

Fyzikální praktikum 4

Pád plochých objektů vzduchem a jejich rotace

Úkoly

1. Předměty obdélníkového tvaru (např. papírek s rozměry 15 cm × 4 cm) při pádu často začnou rotovat a padat šikmo. Vysvětlete tento jev a svoje vysvětlení kvantitativně experimentálně potvrďte.

Pomůcky

K dispozici jsou m.j. počítač s webkamerou, jednoduchý plexisklový obdélníkový tunel s větráčkem, ve kterém lze sledovat momenty sil působící na předměty obtékané vzduchem, termický anemometr, kterým lze měřit rychlost proudění vzduchu v plexisklovém tunelu, zdroj kouře pro zviditelnění proudění a laserová dioda s cylindrickou rozptylkou pro lepší viditelnost kouře.

Následující text není návodem pro řešení této konkrétní úlohy, přináší ale některé užitečné informace o charakteru proudění vzduchu okolo různých těles.

Proudění nestlačitelné tekutiny

Pokud studujeme proudění tekutiny (kapaliny nebo plynu), jejíž rychlost je podstatně menší než rychlost zvuku v dané tekutině, můžeme tekutinu považovat za nestlačitelnou. Potom můžeme pohybovou rovnici objemového elementu tekutiny vyjádřit tzv. Navier-Stokesovou rovnicí

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}, \quad (1)$$

kde \vec{v} je rychlost tekutiny, ρ její hustota, p tlak, ν kinematická viskozita a \vec{f} je součet zrychlení od všech objemových sil (často jen tíhové zrychlení \vec{g}) působících na tekutinu.

Před hledáním přibližného řešení Navier-Stokesovy rovnice (1) pro tekutinu obtékající nějaké těleso (v našem případě tenkou rovinnou desku) je užitečné všimnout si viskózního členu $\nu \Delta \vec{v}$. Tento člen se výrazně uplatní jenom v oblastech, kde je rychlostní pole tekutiny silně nehomogenní, tj. prakticky jen v blízkosti obtékaného tělesa. Je výhodné rozdělit si proudění tekutiny do dvou oblastí: první se nazývá mezní vrstva a jde o oblast v těsném okolí obtákaného tělesa, ve které se uplatňuje viskozita tekutiny. Protože naší tekutinou je tentokrát vzduch, tedy plyn s nízkou viskozitou, bude mezní vrstva poměrně tenká a jejích vlastností se letmo dotkneme jen v závěrečné podkapitole. Druhá oblast obsahuje všechny vzduch mimo mezní vrstvu a viskozita v ní proudění prakticky neovlivňuje. V této druhé oblasti proto rovnici (1) můžeme nahradit tzv. Eulerovou rovnicí

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}, \quad (2)$$

Bernoulliho rovnice

Z Eulerovy rovnice lze přímočaře odvodit dva užitečné zákony zachování. V prvním případě využijeme rovnosti

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

a dostáváme

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \left(-\frac{p}{\rho} - gh - \frac{v^2}{2} \right), \quad (3)$$

souřadnice h označuje výšku. Pro ustálené ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$) a nevířivé ($\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$) proudění dostáváme Bernoulliho rovnici

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = \text{konst.}, \quad (4)$$

kteřá je zákonem zachování energie pro ustálené nevířivé proudění nestlačitelné neviskózní kapaliny.¹

Zákon zachování cirkulace

Při odvozování druhého zákona zachování si levou stranu rovnice (2) přepíšeme na $\frac{d\vec{v}}{dt}$ a celou rovnici zintegrujeme po uzavřené křivce:

$$\oint \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \oint \left(-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} \right) \cdot d\vec{r}. \quad (5)$$

Pro nestlačitelnou tekutinu ($\rho = \text{konst.}$) a potenciálovou objemovou sílu \vec{g} je pravá strana rovnice (5) zjevně nulová. Levou stranu můžeme rozepsat pomocí $\frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot d\vec{r}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} + \vec{v} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ na

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} - \oint \vec{v} \cdot d\vec{v} = 0.$$

Protože $\int \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{v^2}{2}$, musí být hodnota druhého kruhového integrálu nulová, takže dostáváme

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (6)$$

Kruhový integrál $\oint \vec{v} \cdot d\vec{r}$ se nazývá cirkulace a často se označuje Γ . Rovnici (6) tedy můžeme přepsat na

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \text{konst.}, \quad (7)$$

což znamená, že cirkulace podél uzavřené křivky pohybující se spolu s neviskózní tekutinou se nemění.

Protože $\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$, můžeme ze zákona zachování cirkulace zjišťovat i hodnotu rotace rychlosti. Je příjemné, že v mnoha případech, jako jsou např. homogenní vítr narážející na překážku nebo stojatý vzduch, do kterého nalétává křídlo letadla, je rychlostní pole daleko před překážkou nevířivé, tj. $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ a $\Gamma = 0$. Pak musí rychlostní pole zůstat nevířivým i při obtékání překážky, s výjimkou oblasti ovlivněné mezní vrstvou.³

¹Protože člen $\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$ v rovnici (3) je kolmý na rychlost \vec{v} , platí Bernoulliho rovnice i v ustáleném vířivém proudění, ovšem pouze pro pohyb po proudnici, tj. křivce rovnoběžné s vektorem \vec{v} .

²Zatímco parciální derivace $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ vyjadřuje změnu rychlosti plynu v jednom místě, derivace $\frac{d\vec{v}}{dt}$ vyjadřuje změnu rychlosti objemového elementu, který se pohybuje spolu s plynem a po čase dt se tedy nachází v místě vzdáleném o $\vec{v} dt$. Platí $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{d\vec{v}}{dx} + v_y \frac{d\vec{v}}{dy} + v_z \frac{d\vec{v}}{dz} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$.

³Pokud bychom ale myšlenou uzavřenou křivku vedli tak, aby obklopovala obtékanou překážku, pak hodnota cirkulace na takovéto křivce nemusí být nulová ani pro nevířivé proudění. Hodnota cirkulace by v tomto případě souvisela se vztlakovou silou působící na překážku.

Potenciálové proudění

Rychlostní potenciál

Je-li proudění nevířivé, můžeme najít tzv. rychlostní potenciál Φ , pro který platí

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ v_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (8)$$

tedy $\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi$. Vektor rychlosti a proudnice jsou kolmé na ekvipotenciální plochy ($\Phi = \text{konst.}$). Z rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (9)$$

jednoduše vyplývá $\Delta \Phi = 0$.

Proudová funkce

V případě dvourozměrného proudění (rychlost \vec{v} závisí pouze na dvou souřadnicích x, y) je užitečné definovat tzv. proudovou funkci Ψ takto:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (10)$$

Podobně jako definice $\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi$ vede automaticky ke splnění podmínky $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$, vedou rovnice (10) automaticky ke splnění podmínky nestlačitelnosti $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Podmínka $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ vede pro proudovou funkci k Laplaceově rovnici $\Delta \Psi = 0$.

Význam proudové funkce spočívá v tom, že její gradient je kolmý na směr rychlosti:

$$\vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}; \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}; -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0.$$

To ale znamená, že křivka s konstantní hodnotou proudové funkce je zároveň proudnicí. Podaří-li se tedy spočítat proudovou funkci, je pak triviální graficky zobrazit proudění právě proudnicemi, což je asi nejnázornější způsob.

Průběhy rychlostního potenciálu a proudové funkce v některých nejjednodušších případech jsou uvedeny v tabulce 1.

Proudění okolo nekonečného válce

Pokud sečteme dvourozměrné proudění homogenního toku s rychlostí $\vec{v} = (v_e; 0)$ a dipólu D (viz tab. 1), bude mít jedna z proudnic tvar přesné kružnice s poloměrem $r_0 = \sqrt{\frac{D}{2\pi v_e}}$. Díky této skutečnosti je lehké spočítat průběh potenciálového proudění okolo nekonečného válce s poloměrem r_0 vloženého do homogenního proudění jako součet proudění homogenního toku a dipólu:

$$v_x = v_e \left[1 + r_0^2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \quad (11)$$

$$v_y = -v_e r_0^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (12)$$

$$\Phi = v_e \left[x + r_0^2 \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \quad (13)$$

$$\Psi = v_e \left[y - r_0^2 \frac{y}{x^2 + y^2} \right] \quad (14)$$

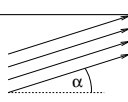
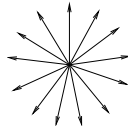
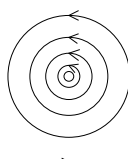
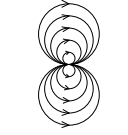
		v_x	v_y	Φ	Ψ
homogenní tok		$v \cos \alpha$	$v \sin \alpha$	$v (x \cos \alpha + y \sin \alpha)$	$v (y \cos \alpha - x \sin \alpha)$
zdroj		$\frac{xQ}{2\pi r^2}$	$\frac{yQ}{2\pi r^2}$	$\frac{Q}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$	$\frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
vír		$-\frac{y\Gamma}{2\pi r^2}$	$\frac{x\Gamma}{2\pi r^2}$	$\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$	$-\frac{\Gamma}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$
dipól		$\frac{D}{2\pi} \frac{y^2 - x^2}{r^4}$	$-\frac{D}{\pi} \frac{xy}{r^4}$	$\frac{D}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$	$-\frac{D}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$

Table 1: Veličiny popisující dvourozměrné potenciálové proudění nestlačitelné tekutiny pro několik nejjednodušších případů: homogenní tok, zdroj tekutiny, jednoduchý vír a dipól (tj. dvě nekonečně blízká místa stejně intenzivního zdroje a zániku). Q označuje tok tekutiny ze zdroje, Γ cirkulaci víru, D dipólový moment, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Žel nám ale nepostačí proudění kolem statického válce, pro analýzu obtékání složitějších tvarů musíme mít nejprve vyřešeno i proudění vzduchu okolo rotujícího válce. Úhel α , pod kterým proudí homogenní vnější tok, nastavíme tak, aby na pravém konci válce, tj. v bodě $(r_0; 0)$, vzduch proudil vodorovně. Pro rychlostní potenciál a proudovou funkci tak dostáváme

$$\Phi = v_e (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + v_e r_0^2 \frac{x_d}{x_d^2 + y_d^2} - 2v_e r_0 \sin \alpha \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (15)$$

$$\Psi = v_e (y \cos \alpha - x \sin \alpha) - v_e r_0^2 \frac{y_d}{x_d^2 + y_d^2} + v_e r_0 \sin \alpha \ln(x^2 + y^2) \quad (16)$$

$$x_d = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad (17)$$

$$y_d = y \cos \alpha - x \sin \alpha \quad (18)$$

První člen rovnic (15) a (16) vyjadřuje příspěvek homogenního vnějšího toku s rychlostí v_e , druhý člen vyjadřuje vliv dipólu otočeného o úhel α tak, aby byl správně orientován vůči vnějšímu toku, a třetí člen vyjadřuje vliv takové rotace válce, která zajistí horizontální směr rychlosti na odtoku z válce. Rovnice (17) a (18) zajišťují otočení dipólu. Příklad průběhu rychlostního potenciálu a proudové funkce spočítaný v rovnicích (15) a (16) je znázorněn na obr. 1 a 2.

Když už známe Φ nebo Ψ a tedy i rychlost proudění okolo rotujícího válce (obr. 3), můžeme pomocí Bernoulliho rovnice (4) spočítat tlak u povrchu válce (obr. 4) a následnou integrací spočítat výslednou sílu působící na válec. Dostali bychom tak pro odporovou složku síly (F_{\parallel} , ve směru \vec{v}_e) a pro vztlakovou složku síly (F_{\perp} , kolmo na \vec{v}_e) rovnice

$$F_{\parallel} = 0 \quad (19)$$

$$F_{\perp} = l \rho v_e \Gamma, \quad (20)$$

kde l je délka válce a Γ je cirkulace podél libovolné uzavřené křivky, která jednou obepíná válec. Stejně vztahy bychom dostali pro libovolný objekt, který je vystaven dvourozměrnému potenciálovému proudění.⁴

⁴V realitě každý objekt klade nenulový odpor, což je způsobeno zejména třením v mezní vrstvě a tzv. odtržením mezní vrstvy, které je zmíněno v závěrečné kapitole.

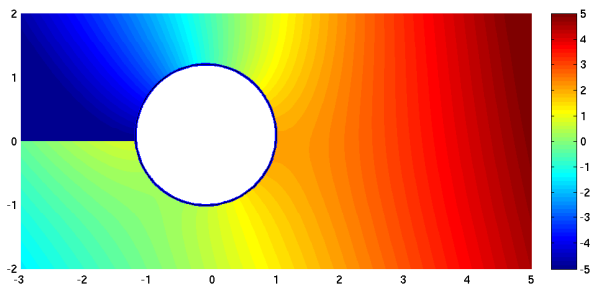


Figure 1: Rychlostní potenciál proudění okolo rotujícího válce spočítaný podle (15) pro $\alpha = 20^\circ$. Nespojnost na záporné části osy x je způsobena skokem $\arctg(y/x)$ z π na $-\pi$

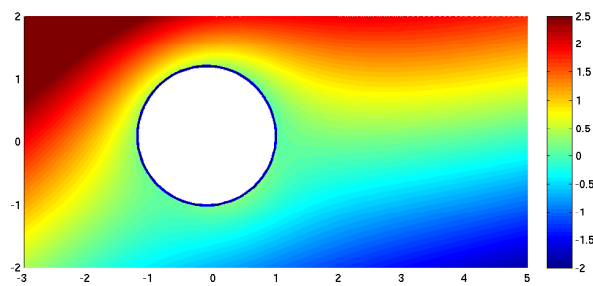


Figure 2: Proudová funkce v okolí rotujícího válce spočítaná podle (16) pro $\alpha = 20^\circ$. Křivky s konstantní hodnotou proudové funkce odpovídají proudnicím.

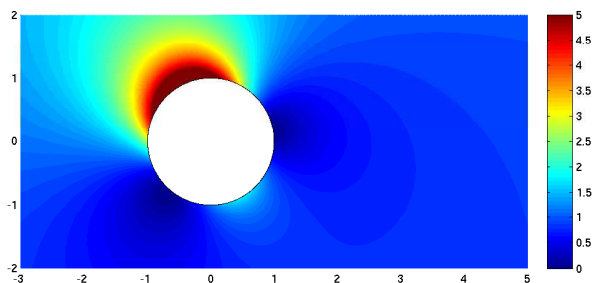


Figure 3: Velikost rychlosti tekutiny obtékající rotující válec. V místě, kde je překážka nejširší, musí být rychlost tekutiny největší, aby byl zachován celkový tok tekutiny. (V těchto místech bude podle Bernoulliho rovnice nejnižší tlak.)

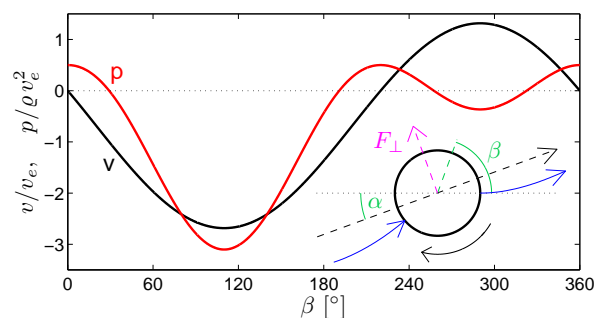


Figure 4: Rychlost a tlak vzduchu u povrchu rotujícího válce pro $\alpha = 20^\circ$. Náčrtek vpravo dole ukazuje kromě definice úhlu β také přibližný tvar proudnice, která jde po povrchu válce (modře). Přerušovaná šipka ukazuje směr \vec{v}_e a \vec{F}_\parallel .

Joukowskiho transformace

Když známe řešení potenciálového proudění okolo nekonečného válce, bylo by šikovné, kdybychom nějakou transformací tohoto řešení dokázali najít řešení Laplaceových rovnic $\Delta\Phi = 0$ nebo $\Delta\Psi = 0$ i pro jiná tělesa. Takováto transformace existuje, k jejímu popisu se ale bude hodit, když na chvíli přejdeme k popisu dvourozměrného proudění pomocí komplexních veličin: komplexní souřadnice z , komplexní rychlosti u a komplexního potenciálu F :

$$z = x + iy \quad (21)$$

$$u = v_x - iv_y \quad (22)$$

$$F = \Phi + i\Psi. \quad (23)$$

Derivace

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \lim_{z' \rightarrow z} \frac{F(z') - F(z)}{z' - z} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (24)$$

v komplexním oboru existuje, když platí

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (26)$$

z čehož automaticky vyplývá platnost Laplaceových rovnic $\Delta \Phi = 0$ a $\Delta \Psi = 0$ pro složky každé funkce F , která má v komplexním oboru derivaci. Díky (24) můžeme spočítat rychlost proudění

$$u = \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (27)$$

Stačí tedy najít takovou transformaci komplexních souřadnic, která zachová existenci derivace funkce F . Potom funkce Φ a Ψ budou i po transformaci do nových souřadnic řešenými Laplaceovy rovnice a budou tedy správným popisem potenciálového proudění. Protože se při transformaci změní i kruh (nekonečný válec) na jiné těleso, získáme už jednoduše popis potenciálového proudění okolo tohoto nového tělesa.

Hledanou transformací z původních souřadnic z_1 do nových souřadnic z_2 je tzv. Joukowskiho transformace⁵ (čti *Žukovskí*)

$$z_2 = z_1 + \frac{K^2}{z_1}. \quad (28)$$

Rozepsáním této rovnice získáme transformační vztahy

$$x_2 = \frac{x_1(x_1^2 + y_1^2 + K^2)}{x_1^2 + y_1^2} \quad (29)$$

$$y_2 = \frac{y_1(x_1^2 + y_1^2 - K^2)}{x_1^2 + y_1^2} \quad (30)$$

K je reálná konstanta, v následujících ukázkách je K zvolena jednotková.

Pro taková tělesa, jejichž tvar lze získat Joukowskiho transformací kruhu, lze tedy prostě v řešení $\Phi(x_1, y_1)$ nebo $\Psi(x_1, y_1)$ nahradit původní souřadnice x_1, y_1 použité při řešení obtékání kruhu za nové souřadnice x_2, y_2 podle (29) a (30). Obr. 5 ukazuje příklad několika tvarů, na které lze Joukowskiho transformací převést různé kruhy lišící se svým poloměrem a pozicí středu. Je vidět, že tímto postupem lze získat různé tvary včetně takových, které se velmi blíží profilům skutečných křídel a ploutví. Transformace souřadnic pro jeden z těchto tvarů (křídlo s ostrou odtokovou hranou) je zobrazena na obr. 6. Výsledný rychlostní potenciál a proudová funkce pro tento tvar jsou vykresleny v obr. 7 a 8.

⁵ Dokázat, že Joukowskiho transformace zachová existenci derivace lze tak, že Cauchy-Riemannovy podmínky (25) a (26) v nových souřadnicích rozepíšeme na

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial y_2} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \end{aligned}$$

a s využitím (25) a (26) v původních souřadnicích dostáváme jednodušší podmínky

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial y_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} &= -\frac{\partial y_2}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

I když se zdá, že množství písmenek v rovnicích (29) a (30) je nepříjemně vysoké, je jednoduché platnost nových podmínek pro Joukowskiho transformaci potvrdit.

Druhou důležitou vlastností Joukowskiho transformace je skutečnost, že transformace zachovává úhly mezi křížícími se křivkami. Díky tomu jsou i po transformaci splněny okrajové podmínky na povrchu obtékaného tělesa.

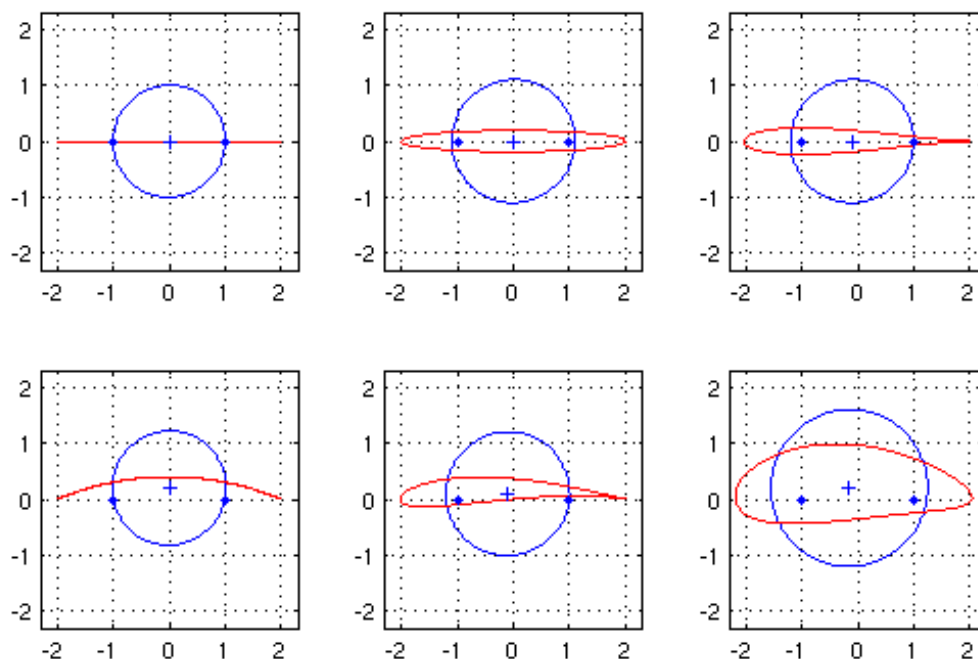


Figure 5: Příklady tvarů obtékaných těles (červeně), které lze získat Joukowskiho transformací kruhu (modře). Kruh procházející bodem $[-1; 0]$ nebo $[1; 0]$ bude transformován ve tvar s ostrou hranou, kruh se středem vychýleným mimo počátek souřadnic povede k asymetrickému tvaru. Modrým křížkem je označen střed kruhu.

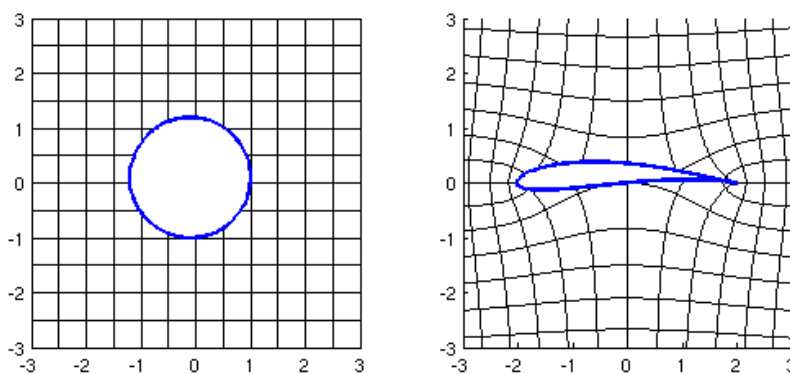


Figure 6: Joukowskiho transformace souřadnic pro okolí kruhu se středem v bodě $[-0.1; 0.1]$ a poloměrem $\sqrt{1.22}$ (shodný s obr. 5 vprostřed dole). Stojí za povšimnutí, že úhly mezi čarami zůstaly zachovány i po transformaci.

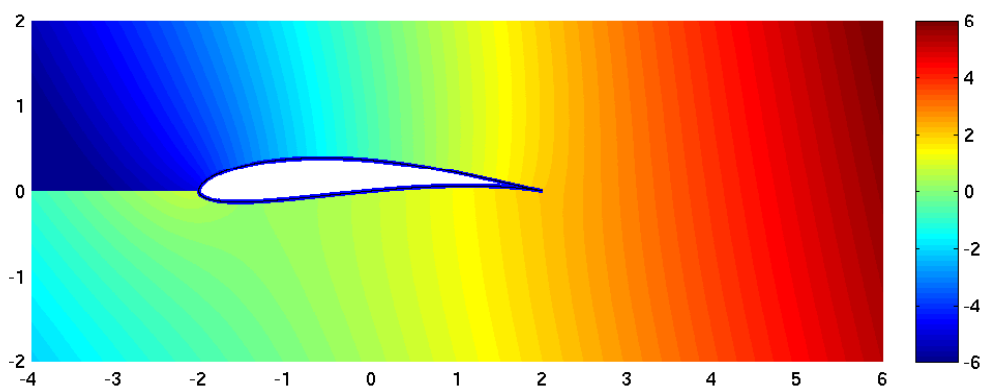


Figure 7: Rychlostní potenciál proudění okolo profilu křídla pro $\alpha = 20^\circ$.

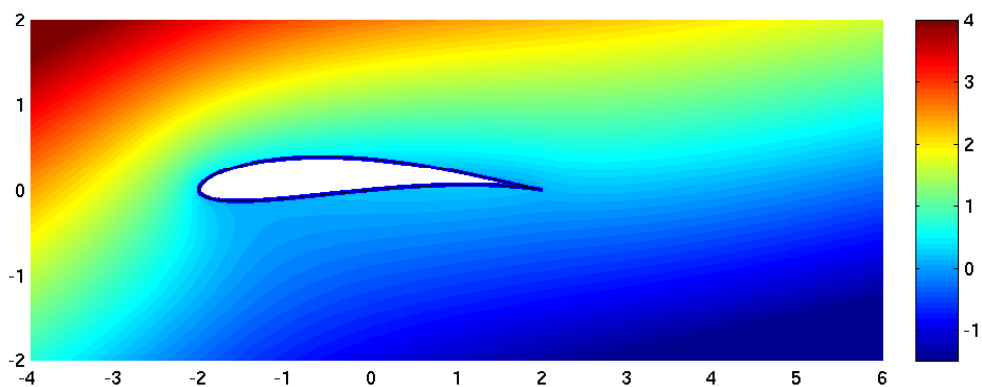


Figure 8: Proudová funkce okolo křídla pro $\alpha = 20^\circ$.

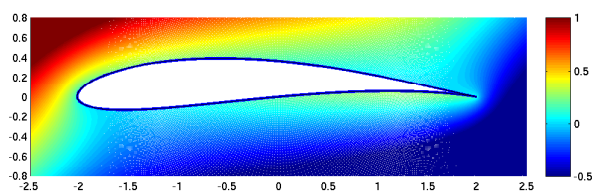


Figure 9: Proudová funkce spočítaná bez započítání Kutta-Joukowskiho podmínky. Na odtokové hraně křídla je vidět nereálné proudění okolo hrany, které by zde vedlo k nekonečně velké rychlosti. Počítáno pro $\alpha = 30^\circ$ a $\Gamma = 0$.

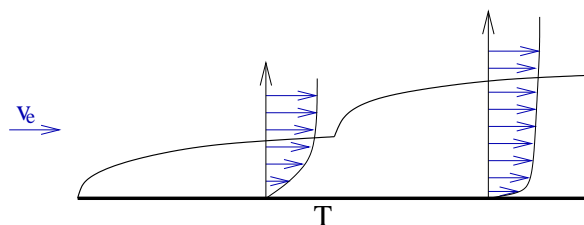


Figure 10: Tloušťka mezní vrstvy u rovné tenké desky. Bod T označuje místo, kde se laminární charakter vrstvy mění v turbulentní.

Obr. 9 ukazuje řešení Laplaceovy rovnice pro obtékání téhož křídla, do kterého ale nebyla započítána cirkulace okolo křídla/válce. Takovéto řešení ovšem vede k nekonečně velké rychlosti u odtokové hrany. Reálné proudění vytvoří takovou cirkulaci, která odstraní tuto divergenci rychlosti, jak je ukázáno na obr. 8.⁶ Toto tvrzení se nazývá Kutta-Joukowskiho podmínka a je důvodem, proč jsme do řešení (15) a (16) dodali i cirkulaci okolo válce.⁷

Mezní vrstva

Protože těsně u povrchu obtékaného tělesa je rychlost tekutiny nulová, vznikne v okolí tělesa tzv. mezní vrstva, tedy oblast, kde existuje velký gradient rychlosti. V mezní vrstvě se proto projeví i vliv viskozity tekutiny, dochází zde tedy ke tření a nemusí zde být zachována nevířivost tekutiny. Jak kapalina proudí okolo tělesa, tloušťka mezní vrstvy zpravidla roste. Na obr. 10 je načrtnut vývoj tloušťky mezní vrstvy u tenké rovné desky. Ze začátku (v levé části obr.) je charakter proudění v mezní vrstvě laminární. Když Reynoldsovo číslo $Re = v_e x / \nu$ (souřadnice x je v tomto případě vzálenost od začátku desky) dosáhne hodnoty zhruba $2 \cdot 10^5$ až 10^6 , stává se proudění v mezní vrstvě turbulentním. S tímto přechodem je spojen další nárůst tloušťky mezní vrstvy, urychlení transportních procesů ve směru kolmém k povrchu a tedy i změna profilu rychlosti v mezní vrstvě. Jak je naznačeno na obr. 10, v turbulentní mezní vrstvě je profil rychlosti těsně u povrchu strmější než v laminární vrstvě.

U zakřivených povrchů je situace složitější. Na závětrné straně podle Bernoulliho rovnice většinou roste tlak. Element tekutiny, který putuje mezní vrstvou, ale ztratil část své hybnosti díky tření a pokud chybějící hybnost nedostal od rychle proudícího plynu mimo mezní vrstvu, nemůže mít dostatečnou kinetickou energii k překonání tlakového vzrůstu a obečení celého tělesa. V tomto případě dochází k tzv. odtržení mezní vrstvy, jak je naznačeno na obr. 11, a za tělesem vzniká turbulentní oblast nazývaná úplav. Tvar profilu rychlosti proudění v mezní vrstvě při odtržení je naznačen na obr. 12. Protože u povrchu tělesa v úplavu už nemůže dojít k takovému nárůstu tlaku, jaký by vznikl v potenciálovém proudění, dojde při odtržení mezní vrstvy k poklesu tlaku za tělesem a skokovému nárůstu odporu (F_{\parallel}). Protože transport hybnosti do mezní vrstvy je v turbulentním proudění rychlejší než v proudění laminárním, je někdy možné odtržení mezní vrstvy potlačit nebo alespoň bod odtržení posunout dále dozadu tím, že se úpravou povrchu tělesa dosáhne rychlejšího přechodu charakteru proudění z laminárního do turbulentního. To je například důvod, proč se na povrchu golfových míčků při výrobě vytvářejí drobné dolíčky. U křidel letadel dochází k odtržení mezní vrstvy při příliš velkém náklonu křídla. Protože odtržení mezní vrstvy vede jak ke vzrůstu odporu, tak i k poklesu vztlaku, je tento jev nežádoucí a konstrukce křidel se jej snaží potlačit.

⁶V případě nekonečně tenké desky tato podmínka sice odstraní nekonečnou velikost rychlosti na odtokové hraně, neodstraní ale nekonečnou velikost rychlosti na náběhové hraně desky. Při výpočtu sil působících na obtékanou šikmou nekonečně tenkou desku se proto musí spočítat i limita pro sílu působící ve směru roviny desky vedoucí ke vztahu $F_{\parallel} = 0$.

⁷Protože střed kruhu pro naše křídlo leží mimo osu x , byla cirkulace ve vztazích (15) a (16) zesílena tak, aby v odtokovém bodě $[1; 0]$ měl vzduch směr kolmý na povrch kruhu.

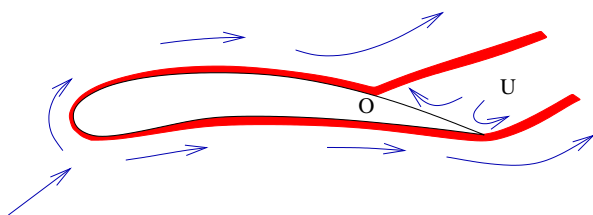


Figure 11: Odtržení mezní vrstvy (v bodě O) při velkém náklonu křídla. Oblast úplavu je označena písmenem U.

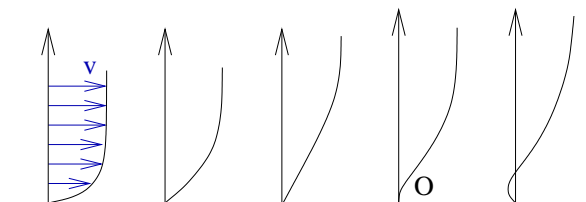


Figure 12: Profil rychlosti proudění v mezní vrstvě u zakřiveného povrchu. Proudění postupuje zleva doprava. První tři profily ukazují růst tloušťky mezní vrstvy, čtvrtý profil ukazuje situaci při odtržení (označen písmenem O) a pátý situaci za odtržením, kdy u povrchu vzduch proudí opačným směrem.