Elektronová optika a mikroskopie

Paraxiální aproximace

Tomáš Radlička

26. 10. 2020

Ústav přístrojové techniky, AV ČR, v.v.i.

Obsah

1. Rovnice trajektorie

2. Paraxiální rovnice trajektorie pro osově symetrické systémy

Rovnice trajektorie

Rovnice trajektorie jako extramála optické dráhy

Index lomu je tvaru

$$n = \left(\frac{\varphi^*}{\varphi_0*}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + x'^{\,2} + y'^{\,2}} - \sqrt{-\frac{q}{2m\varphi_0^*}} \left(A_z + A_x x' + A_y y'\right) \tag{1}$$

trajektorie dostaneme jako extremály funkcionálu optické dráhy

$$\delta \int_{z_o}^{z_i} n(\boldsymbol{q}(z), \boldsymbol{q}'(z), z)\mathrm{d}z = 0 \tag{2}$$

$$0 = \int_{z_o}^{z_i} \delta n(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}', z)\mathrm{d}z = \int_{z_o}^{z_i} \Big(n(\boldsymbol{q} + \delta\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}' + \delta\boldsymbol{q}', z) - n(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}', z)\Big)\, \mathrm{d}z = \tag{3}$$

$$= \int_{z_o}^{z_i} \left(\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{q}}\delta\boldsymbol{q} + \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{q}'}\delta\boldsymbol{q}'\right) \mathrm{d}z = \int_{z_o}^{z_i} \left(\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{q}'}\right) \delta\boldsymbol{q}\mathrm{d}z + \left[\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{q}'}\delta\boldsymbol{q}\right]_{z_o}^{z_i}$$

Rovnice trajektorie jsou Euler - Lagrangeovy rovnice

$$\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{q}'} = 0 \tag{4}$$

Rovnice trajektorie z pohybové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}}{\mathrm{d}t} = -e(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)) \tag{5}$$

Přejdeme na parametrizaci delkou oblouku trajektorie $\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}}{\mathrm{d}s} = -\frac{e}{v}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},s) - e\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \times \boldsymbol{B} \tag{6}$$

dále použijeme

$$\nabla\varphi^* = \nabla(\varphi(1 + e\varphi/2mc^2)) = \nabla\varphi(1 + e\varphi/mc^2) = \gamma\nabla\varphi = -\gamma\boldsymbol{E} \tag{7}$$

$$\nabla g = \sqrt{2em}\,\nabla\varphi^{*\,\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2em}\,\frac{\nabla\varphi^*}{\varphi^{*\,\frac{1}{2}}} = me\frac{\nabla\varphi^*}{g} = \frac{e}{\gamma v}\nabla\varphi^* \tag{8}$$

Čímž dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}) = \nabla g - e\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \times \boldsymbol{B} \tag{9}$$

Rovnice trajektorie z pohybové rovnice

Přejdeme na parametrizaci polohou podel opticke osy $\boldsymbol{r}(z) = (x(z), y(z), z)$, $\rho = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{g}{\rho}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}z}\right) = \nabla g - \frac{e}{\rho}\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{B} \tag{10}$$

třetí rovnice :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{g}{\rho}\right) = \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{e}{\rho}\boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{B}) \tag{11}$$

je závislá na prvních dvou rovnicích, ale lze ji použít pro zjednodušení rovnice trajektorie

$$\frac{g}{\rho^2}\boldsymbol{r}'' = \nabla g - \boldsymbol{r}'\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{e}{\rho}(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{B}))\boldsymbol{r}') \tag{12}$$

po několika triviálních úpravách dostaneme:

$$x'' = \frac{\rho^2}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - x'\frac{\partial g}{\partial z}\right) - \frac{e\rho^2}{g}(y'B_t - \rho B_y) \tag{13}$$

$$y'' = \frac{\rho^2}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial y} - y'\frac{\partial g}{\partial z}\right) - \frac{e\rho^2}{g}(-x'B_t + \rho B_x) \tag{14}$$

kde $B_t = (B_z + x'B_x + y'B_y)/\rho$

Rovnice trajektorie z pohybové rovnice

Nebo pomoci relativisticky korigovaného potenciálu

$$x'' = \frac{\rho^2}{2\varphi^*}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x} - x\frac{\partial\varphi^*}{\partial z}\right) - \frac{\eta\rho^2}{\sqrt{\varphi^*}}(\rho B_y - y' B_t) \tag{15}$$

$$y'' = \frac{\rho^2}{2\varphi^*}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi^*}{\partial z}\right) - \frac{\eta\rho^2}{\sqrt{\varphi^*}}(-\rho B_x + x' B_t) \tag{16}$$

Paraxiální rovnice trajektorie pro osově symetrické systémy

Paraxiální aproximace osově symetrických systémů a index lomu

- Paraxiální aproximace je linární aproximace rovnice trajektorie
- Přibližně platí v blízkosti optické osy (musí být i malé směrnice trajektorií...)
- Abychom dostali z Eulerových Lagrangeových rovnic lineární rovnici trajektorie stačí nám polynom do druhého řádu v souřadnicích x, y, x', y'

V minulé přednáše jsme odvodili elektromagnetické pole ve tvaru

$$\varphi = \Phi(z) - \frac{1}{4}\Phi''(z)r^2 + \frac{1}{64}\Phi^{(4)}(z)r^4 + \cdots \tag{17}$$

$$A_x = -\frac{1}{2}B(z)y + \frac{1}{16}B''(z)y(x^2+y^2) + \cdots \tag{18}$$

$$A_y = \frac{1}{2}B(z)x - \frac{1}{16}B''(z)x(x^2+y^2) + \cdots \tag{19}$$

Po dosazení do vztahu pro index lomu dostaneme:

$$n = \left(\frac{\Phi^*}{\Phi_0^*}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Phi^*}{\Phi_0^*}\right)^{\frac{1}{2}}(x'^2+y'^2) - \frac{\gamma\Phi''}{8\Phi^{*\frac{1}{2}}\Phi_o^{*\frac{1}{2}}}(x^2+y^2) - \frac{\eta B}{2\Phi_o^{*\frac{1}{2}}}(xy'-x'y) \tag{20}$$

Paraxialni rovnice trajektorie

Po dosazení do Eulerových Lagrangeových rovnic dostaneme:

$$x'' + \frac{\gamma \Phi'}{2\Phi^*} x' + \frac{\gamma \Phi''}{4\Phi^*} x + \frac{\eta B}{\sqrt{\Phi^*}} y' + \frac{\eta B'}{2\sqrt{\Phi^*}} y = 0 \tag{21}$$

$$y'' + \frac{\gamma \Phi'}{2\Phi^*} y' + \frac{\gamma \Phi''}{4\Phi^*} y - \frac{\eta B}{\sqrt{\Phi^*}} x' - \frac{\eta B'}{2\sqrt{\Phi^*}} x = 0 \tag{22}$$

Jedná se lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Koeficienty jsou funkcí nezávislé proměnné, rovnice nejsou separované. Pro další úpravy je vhodné přejít do komplexních souřadnic $w = x + \mathrm{i}y$:

$$w'' + \frac{\gamma \Phi'}{2\Phi^*} w' + \frac{\gamma \Phi''}{4\Phi^*} w - \mathrm{i}\frac{\eta B}{\sqrt{\Phi^*}} w' - \mathrm{i}\frac{\eta B'}{2\sqrt{\Phi^*}} w = 0 \tag{23}$$

Lze ukázat, že po transformaci $w = e^{\mathrm{i}\theta(z)}u$, kde $\theta' = \eta B/2\Phi^{*\frac{1}{2}}$ dostaneme rovnice v separovaném tvaru - Larmor rotating frame.

$$u'' + \frac{\gamma \Phi'}{2\Phi^*} u' + \frac{\gamma \Phi'' + \eta^2 B^2}{4\Phi^*} u = 0 \tag{24}$$