase t^{n+1} , tedy de facto v budoucnu, tj. po provedení aktuálního výpočtu,

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} (f_{j+1}^{n+1} - f_{j-1}^{n+1}). \quad (\text{D.134})$$

von Neumannova analýza stability v tomto případě dává (cfl = α):

$$\xi = \frac{1}{1 + i\alpha \sin(k\Delta x)} = \frac{1 - i\alpha \sin(k\Delta x)}{1 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)}, \quad \text{a tedy} \quad |\xi|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)}. \quad (\text{D.135})$$

Z rovnice (D.135) je tedy zcela zřejmé, že implicitní schéma musí splňovat podmínku stability $|\xi| \leq 1$, je tedy *vždy* numericky stabilní. Nevýhodou je komplikovanost výpočtu f_j^{n+1} v každém časovém kroku, kdy tuto předem neznámou hodnotu počítáme pomocí tzv. *tridiagonální* matice (viz odstavce D.1, D.2.1.)

$$\frac{\alpha}{2} f_{j-1}^{n+1} - f_j^{n+1} - \frac{\alpha}{2} f_{j+1}^{n+1} = -f_j^n \quad (\text{D.136})$$

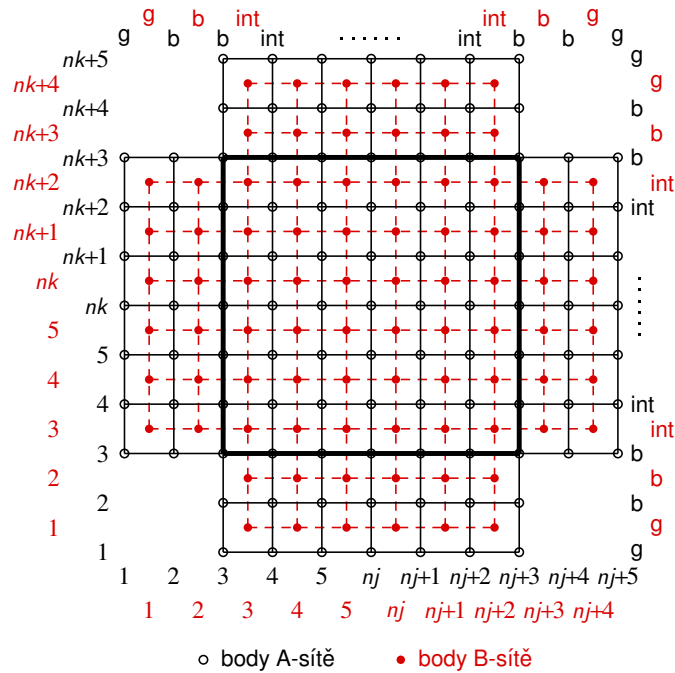
některou z metod nebo knihoven numerické lineární algebry (viz odstavce D.1). Stejná rovnice (D.109), modelovaná implicitní metodou (D.134)-(D.136) je zobrazena v grafu D.10.

D.5.8 Příklad pokročilejšího numerického schématu

- V současnosti existuje celá řada modernějších, přesnějších a stabilnějších numerických metod (viz např. Thompson, 2006):
- Použití tzv. *oddělených sítí* (staggered mesh), umožňující oddělení toků různých veličin (flux splitting), například vektorových a skalárních polí, atd.
- Postupné přidávání jednotlivých členů pravých stran fyzikálních rovnic, reprezentujících různá silová pole (operator splitting):

$$\begin{aligned} (f^1 - f^0)/\Delta t &= L_1(f^0) \\ (f^2 - f^1)/\Delta t &= L_2(f^1) \\ &\vdots \\ (f^m - f^{m-1})/\Delta t &= L_m(f^{m-1}), \end{aligned} \quad (\text{D.137})$$

kde L_j představuje jednotlivé aproximace členů pravé strany rovnice pomocí principu konečných diferencí, m je celkový počet členů na pravé straně rovnice a horní indexy udávají pořadové číslo dílčího časového kroku.



Obrázek D.11: Schéma uspořádání tzv. *oddělených* sítí (staggered mesh). A-sítě, určená pro počítání vektorů, je zobrazena černě, B-sítě, určená pro počítání skalárních veličin, je zobrazena červeně. Tlustou čarou je ohraničena vnitřní výpočetní doména ('int'), symbolem 'b' je označena zóna pro počítání okrajových podmínek, symbolem 'g' je označena tzv. *ghost zone*, což je další přidaná zóna pro okrajové podmínky, nutná pro počítání diferenciálních rovnic 2. řádu nebo v případě symetrických podmínek, například vůči ose sítě (periodické okrajové podmínky), středu sítě, atd. Přesné uspořádání zón pro okrajové podmínky se může v detailech lišit právě podle typu okrajových podmínek (pevné, reflexní, periodické, atd.).

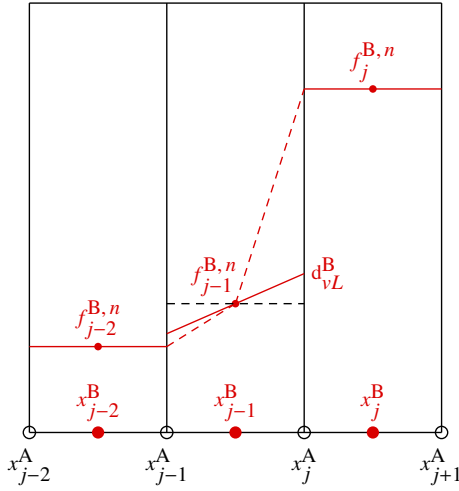
- Princip *oddělených* sítí (staggered mesh): na A-síti „sedí“ vektorové veličiny, na B-síti „sedí“ skalární veličiny (viz obrázek (D.11)).
- Příklad dvoukrokové metody (tj. kdy výpočet následujícího časového kroku je rozdělen na dva mezikroky: explicitně vypočítaný tzv. *prediktorový* krok, následovaný implicitním tzv. *korektorovým* krokem) pro výpočet transportní rovnice (D.109) skalární veličiny f :

$$\Delta_-^A = \frac{f_j^B - f_{j-1}^B}{x_j^B - x_{j-1}^B}, \quad \Delta_+^A = \frac{f_{j+1}^B - f_j^B}{x_{j+1}^B - x_j^B}, \quad (\text{D.138})$$

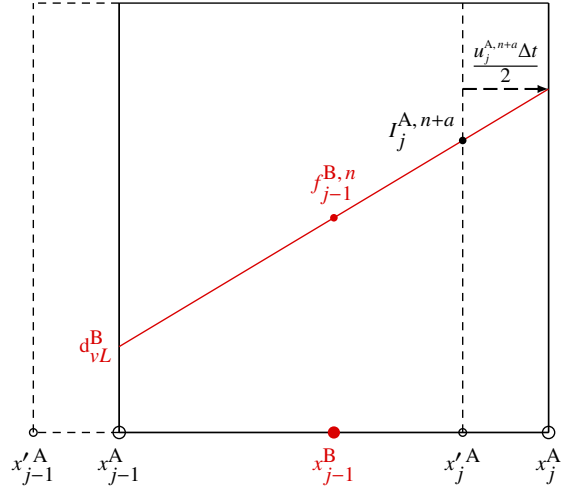
kde Δ_- , Δ_+ jsou symboly pro zpětnou a dopřednou diferenci. Pro výpočet prediktorového kroku použijeme například tzv. *van Leerovu* derivaci (van Leer, 1982), definovanou jako:

$$d_{vL}^B = \begin{cases} \langle \Delta_- \Delta_+ \rangle = \frac{2\Delta_- \Delta_+}{\Delta_- + \Delta_+}, & \text{if } \Delta_- \Delta_+ > 0 \\ 0, & \text{if } \Delta_- \Delta_+ < 0. \end{cases} \quad (\text{D.139})$$

van Leerova derivace je tedy nenulová, pokud je funkce f monotónní a je nulová v těch polích prostorové sítě, kde funkce f prochází extrémy. Důležitou vlastností van Leerovy derivace je, že zachovává monotónnost derivací a zabraňuje vzniku lokálních extrémů: z rovnice (D.139) vyplývá, že pokud $\Delta_- \approx \Delta_+ \approx \Delta$, potom $\langle \Delta_- \Delta_+ \rangle \approx \Delta$ a pokud



Obrázek D.12a



Obrázek D.12b

Obrázek D.12: Schématické vyobrazení podmínky monotónnosti van Leerovy derivace (rovnice (D.139)) je na obrázku D.12a: sklon lineární distribuce veličiny f v prostřední výpočetní buňce (čárkovaná čára) je díky van Leerově derivaci (plná čára označená jako d_{vL}^B) redukován, takže hodnoty lineárně interpolované, advektované skalární veličiny f na rozhraní buňky musí po celé šířce této buňky „padnout“ mezi hodnoty této veličiny, *zprůměrované* přes objemy sousedních výpočetních buněk. Obrázek D.12b znázorňuje prediktorový krok advekce skalární veličiny f (rovnice (D.140)). Veličina je lineárně interpolována (plná červená čára, označená d_{vL}^B , znázorňuje sklon van Leerovy derivace) a advektována na rozhraní buňky v polovičním časovém kroku $t + \Delta t/2$. Hranice buňky, vyznačené plnou čarou, symbolizují objem látky, advektovaný v čase, zatímco „čárkovaná“ buňka je pevně fixována v prostoru. Poloha lineárního interpolantu I je označena $I_j^{A,n+a}$. Následující korektorový krok (rovnice (D.141)) advektuje veličinu na střed B-sítě v čase $t + \Delta t$.

$\Delta_- \ll \Delta_+$ nebo $\Delta_- \gg \Delta_+$, potom $\langle \Delta_- \Delta_+ \rangle \approx \min(\Delta_-, \Delta_+)$. To zaručuje, že hodnoty derivované funkce f na hranicích výpočetní buňky lokálně „nepřestřelí“ střední hodnoty funkce f v sousedních buňkách (viz obrázek D.12).

- Výsledkem prediktorového kroku bude veličina I (nazveme ji například *interpolant*), která je během prediktorového kroku advektována na rozhraní druhé sítě, tj. z původní B-sítě na A-sít a naopak. Prediktorový krok bude mít v tomto případě tvar

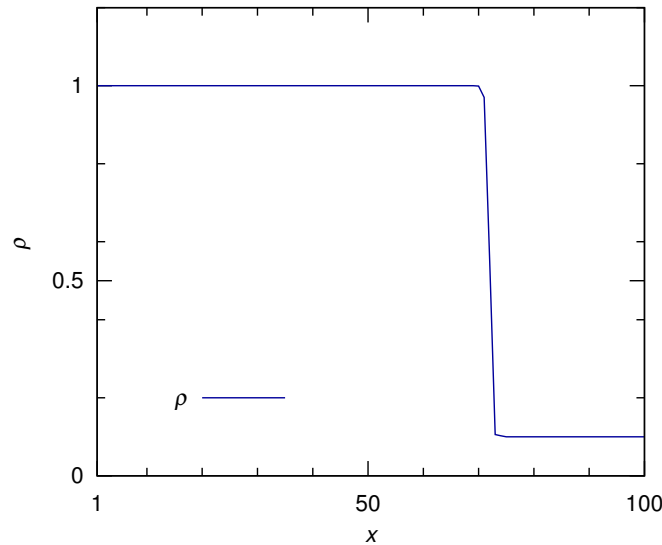
$$I_j^{A,n+a} = f_{j-1}^{B,n} + d_{vL}^B \left(x_j^A - x_{j-1}^B - \frac{u_j^{A,n+a} \Delta t}{2} \right), \quad (\text{D.140})$$

kde u je advekční rychlost (srovnej rovnici (D.118)) a horní index $n + a$ označuje dílčí posun v rámci časového kroku n .

- Následující korektorový krok bude dán rovnicí ve tvaru

$$f_j^{B,n+1} = f_j^{B,n} - \frac{\Delta t}{x_{j+1}^A - x_j^A} \left(I_{j+1}^{A,n+a} u_{j+1}^{A,n+a} - I_j^{A,n+a} u_j^{A,n+a} \right). \quad (\text{D.141})$$

Po provedení korektorového kroku se tedy skalární veličina f opět vrací na B-sít, tj. uprostřed mezi polohy $A(j+1)$, $A(j)$. Rovnice (D.141) je zároveň numerickou formou jednorozměrné divergence. Obdobné schéma ve dvoj a trojrozměrné verzi se nazývá *metoda*



Obrázek D.13: Časový snímek postupné hustotní vlny, popsané Burgersovou rovnicí (D.109), modelované metodou prediktor-korektor (pomocí rovnic (D.140) a (D.141)). Křivka hustoty je na rozdíl od předchozích schématů stabilní a ostrá, malý sklon čela vlny je dán hustotou výpočetní sítě (vzdáleností sousedních prostorových bodů). Tvar vlny lze korigovat přidáním stříhové tzv. *Navier-Stokesovy viskozity* nebo objemové, tj. v praktických výpočtech používané tzv. *numerické viskozity* (viz například, LeVeque, 2002, a další).

konečných objemů (finite volume method - viz např. LeVeque (2002)). Vícerozměrná podoba rovnice (D.141) (počítaná v souřadnicovém směru j , index k zde symbolizuje všechny ostatní souřadnicové směry, v závislosti na dimenzi výpočetní sítě) by tedy vypadala:

$$f_{j,k}^{B,n+1} = f_{j,k}^{B,n} - \frac{\Delta t}{V_{j,k}^B} \left(I_{j+1,k}^{A,n+a} u_{j+1,k}^{A,n+a} S_{j+1,k}^A - I_{j,k}^{A,n+a} u_{j,k}^{A,n+a} S_{j,k}^A \right), \quad (\text{D.142})$$

kde veličina $V_{j,k}^B$ znamená objem jedné tzv. buňky výpočetní sítě (grid cell), středovaný na síti B, veličina $S_{j,k}^A$ znamená potom plochu této buňky (nacházející se na síti A), přes níž prochází tok veličiny f ve směru j (viz odstavce B.1.2, B.2.2, B.3.2, B.7.2, popisující vztahy mezi těmito veličinami v různých souřadnicových soustavách - viz také obrázek D.12). Pokud bychom modelovali transportní rovnici (D.109) pro vektorovou veličinu, bude postup zcela obdobný, pouze namísto ze sítě B budeme vycházet ze sítě A, prediktorový krok transportuje tuto veličinu na síť B a následný korektorový krok opět na síť A.

- Stejná rovnice (D.118), modelovaná uvedenou metodou prediktor-korektor je uvedena na obrázku D.13. Courantovo číslo $\text{cfl} = 0.5$.
- Mimořádnou pozornost je třeba věnovat volbě a zápisu *okrajových podmínek* (viz příslušné zóny výpočetní sítě na obrázku D.11). Mezi jejich základní typy patří:
 - *fixní* (vtokové) okrajové podmínky, kdy hodnoty v b a g zónách jsou zadány v počátečních podmínkách (počáteční funkci) a dále se nemění.
 - *volné* (výtokové) okrajové podmínky, kdy hodnoty v b a g zónách se v každém časovém kroku rovnají hodnotě v první nejbližší výpočetní zóně (zde je vhodné nějakým

způsobem pojistit, aby skalární stavové veličiny zde byly vždy nezáporné, případně nenulové).

- *periodické* okrajové podmínky, kdy hodnoty v zóně 1 se v každém časovém kroku rovnají hodnotám v zóně $n_j + 1$, hodnoty v zóně 2 hodnotám v zóně $n_j + 2$, hodnoty v zóně 3 (na červené síti) hodnotám v zóně $n_j + 3$ a naopak, hodnoty v zóně $n_j + 4$ hodnotám v zóně 4 a hodnoty v zóně $n_j + 5$ hodnotám v zóně 5. Hodnoty v zónách 3 a $n_j + 3$ na černé síti se počítají zvlášť z hydrodynamických rovnic (totéž platí pro další směry).
- *reflexní* (pevná zeď) okrajové podmínky, kdy skalární veličiny q a složky vektorových veličin, které jsou paralelní s daným okrajem, jsou počítány jako $q(1) = q(4)$, $q(2) = q(3)$, $q(n_j + 3) = q(n_j + 2)$ a $q(n_j + 4) = q(n_j + 1)$. Složky vektorových veličin, které jsou kolmé k danému okraji jsou zde počítány jako $q(1) = -q(5)$, $q(2) = -q(4)$, $q(3) = 0$, $q(n_j + 3) = 0$, $q(n_j + 4) = -q(n_j + 2)$, $q(n_j + 5) = -q(n_j + 1)$. Totéž platí pro další směry.
- Numerické schéma, uvedené v tomto odstavci, není zdaleka jediné možné, představuje pouze ukázkou tzv. *po částech lineární* metody (Piecewise Linear Method), kdy numerické difference jsou prokládány úsečkami. Je možné použít i přesnější tzv. *po částech parabolickou* metodu (Piecewise Parabolic Method - PPM, viz např. [Colella & Woodward \(1984\)](#)), nevýhodou je ovšem zcela zákonitě vyšší výpočetní náročnost, tj. nároky na výkon počítačů, atd. Kromě toho existuje celá řada jiných metod, založená na jiných principech numerického derivování, jiných typech prostorových sítí (například tzv. *adaptivní sítě*, které se v průběhu času samy mění), nebo k výpočtům vůbec prostorové sítě nevyužívají - např. tzv. *SPH metoda* (Smooth Particle Hydrodynamics), atd.

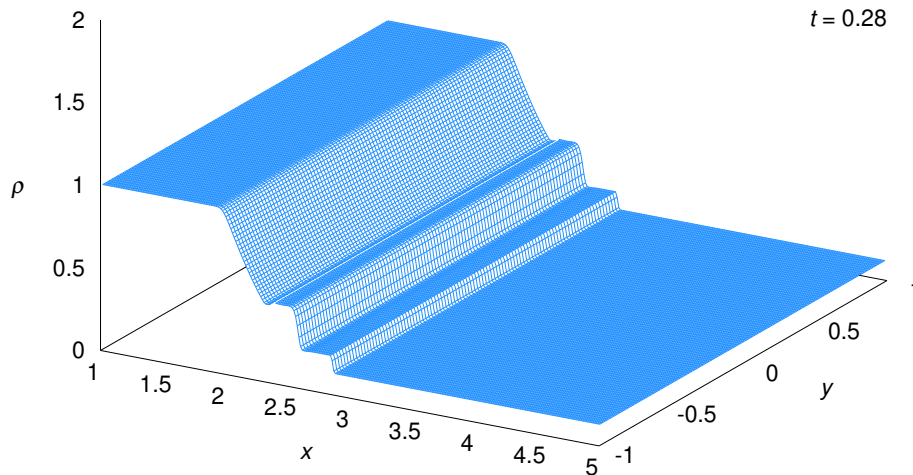
D.5.9 Příklady modelování reálných fyzikálních procesů

Riemannova-Sodova rázová trubice:

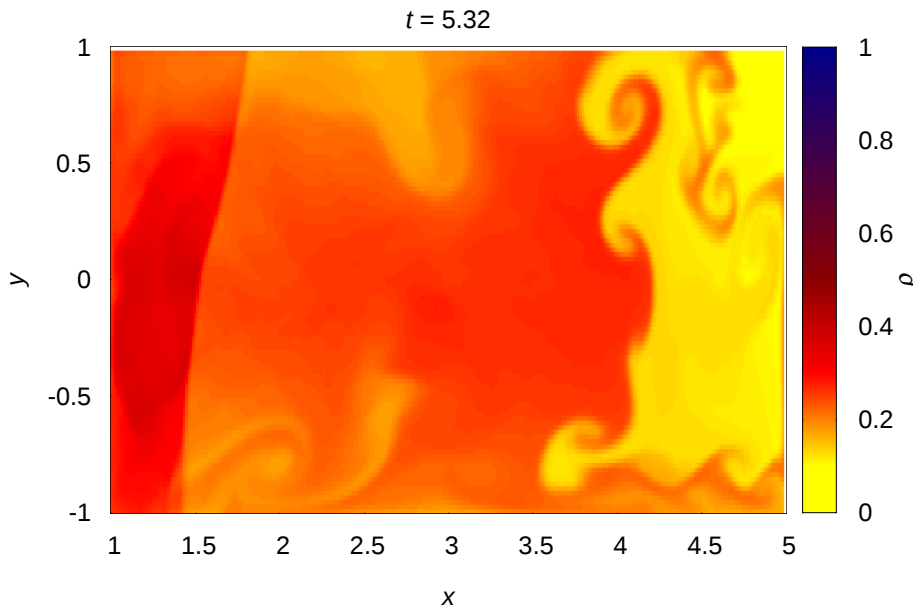
Základní testovací úloha pro většinu numerických kódů se snadno ověřitelnými výsledky. Jedná se o uzavřenou trubici, respektive box, rozdělený na dvě části pevnou přepážkou, nazývanou též *diaphragma* (latinský název pro bránicí), kde obě oddělení jsou naplněné plynem s rozdílnými hustotami a tlaky. Náhle přepážka zmizí což vyvolá pohyb plynu předcházený rázovou vlnou šířící se kolmo k rovině původní přepážky ve směru řidšího plynu. Obrázek [D.14](#) ukazuje snímek průběhu hustoty, kdy počáteční stav plynu (kde index L označuje levou stranu trubice s vyšší počáteční hustotou a tlakem ,index R označuje pravou stranu trubice s nižší počáteční hustotou a tlakem) je zvolen následovně: $\rho_L = 1.0$, $\rho_R = 0.125$, $P_L = 1.0$, $P_R = 0.1$, $\gamma = 5/3$ kde ρ je hustota, P je tlak a γ je adiabatická konstanta. Obrázek [D.15](#) ukazuje obdobnou testovací úlohu s počátečními průběhy veličin proměnnými v obou směrech x , y , s následujícími parametry: $\rho_L = e^{-y^2}$, $\rho_R = 0.125 e^{-y^2}$, $P_L = e^{-y^2}$, $P_R = 0.1 e^{-y^2}$, $\gamma = 5/3$. Profily hustoty a tlaku v příčném směru y jsou tedy „Gaussovské“. V tomto modelu je ještě přidána „porucha“, způsobená malou počáteční složkou rychlosti $V_y = 0.05$.

Kelvinova-Helmholtzova nestabilita

Dalším oblíbeným testovacím problémem je modelování Kelvinovy-Helmholtzovy nestability (viz např. [Chandrasekhar, 1961](#), viz také obrázek [D.16](#)). Pravoúhlá oblast (box) je naplněná plynem se dvěma opačně směřujícími toky, oddělenými lineární pomyslnou diskontinuitou. Okrajové podmínky jsou periodické na čelních okrajích toků, tj. v obrázku [D.16](#) na stranách se sou-

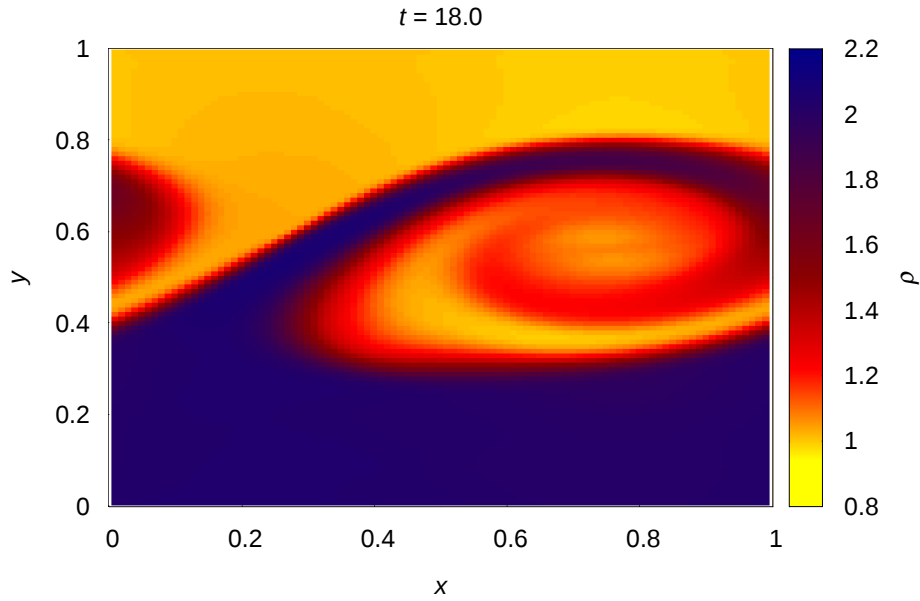


Obrázek D.14: Výsledek simulace hustoty ρ v Riemannově-Sodově rázové trubici v případě neviskózního toku v čase $t = 0.28$ (v jednotkách odpovídajících popisu v odstavci D.5.9). Počáteční stav plynu je statický a je fixován pevnou přepážkou (nazývanou také *diafragma*), situovanou v $1/3$ délky trubice. Hodnoty hustoty ρ a tlaku P na levé straně přepážky jsou $\rho_L = 1.0$, $P_L = 1.0$, hodnoty na pravé straně přepážky jsou $\rho_R = 0.125$, $P_R = 0.1$. Celková délka \times šířka trubice (boxu) je 4.0×2.0 v libovolných jednotkách a je zde použita výpočetní síť s počtem 300×100 zón, okrajové podmínky jsou „pevné stěny“. Tři charakteristické „schody“ v hustotě jsou (zprava doleva) vlastní rázová vlna (jejíž rychlost šíření může až čtyřikrát převyšovat skutečnou rychlost pohybujícího se plynu), dále tzv. kontaktní nespojitost, což je místo původní přepážky, šířící se vlastní rychlostí pohybujícího se plynu a konečně tzv. zředující vlna, šířící se opačným směrem (viz grafy stejné testovací úlohy například v Stone & Norman, 1992).



Obrázek D.15: Barevný graf průběhu hustoty ve stejné Riemannově-Sodově rázové trubici v čase $t = 5.32$, s přidanou malou počáteční y -ovou složkou rychlosti, $V_y = 0.05$. Tato „porucha“ způsobí určitou příčnou deformaci toku kde jsou rovněž viditelné Kelvinovy-Helmholtzovy a Rayleigh-Taylorovy nestability.

řadnicemi $x = 0$ a $x = 1$, zatímco na zbývajících dvou stranách jsou zvoleny opět jako „pevné stěny“. Počáteční podmínky k úloze jsou převzaty z parametrů, uvedených v instrukcích ke kódu



Obrázek D.16: Barevný graf průběhu hustoty v Kelvinově-Helmholtzově nestabilitě (viz odstavec D.5.9). Snímek ukazuje tok v pokročilém čase, kdy je nestabilita již zcela nelineární, tj. s plně rozvinutými turbulencemi.

ATHENA (Stone et al., 2008; Springel, 2013): pro $y > 0.5$ je podélná rychlost toku $V_{x,1} = 0.3$ a hustota plynu $\rho_1 = 1$, pro $y \leq 0.5$ je podélná rychlost toku $V_{x,2} = -0.3$ a hustota plynu $\rho_2 = 2$. Počáteční tlak $P = 1.0$ v celé výpočetní oblasti a adiabatický exponent $\gamma = 5/3$. Abychom se vyhnuli naprosto ostrému rozhraní mezi oběma toky, definujeme přechodovou oblast která propojí oba toky, popsanou rovnicemi (Springel, 2013):

$$\rho(x, y) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) \left(1 + e^{\frac{y-0.5}{\sigma}}\right)^{-1}, \quad (\text{D.143})$$

která charakterizuje počáteční poruchu hustoty ve směru y , podobně

$$V_x(x, y) = V_{x,1} + (V_{x,2} - V_{x,1}) \left(1 + e^{\frac{y-0.5}{\sigma}}\right)^{-1}, \quad (\text{D.144})$$

která charakterizuje počáteční poruchu x -ové složky rychlostního pole ve směru y , kde střední kvadratická odchylka rychlosti $\sigma = 0.01$. Do těchto počátečních podmínek vložíme periodickou poruchu y -ové složky rychlosti ve tvaru

$$V_y(x, y) = A \cos(kx) e^{-k|y-0.5|}, \quad (\text{D.145})$$

s vlnovým číslem $k = 2 \times (2\pi/L)$ a amplitudou poruchy $A = 0.05$. Význam tohoto testu spočívá také ve snadném ověření linearitu nárůstu poruchy v rané fázi průběhu úlohy, zatímco později je průběh vývoje poruchy zjevně nelineární, což vylučuje provedení analytických kvantitativních výpočtů. Navíc, „ostrost“ rozhraní mezi oběma protisměrnými toky může sloužit jako indikátor tzv. *numerické difúzivity* (tj. stabilizace algoritmu advektivního schématu pomocí druhých derivací toku) výpočetního schématu (Stone et al., 2008).

D.6 Paralelizace výpočetních algoritmů

Pro urychlení a často dokonce i pro samotné umožnění výpočtu velmi rozsáhlých (jednorozměrných nebo vícerozměrných) algoritmů (kódů) je nezbytné tyto algoritmy paralelizovat, tj.

rozdělit je na více oddílů (procesů) souběžně (paralelně) počítatelných na odpovídajícím počtu strojových procesorů. Principem paralelizace je tedy rozdělit celkovou prostorovou výpočetní oblast (viz například obrázek D.11) na množství separátních výpočetních oblastí, *ranků* (ranks). Tyto ranky lze, v závislosti na povaze problému, počítat buď zcela samostatně, nebo, pokud je nutná vzájemná „komunikace“ na styku těchto ranků (například při hydrodynamických výpočtech, kde je nutná návaznost na okrajové podmínky na hranicích celé výpočetní oblasti, jsou na hranicích ranků předávány informace o hodnotách výpočtů v sousedním ranku). Tato „meziranková komunikace“ přitom nepůsobí žádné zásadní zpomalení výpočtu.

Existuje řada specializovaných knihoven pro tvorbu paralelních algoritmů, asi nejrozšířenější z nich je knihovna MPI (Message-Passing Interface), včetně několika podtypů, vytvořená skupinou výzkumných a vývojových pracovníků z akademické a průmyslové sféry pro široké využití na paralelně řazených počítačích. Oficiální zdroj knihovny včetně programovacích manuálů je na webové stránce <http://www.mpi-forum.org/>, pro úvodní seznámení se s knihovnou i s technikami paralelního programování doporučuji skripta Lísal (2007), pro podrobnější studium manuál Pacheco (1998). Knihovna je naprogramována pro přesun dat z jednoho procesu do jiného procesu pomocí kooperativních operací v každém procesu (tzv. *point-to-point* komunikace mezi dvěma procesy). Hlavním smyslem používání metod paralelního programování je významné urychlení výpočtů jak v případě zcela samostatně pracujících ranků, tak v případech, kdy je nutná vzájemná hraniční „send and receive“ komunikace. Často je výpočet na jednom procesoru dokonce neproveditelný, v případě, že binární soubor indikuje neúměrně rozsáhlý výpočetní proces, nelze zdrojový soubor vůbec zkompileovat. Knihovna MPI je vyvinutá pro různé programovací jazyky, jako jsou Fortran, C, C++, Python a Java, mohou zde být ovšem velké dílčí rozdíly v organizaci výpočtu (například rozdílné pořadí zahrnování prostorových buněk při dvourozměrném paralelním výpočtu v případě jazyka Fortran, kdy výpočet „běží“ v rámci každého ranku nejprve ve „vertikálním“ směru, zatímco v případě jazyka C výpočet „běží“ vždy nejprve „horizontálně“). Protože se v současnosti jedná již o velmi rozsáhlou a specializovanou disciplínu, nebudeme zde detailněji popisovat techniky paralelního programování.

V rámci počítačových volně vázaných seskupení (počítačových clusterů), pracujících v České republice, lze standardně docílit současné zapojení až několik stovek procesů. Dostupnými a výkonnými počítačovými clustery například jsou:

- METACENTRUM, což je virtuální organizace, která řídí a distribuuje výpočetní infrastrukturu spolupracujících akademických a univerzitních center. Výpočetní a paměťová zařízení jsou spravována v rámci projektu „Czech National Grid Infrastructure“, který je součástí projektu „Projects of Large Infrastructure for Research, Development, and Innovations“ (LM2010005). Součástí počítačového clusteru METACENTRUM jsou: výpočetní centrum Masarykovy univerzity v Brně (centrum CERIT-SC, Loschmidt Laboratories - pracoviště Ústavu experimentální biologie PřF MU a NCBR - Národní centrum pro výzkum biomolekul, PřF MU), výpočetní centrum Západočeské univerzity v Plzni (KIV - Katedra informatiky a výpočetní techniky FAV ZČU, KMA a KKY - Katedra matematiky a Katedra kybernetiky FAV ZČU), výpočetní centrum Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích (Přírodovědecká fakulta JU), výpočetní centrum Akademie věd ČR, výpočetní centrum Katedry telekomunikační techniky FEL ČVUT v Praze, atd., zastřešující organizací je e-infrastruktura pro vědu, výzkum a vzdělávání CESNET z.s.p.o. Celkové parametry a výkon clusteru převyšují 10 000 CPU počítačových jader (desítky TB operační paměti RAM) a s paměťovou kapacitou cca 1 PB (1 063 TB) pro operační data a cca 19 PB (19 000 TB) prostoru pro ukládání dat. Oficiální webovou stránkou je <http://metavo.metacentrum.cz/>.

- Počítačový cluster ANSELM (národní superpočítačové centrum, VŠB - Technická univerzita Ostrava), který sestává z celkem 3 344 počítačových jader CPU (15 TB operační paměti RAM). Oficiální webovou stránkou je <http://www.it4i.cz/>
- V současnosti je již k dispozici uživatelům nový počítačový cluster SALOMON (národní superpočítačové centrum, VŠB - Technická univerzita Ostrava), který je dle žebříčku TOP 500 oficiálně 40. nejvýkonnějším superpočítačem na světě! Současné parametry: 24 192 jader CPU Intel Xeon (Haswell-EP), 129 TB operační paměti RAM, 52 704 jader akceleračních koprocesorů Intel Xeon Phi s 13,8 TB RAM, 2 PFLOP/s maximální výpočetní výkon, 2 PB diskové kapacity a 3 PB zálohovací páskové kapacity. Oficiální webovou stránkou je <http://www.it4i.cz/>.

Reference

- Abramowitz, M., & Stegun, I. A. 1972, Handbook of Mathematical Functions
- Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., et al. 1999, LAPACK Users' Guide, 3rd edn. (Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics)
- Arfken, G. B., & Weber, H. J. 2005, Mathematical methods for physicists 6th ed.
- Arsenin, V. J. 1977, Matematická fyzika, <https://vufind.lib.cas.cz/Record/000065882>
- Bartsch, H.-J. 2008, Matematické vzorce, <http://www.academia.cz/matematicke-vzorce.html>
- Bracewell, R. N. 2000, The Fourier transform and its applications
- Butcher, J. C. 2008, Numerical Methods for Ordinary Differential Equations
- Čermák, L., & Hlavička, R. 2006, Numerické metody
- Chandrasekhar, S. 1961, Hydrodynamic and hydromagnetic stability
- Colella, P., & Woodward, P. R. 1984, Journal of Computational Physics, 54, 174
- Dormand, J. R., & Prince, P. J. 1980, Elsevier: Journal of Computational and Applied Mathematics, 6, 19
- Děmidovič, B. P. 2003, Sběrka a cvičení z matematické analýzy, <http://www.databazeknih.cz/knihy/sbirka-a-cviceni-z-matematicke-analyzy-243708>
- Franců, J. 2011, Parciální diferenciální rovnice, skriptum, FSI VUT Brno
- Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. 2001, Fyzika
- Huber, P. J., & Ronchetti, E. M. 2009, Robust Statistics, 2nd ed., <http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-0470129905.html>
- Humlíček, J. 2009, Základní metody numerické matematiky, skriptum, MU Brno
- Jarník, V. 1974, Diferenciální počet I, II
- . 1984, Integrální počet I, II
- Jefgafrov, M. A., Bežanov, K. A., Sidorov, J. V., Fedorjuk, M. V., & Šabunin, M. I. 1976, Sběrka úloh z teorie funkcí komplexní proměnné
- Kvasnica, J. 2004, Matematický aparát fyziky, Academia, AV ČR, Praha, 2nd edn.

- Lísal, M. 2007, Paralelní programování s aplikacemi, skriptum, UJEP Ústí nad Labem, http://physics.ujep.cz/~mlisal/par_prog/pprg_esf-web.pdf
- Lenc, M. 2001, Poznámky k přednášce Elektrodynamika a teorie relativity, skriptum MU Brno
- LeVeque, R. J. 2002, Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, 1st edn.
- Musilová, J., & Musilová, P. 2006, MATEMATIKA I pro porozumění i praxi
- Pánek, P. 2001, Úvod do fyzikálních měření, skriptum, MU Brno
- Pacheco, P. S. 1998, A User's Guide to MPI, <http://www.sdsc.edu/~allans/cs260/docs/MPIusersguide.pdf>
- Plch, R. 2002, Příklady z matematické analýzy, diferenciální rovnice, skriptum, MU Brno
- Plch, R., Šarmanová, P., & Sojka, P. 2012, Integrální počet funkcí více proměnných, <http://www.math.muni.cz/~plch/main/maple/sbirka/f.pdf>
- Pospíšil, Z. 2006, Rovnice matematické fyziky, skriptum, MU Brno
- Proskuryakov, I. V. 1978, Problems in linear algebra. Translated from the Russian by George Yankovsky. Revised from the 1974 Russ. ed., <https://zbmath.org/?q=an:0394.15002>
- Příkryl, P. 1985, Numerické metody matematické analýzy
- Ráb, M. 1989, Metody řešení diferenciálních rovnic. I, Obyčejné diferenciální rovnice. 1. vyd.
- Rektorys, K. a. k. 2009, Přehled užité matematiky I.,II., <http://knihy.abz.cz/prodej/prehled-uzite-matematiky-i>
- Springel, V. 2013, Lectures on high-performance computing and numerical modeling, <http://obswww.unige.ch/lastro/conferences/sf2013/hands-on-2.pdf>
- Stone, J. M., Gardiner, T. A., Teuben, P., Hawley, J. F., & Simon, J. B. 2008, ApJS, 178, 137
- Stone, J. M., & Norman, M. L. 1992, ApJS, 80, 753
- Tenenbaum, M., & Pollard, H. 1985, Ordinary differential equations
- Thompson, M. J. 2006, An introduction to astrophysical fluid dynamics
- van Leer, B. 1977, Journal of Computational Physics, 23, 276
- van Leer, B. 1982, in Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, Vol. 170, Numerical Methods in Fluid Dynamics, ed. E. Krause, 507–512
- Vitásek, E. 1987, Numerické metody
- Young, E. C. 1993, Vector and tensor analysis, 2nd ed., <http://searchworks.stanford.edu/view/2470130>
- Zemánek, P., & Hasil, P. 2012, Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I, <https://is.muni.cz/elportal/?id=980552>
- <http://physics.muni.cz/~czudkova/PRIKLADYZ.pdf>

<http://physics.muni.cz/~chm/priklady.pdf>

<http://physics.muni.cz/~mikulas/zvc.html>

<http://www.sagemath.org/>

<http://www.salford.ac.uk/>

<http://www.wolframalpha.com/>

