$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{2}{m}}\frac{1}{\sqrt{E-U(x)}} \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{2}{m}}\frac{1}{\sqrt{E-U(x)}}\,dx$$

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$$

Pohyb je finitní (konečný periodický); perioda = doba, za kterou projde objekt 2 $\times$ pole x_m do x_M a zpět

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_{x_m(E)}^{x_M(E)} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$$

Periodu tedy můžeme určit, aniž řešíme pohybovou rovnici - řešení pohybové rovnice může být v obecnějším případě velmi obtížné

(*) HARMONICKÁ APROXIMACE (viz za příkladem (6))

PŘÍKLADY

(1) HARMONICKÝ POHYB $F(x) = -kx \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

POHYBOVÁ ROVNICE JE LINEÁRNÍ

Řešení pohybové rovnice v tomto případě umíme najít

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow$

$$x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

Jsou jím harmonické kmity s kruhovou frekvencí $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, tj. periodou

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{nezávislou na } E$$

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{E-\frac{1}{2}kx^2}} = \sqrt{\frac{2m}{E}}\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right)^2}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2m}{E}}\sqrt{\frac{2E}{k}}\arcsin\sqrt{\frac{k}{2E}}A$$

A je určeno podmínkou $\dot{x}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = E \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{2E}}A = 1$

$$T_0 = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

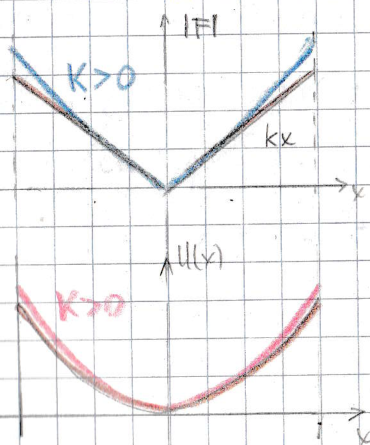
(2) ANHARMONICKÝ POHYB POHYBOVÁ ROVNICE JE NELIN.

$$F(x) = -kx + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots \sim -kx\left[1 - \frac{k_2}{k}x - \frac{k_3}{k}x^2\right]$$

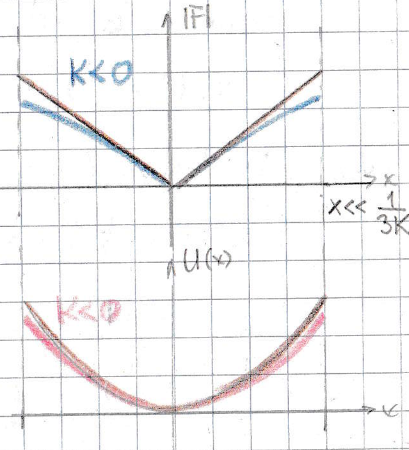
Uvažme pro jednoduchost případ, že nelinearita síly je způsobena kubickou opravou, tj. položme $k_2 = 0$. Síla je pak lichou funkcí x, potenciál sudou:

$$F(x) = -\left[1 + Kx^2\right]kx \qquad K = -k_3/k$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}kKx^4 = \left[1 + \frac{1}{2}Kx^2\right]\cdot\frac{1}{2}kx^2$$



pružina při velkých výchylkách „tuhne“



pružina při velkých výchylkách „měkne“

[pro $x = \pm\frac{1}{3K}$ má F extrém, U inflexi]

Pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x\left[1 + Kx^2\right] = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x\left[1 + Kx^2\right] = 0$$

Řešení $x(t)$ musí mít tyto vlastnosti:

(a) PERIODICITA $\quad x(t) = x(t+T) \quad ! \; T \neq T_0$

FINITNÍ POHYB Je tedy možno je hledat ve tvaru Fourierova rozvoje:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right]$$

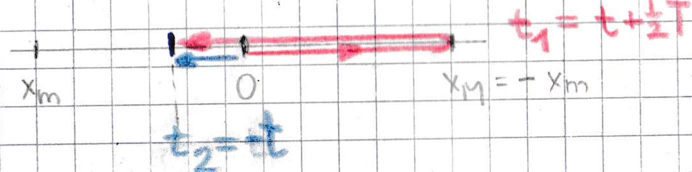
(b) Vzhledem k symetrii síly a potenciálu se jedná o kmitavý pohyb kolem nuly $\Rightarrow a_0 = 0$

(c) Zvolme poč. podmínku $\dot{x}(0) = 0$. Pak vyjde $b_n = 0$ pro $\forall n$ (v čase 0 je v krajní poloze)

$$x(t) = a_1 \cos\omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots$$

(d) Vzhledem k symetrii síly (a potenciálu) je

$$x\left(t + \tfrac{1}{2}T\right) = x(-t) = -x(t)$$



Tuto podmínku však nesplňují sudé násobky základní frekvence:

$$\cos 2\omega\left(t + \tfrac{1}{2}T\right) = \cos 2\omega t \cos \omega T - \underbrace{\sin 2\omega t \sin \omega T}_{0} = \cos 2\omega t \neq -\cos 2\omega t$$

Definitivní tedy hledáme x ve tvaru

$$x(t) = a_1\left[\cos\omega t + \varepsilon \cos 3\omega t + \dots\right] \qquad \varepsilon = \frac{a_3}{a_1} \ll 1$$

$\dots$ → zanedb.

Dosadíme do pohybové rovnice a zanedbáme členy s vyššími mocninami ε:

$$-\omega^2 a_1\left[\cos\omega t + 9\varepsilon \cos 3\omega t\right] + \omega_0^2 a_1\left[\cos\omega t + \varepsilon \cos 3\omega t\right] \cdot$$
$$\cdot \left[1 + Ka_1^2\left(\cos^2\omega t + 2\varepsilon \cos\omega t \cos 3\omega t\right)\right] = 0$$

$$-\omega^2 a_1\left[\cos\omega t + 9\varepsilon \cos 3\omega t\right] + \omega_0^2 a_1\left[\cos\omega t + \varepsilon \cos 3\omega t\right] +$$
$$+ \omega_0^2 K a_1^3 \cos^3\omega t + \omega_0^2 \underbrace{K a_1^3 \left(3\varepsilon\right.}_{K\varepsilon \dots \text{ malá veličina 2. ř.}} \left.\cos^2\omega t \cos 3\omega t\right) = 0$$

$$\cos^3\omega t = \frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t$$

Koef. u $\cos\omega t$: $\quad -\omega^2 a_1 + \omega_0^2 a_1 + \frac{3}{4}\omega_0^2 K a_1^3 = 0$

— ″ — $\cos 3\omega t$: $\quad -9\omega^2 \varepsilon a_1 + \omega_0^2 a_1 \varepsilon + \frac{1}{4}\omega_0^2 K a_1^3 = 0$

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 + \frac{3}{4}Ka_1^2\right) \Rightarrow \omega \sim \omega_0\left(1 + \frac{3}{8}Ka_1^2\right)$$

$$\varepsilon \sim \frac{1}{32}Ka_1^2$$