

A portrait of a man in 18th-century attire, likely a scholar or physicist, sitting at a desk and reading a large open book. He is wearing a dark coat over a white cravat and a white waistcoat. The background is dark and indistinct.

Historie V.

**Vývoj fyziky v rámci
mechanického obrazu světa**

Dynamika

Vladimír Štefl

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Rozvoj mechaniky

Newton stanovil *základní pojmy a zákony mechaniky*, následně se začala rozvíjet v několika směrech

I. Princip urychlujících sil (Lagrange), spočíval v *rozpracování analytického aparátu* - použití

II. Newtonova pohybového zákona pro určení pohybu hmotného bodu, soustavy hmotných bodů nebo tuhého tělesa ze zadaných sil nebo naopak určení sil ze zadaného pohybu.

Zásadní role patřila **Eulerovi**, publikoval podstatnou část svých výzkumů v řadě spisů.



Leonhard Euler 1707-1783

životopis – velký počet prací (850!) z matematiky, fyziky, astronomie, 40 knih, Petrohrad 1727 - 1741, Berlín, Petrohrad 1766 - do smrti, Eulerovy věty, rovnice, integrály, funkce, konstanty...

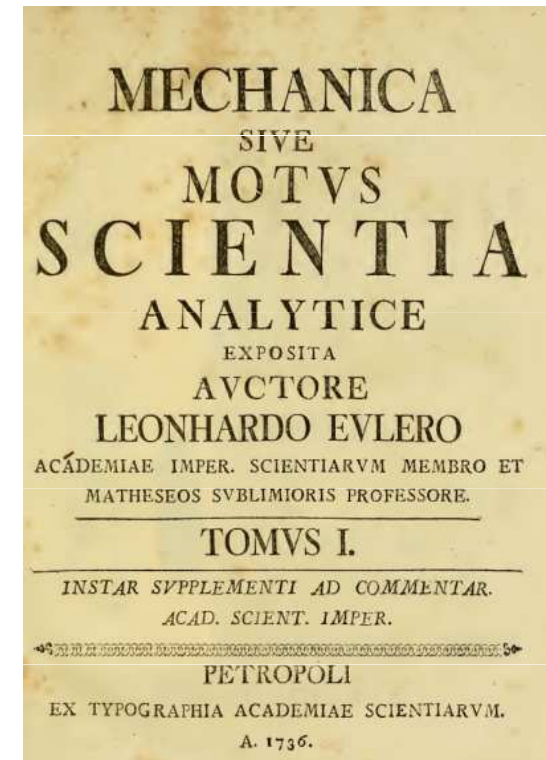
Mechanika neboli nauka o pohybu vyložena analyticky 1736

Nová teorie světla 1746

Teorie pohybu Měsíce 1753

Teorie pohybu tuhých těles 1765

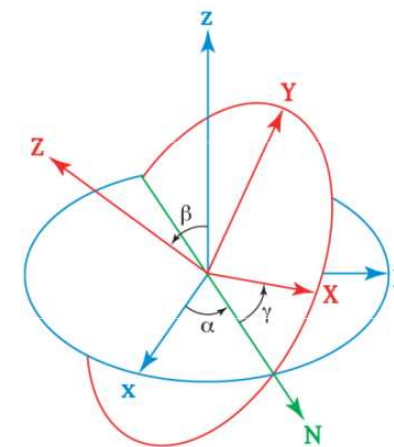
Nová teorie pohybu Měsíce 1772



Rozvoj mechaniky Euler

analytický aparát mechaniky hmotného bodu,
částice hmoty mající velmi malé rozměry, pohyb ve vakuu nebo v odporujícím prostředí, zkoumal problematiku přímočarého pohybu hmotného bodu pomocí řešení diferenciálních rovnic II. N. pohybového zákona. Při znalosti síly jako funkce souřadnice pak integrací při zadaných počátečních podmínkách lze rovnici řešit. Obecnější případy řešil různými rozklady pohybu na složky. Pomocí rozkladu sil do tří vzájemně kolmých souřadnicových os (kartézské soustavy souřadnic)

zakladatel mechaniky tuhého tělesa, zavedl rovnice jeho pohybu, rozpracoval způsoby určení polohy tělesa (Eulerovy úhly), setrvačníky...



Rozvoj mechaniky Euler

Zavedl **základní pojmy dynamiky tuhého tělesa**
(moment setrvačnosti, volná osa),
pohybu tuhého tělesa zkoumal jako složený ze dvou

a) postupného pohybu těžiště

b) rotačního pohybu kolem těžiště

získal tak šest rovnic, tři pro pohyb těžiště,
tři pro rotační pohyb kolem těžiště

použitelný pro nebeskou mechaniku, balistiku (dělové koule),
pohybu lodí...

Analytický aparát, vycházející z *principu urychlujících sil*
nevyhovovalo všem požadavkům vědy a praxe. Neřešil
rovnováhu soustavy těles, podléhající vazbám či vzájemně
interagujících, technické problémy manufakturní výroby...

Mechanika Euler

EULER'S MECHANICA VOL. 1.

Chapter Five (part d).

Translated and annotated by Ian Bruce.

page 465

PROPOSITION 97.

PROBLEM.

795. *With the sun at rest at S (Fig. 74) and with the earth T moving around it uniformly in the circle TD while the moon L is attracted to the earth T as to the sun S in the inverse square of the distances; with which put in place it is required to determine the motion of the moon, such as can be seen from the earth T.*

SOLUTION.

The distance of the earth from the sun ST is put equal to a and the force, and the force which attracts the earth to the sun is equal to $\frac{f}{a^2}$. The distance of the moon from the earth is equal to y and the distance of the moon from the sun LS is equal to z . The force, by which the moon is attracted to the earth, is equal to $\frac{h}{y^2}$; and indeed the force, by which the moon is attracted to the sun along LS , is equal to $\frac{f}{z^2}$. [Paul Stackel's note : In the formulas $\frac{f}{a^2}$ and $\frac{f}{z^2}$, the letter f does not have

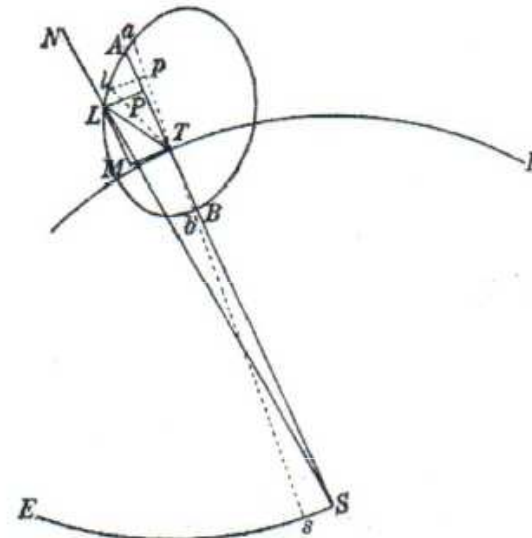


Fig. 74.

Teorie pohybu Měsíce - Euler

Teorie pohybu Měsíce 1753

teoretické výsledky z mechaniky aplikoval na komplikovaný pohyb Měsíce (problém tří těles), výklad nerovností pohybu Měsíce, **analytická teorie** maximálně využívala **pozorovací údaje**, srovnávané s matematickými výpočty, započítání poruchových vlivů

Nová teorie pohybu Měsíce 1772

zdokonalená verze propočtů tří těles, tělesa - hmotné body, barycentrum soustavy Země - Měsíc se pohybuje kolem Slunce po eliptické dráze, metodologický význam

sestavení tabulek **poloh Měsíce**, **určování zeměpisné délky** na moři, cena 300 liber od britské vlády

Teorie pohybu Měsíce Euler

Teorie pohybu Měsíce 1753

Euler neuznával okamžité působení gravitace

to, česky Teorie pohybu Měsíce odhalující všechny jeho nerovnosti s dodatkem, z roku 1753 [7]. V předmluvě díla Euler charakterizoval svoje myšlenky o aplikaci gravitační teorie na pohyb Měsíce takto: „Za posledních čtyřicet roků jsem se často pokoušel odvodit teorii pohybu Měsíce z gravitačních principů, ale setkal jsem se s tolika četnými obtížemi, že jsem musel svoji práci a další výzkumy přerušit. Problém jsem převedl k třem diferenciálním rovnicím druhého řádu, které nejen že nelze integrovat, ale i při použití přibližných metod, které musím používat, se dostávám k velkým obtížím. Nevidím tak, jak z jediné teorie gravitace lze učinit závěr, je-li vhodná pro něco užitečného...“

Rozvoj mechaniky

II. Zákony zachování v mechanice

a) *Zákon zachování hybnosti* (R. Descartes 1596-1650), slovně, nikoliv ve vektorovém tvaru

b) *Zákon zachování živé síly*, v současném chápání zákon zachování energie, ve speciálních případech formulovali Galilei, Huygens, v obecnější podobě W. G. Leibniz (1646-1716)

Descartes i Leibniz vycházeli z obecného předpokladu o pohybu v přírodě, který nemůže vznikat a zanikat, míra pohybu byla u každého jiná. *Descartes* za ni považoval *hybnost* zatímco *Leibniz* *kinetickou energii*.

Zákon použili J. Bernoulli (1667-1748) a D. Bernoulli (1700-1782) v hydrodynamice.

Joseph Luis Lagrange 1736 - 1813

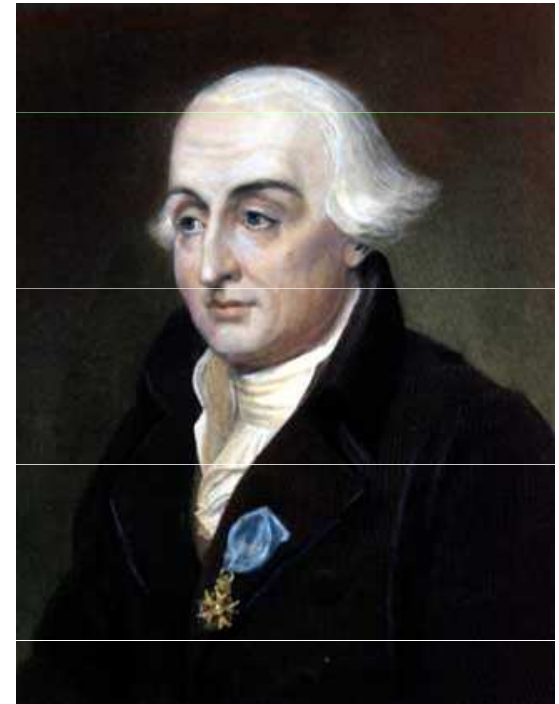
životopis,

žák Eulerův, d'Alembertův

Teorie pohybu tuhých těles 1765

Úvahy o řešení rovnic 1770 - 71

Traktát o analytické mechanice 1788



Joseph Luis Lagrange

V úvodu *Traktátu o analytické mechanice* Lagrange uvedl: „*Existuje již několik učebnic mechaniky, ale plán tohoto spisu je skutečně nový. Dal jsem si za cíl převést teorii mechaniky na **umění řešit její úlohy pomocí obecných vzorců**, jejichž jednoduché modifikace by daly všechny rovnice potřebné k řešení každé konkrétní úlohy. Doufám, že způsob, kterým jsem se toho snažil dosáhnout, je uspokojivý“ ... „Toto dílo bude užitečné i z jiného hlediska: sjednotí a ukáže z jednotného obecného pohledu různé principy, dosud používané k řešení úloh mechaniky, ukáže jejich vzájemné souvislosti a oblasti jejich použitelnosti.“ ...Milovníci analýzy s uspokojením zjistí, jak se mechanika stává její novou součástí a budou mi vděční za toto rozšíření její oblasti působení.“*

Lagrange pečlivě rozebral a vyložil na stránkách traktátu dřívější práce z oboru. Zařadil tam i definice základních mechanických pojmů (síla, hmota), které dostatečně nepropracoval. Vedle základních zákonů **statiky** - zákonu páky a skládání pohybů přiřadil **princip virtuálních posunutí** respektive **virtuální práce**, rozpracovaný bratry Bernoulliovými a d'Alambertem .

Joseph Luis Lagrange

Princip virtuálních posunutí zkoumal situaci malých posunutí, která jsou slučitelná s vazbami, jimiž je daný mechanický systém podroben.

Lagrange zapsal podmínku ve tvaru analytické rovnice a snaží se pak ukázat nejen efektivnost principu, ale především jeho univerzálnost, použitelnost pro celou statiku. Z obecného vzorce odvodil základní vlastnosti rovnovážného stavu a řešil nejdůležitější úkoly statiky.

V dynamice využil d' Alembertovu ideu o *převedení dynamiky na statiku*. Dostal ze základních rovnic statiky základní rovnici dynamiky, z nichž plyne celé mechanika. Odvodil všechny „principy mechaniky“ - zákon zachování energie, zákon pohybu těžiště, zákon ploch . Vyložil jak s rovnicí pracovat, uvážit vazby, kterým je soustava podrobena. Vhodně přešel od kartézských souřadnic k jakýmsi **zobecněným souřadnicím**, které se mohou měnit nezávisle, např. úhel vychýlení kyvadla, zeměpisná šířka a délka bodu pohybujícího se po kulové ploše apod.

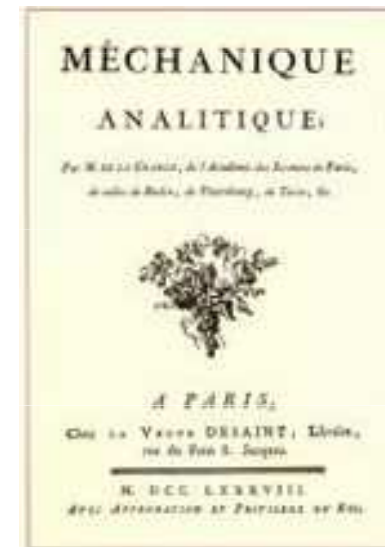
Joseph Luis Lagrange

Pro libovolné nezávislé souřadnice se dá pohybová rovnice zapsat pomocí kinetické energie T a potenciální energie V a jejich rozdílu $L = T - V$, **Lagrangeovy funkce**. Příslušné rovnice nazýváme Lagrangeovými rovnicemi II. druhu.

Rovnice I. druhu se týkají případů, kdy vazby není možné nebo žádoucí explicitně vyjádřit, tj. kdy zůstává několik rovnic svazujících souřadnice.

Vytvořil **aparát obecných souřadnic**, nahrazujících původní Newtonovy pohybové rovnice, umožňující převedení libovolné mechanické úlohy k řešení diferenciálních rovnic, Lagrangeovy souřadnice I. a II. druhu.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

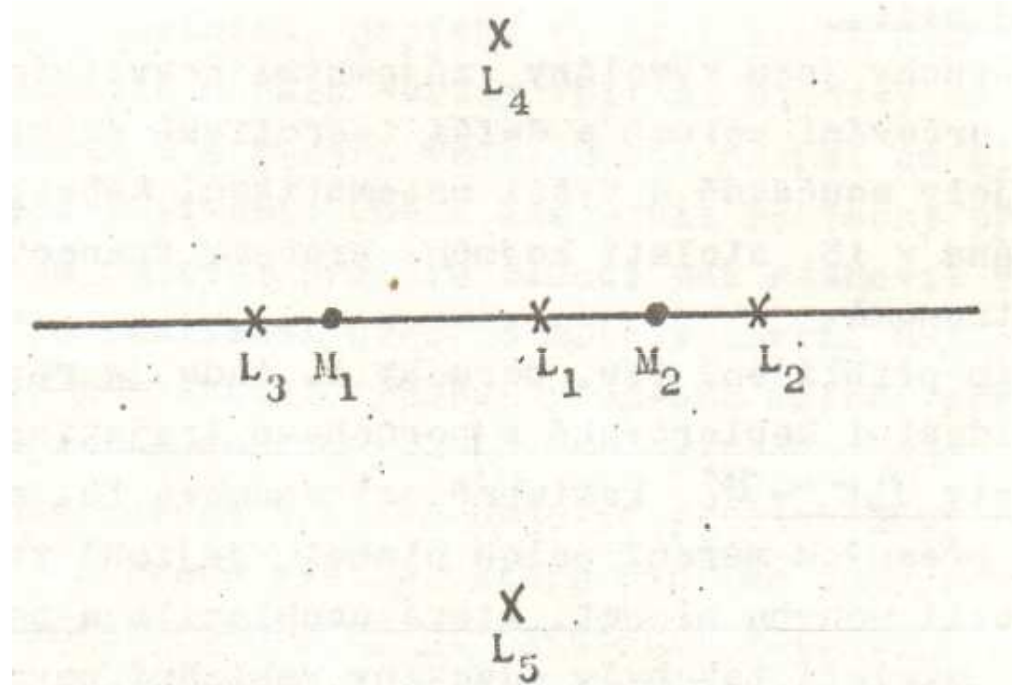
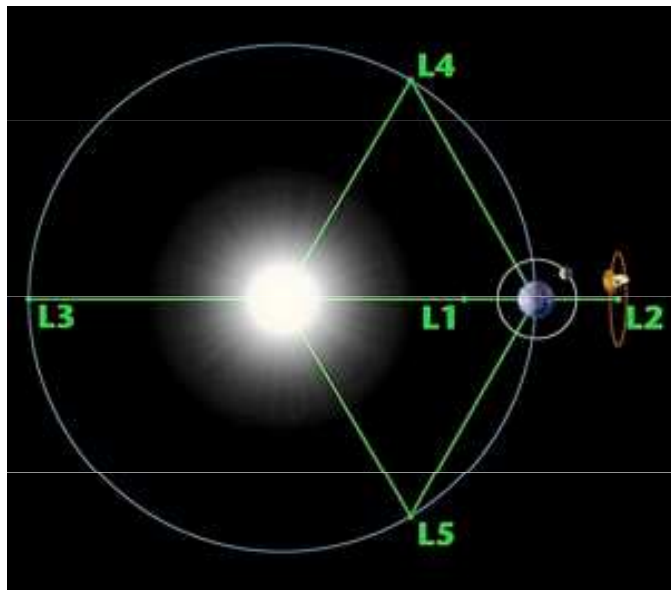


Problém tří těles

roku 1772 - Lagrange speciální řešení problému tří těles za podmínky, že dvě tělesa mají výrazně větší hmotnost než tělesa třetí a platí

a) všechna tři tělesa leží na přímce, třetí těleso se nachází v bodě L_1 , L_2 , L_3

b) všechna tři tělesa vytváří rovnostranný trojúhelník, třetí tělesa je v bodech L_4 , L_5 , -Webbův dalekohled obíhá kolem L_2



Pierre Simon de Laplace 1749 - 1827

Výklad světové soustavy 1796 - 1835

Nebeská mechanika 1799 - 1825

Analytická teorie pravděpodobnosti 1812



Pierre Simon de Laplace

Výklad světové soustavy 1796 - 1836

vyšel celkem 6krát, byl přepracováván postupně s vývojem astronomických poznatků, nesprávné hypotézy Laplace vylučoval, např. *hypotézy o původu komet*, v prvních třech vydáních předpokládal, že komety jsou relikty z doby vzniku Sluneční soustavy, ve čtvrtém vydání se domníval, že jde o mlhoviny, zachycené ve Sluneční soustavě, v dalších vydáních již tuto hypotézu opustil, obsah je rozdělen do šesti kapitol:

1. O zdánlivých pohybech nebeských těles
 2. O reálných pohybech nebeských těles
 3. O zákonech pohybu
 4. O teorii všeobecné gravitace
 5. Krátký přehled historie astronomie
 6. Úvaha o světové soustavě a budoucích úspěších astronomie
- V posledně uvedené je *Laplaceova kosmogonická hypotéza* o vzniku Sluneční soustavy z rotujícího plynu a prachu

Pierre Simon de Laplace

Nebeská mechanika 1799 - 1805 4. díly , 5. díl 1852

O obecných zákonech rovnováhy a pohybu

O zákon všeobecné gravitace a pohybech těžišť nebeských těles

O tvarech nebeských těles

O oscilacích moře a atmosféry

O pohybech nebeských těles kolem jejich vlastních těžišť

Teorie pohybu planet

Teorie Měsíce. Dodatek prezentovaný autorem u Komise pro délky
17.8.1808

Teorie měsíců Jupiteru, Saturnu a Uranu

Teorie komet

O několika tématech v systému světa.

Doplněk: O kapilárních jevech a doplněk k teorii kapilárních jevů

Stabilita Sluneční soustavy

Lagrange - Laplace

Nerovnosti pohybu Saturnu - historie

Výklad nerovností pohybu Jupiteru a Saturnu, stabilita sluneční soustavy – důležitý problém nebeské mechaniky ☼ v historii →

Antika: Písemně zachycené pozorovací údaje, včetně opravy na precesi – **Almagest**: střední denní hodnota pohybu Jupiteru na $n_J = 299,104581''$ a Saturnu $n_S = 120,422528''$.

Novověká astronomická pozorování především v 18. století - upřesnění hodnot středních denních pohybů, pro Jupiter $n_J = 299,128361''$ a Saturn $n_S = 120,454645''$. Rozdíl novověkých a antických údajů je u Jupiteru $\Delta n_J = 0,02378''$ a Saturnu $\Delta n_S = 0,03212''$. Pro současné hodnoty platí $n_J : n_S \approx 2,483328 \approx 5 : 2$.

Nerovnosti pohybu Saturnu - Kepler

roku 1625 **Johannes Kepler 1571 - 1630**
zpracoval pozorování planet

Johanna Regiomontanuse 1436 - 1476

Bernarda Walthera 1430 - 1504



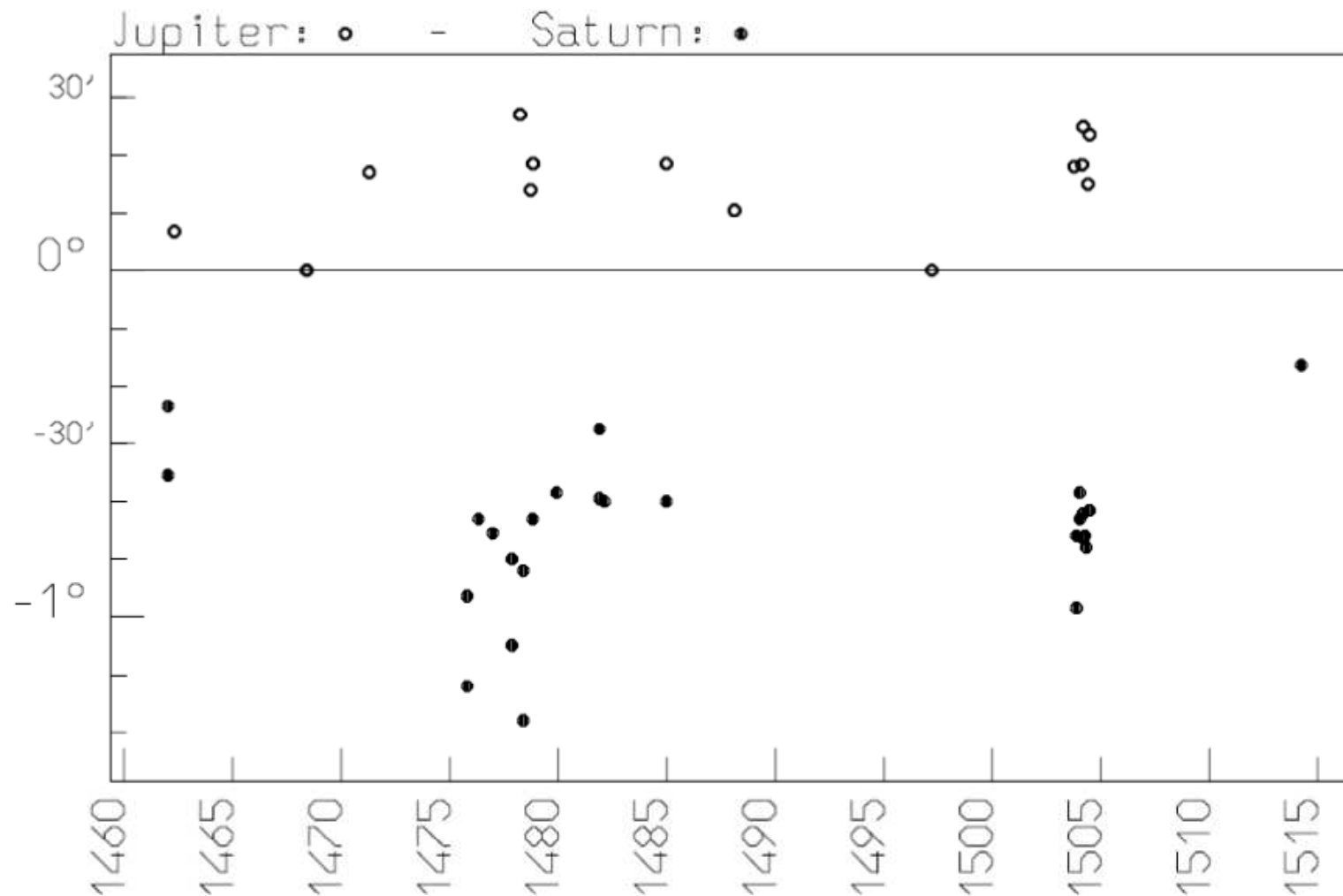
Pozorovaný pohyb Jupiteru a Saturnu **neodpovídá úplně teorii pohybu po eliptické dráze**, podrobná analýza jevu *. Pozorované odchylky poloh planet dosahují až 28' u Jupiteru a 48' u Saturnu. Poruchy výraznější u Saturnu, má přibližně 3krát menší hmotnost než Jupiter.

*Giorgilli, A.: A Kepler's note on secular inequalities. Milano 2011.

Nerovnosti pohybu Saturnu - Kepler

Rozdíl ekliptikálních délek Jupiteru a Saturnu: **Kepler - Rudolfské tabulky 1627** x polohy stanovené Regiomontanusem a Waltherem.

Graf: **zrychlování pohybu Jupiteru, zpomalování Saturnu.**



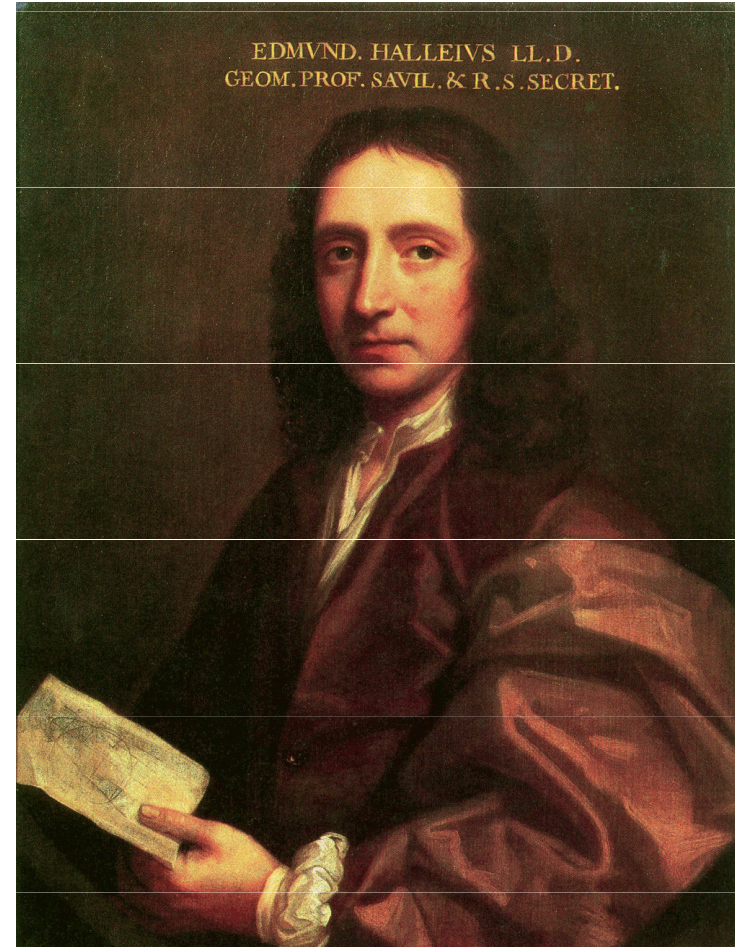
Nerovnosti pohybu Saturnu - Halley

Edmond Halley 1656 - 1742 roku 1695:

potvrzení Keplerových závěrů, výpočet zrychlení středního pohybu Jupiteru a zpomalení středního pohybu Saturnu.

Poloměr dráhy Jupiteru se zmenšuje, poloměr dráhy Saturnu zvětšuje.

- narůstání těchto jevů →
narušení stability Sluneční soustavy.



Halley na základě svých pozorování → planetární tabulky, vyšly souhrnně až posmrtně roku 1749.

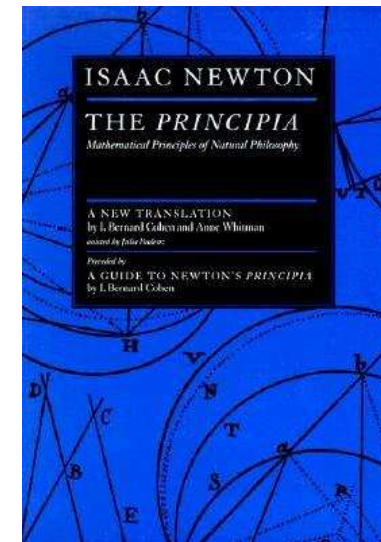
Nerovnosti pohybu Saturnu - Newton

Gravitační působení Jupiteru a Saturnu - **Isaac Newton 1643-1727** promýšlel přibližně od roku 1684, kdy v prosinci v dopisu Flamsteedovi doplnil popis pohybu Saturnu po eliptické dráze: „*ohnisko jeho dráhy se nenachází ve středu Slunce nýbrž v hmotném středu soustavy Slunce - Jupiter*“, viz Principie*, věta XIII. poučky XIII.

Výpočet gravitační interakce poruchového působení planet - nutná znalost poměru hmotností planet a Slunce. U Země, Jupiteru a Saturnu Newton tento poměr propočítal z velikostí oběžných dob a vzdáleností tehdy známých měsíců od planet, III. Keplerův zákon v přesném tvaru, viz Principie *.

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M + m)}{4\pi^2} \approx \frac{GM}{4\pi^2}$$

* Cohen, I. B.: *The Principia - Mathematical Principles of Natural Philosophy*. University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London 1989



Nerovnosti pohybu Saturnu - Newton

V srpnu 1691 Newton dopis Flamsteedovi - žádost o pozorovací údaje o **polohách Jupiteru a Saturnu** v následujících čtyřech až pěti rocích. Zřejmě k ověřování výpočtů vzájemných poruch obou planet. Flamsteed v prosinci roku 1694 poslal Newtonovi pozorované polohy Saturnu z let 1691 - 1694, včetně jejich rozdílů od poloh v Rudolfínských tabulkách.

Vzájemné gravitační působení planet v Principiích v I. knize, ve větě LXVI: *„působení planet jedné na druhou ačkoliv je velmi malé a může být zanedbáváno, ruší pohyb planet po elipsách...„působení Jupiteru na Saturn nemůže být zanedbáváno“* ... Zřetelná myšlenka, že obě planety se ve svém pohybu ovlivňují.

Podrobněji v Principiích v III. knize, větě XIII., poučce XIII.: *„Planety se pohybují po elipsách, majících svoje ohnisko ve středu Slunce, rádius vektory vztahující se k tomuto středu opisují plochy úměrné času“*

Pohyb Saturnu v Principiích

Avšak působení Jupiteru na Saturn nesmíme zanedbávat, protože přitažlivost k Jupiteru se má (při stejných vzdálenostech) k přitažlivosti Slunce jako 1 : 1 067, tudíž při konjunkcích Jupiteru a Saturnu, když je jeho vzdálenost k Jupiteru vzhledem ke vzdálenosti k Slunci jako 4 : 9, přitažlivost Saturnu k Jupiteru bude k jeho přitažlivosti ke Slunci jako 81 ku 16 x 1067 nebo zaokrouhleně jako 1 ku 211#. Porucha dráhy Saturnu při každé jeho konjunkci s Jupiterem je tak znatelná, že vyvolává bezradnost astronomů. Při přihlédnutí k poloze planety při těchto konjunkcích, její výstřednost se jednou zvyšuje, podruhé zmenšuje, afélium se jednou přesouvá vpřed, podruhé ustupuje vzad, ☽ střední pohyb jeden za druhým se jednou zrychluje podruhé zpomaluje.*

Štefl, V.: K Newtonově a Eulerově interpretaci nerovností pohybu Jupiteru a Saturnu. Čs. čas. fyz. **63**, (2013), č. 3, p. 168 - 174.

* pozorovatelé zjistili rozdílné polohy od tabulkových odvozených z Keplerovy teorie.

☽ naznačení periodických změn výstřednosti respektive přímky apsid.

Pohyb Saturnu - Optika

Newton - pochybnosti o stabilitě Sluneční soustavy, interakce planet a také **komet**, v jeho čase neznámých hmotností, odpor éteru...

B O O K III. 325

Qu. 21. Is not this Medium much rarer within the dense Bodies of the Sun, Stars, Planets and Comets, than in the empty celestial Spaces between them? And in passing from them to great distances, doth it not grow denser and denser perpetually, and thereby cause the gravity of those great Bodies towards one another, and of their parts towards the Bodies; every Body endeavouring to go from the denser parts of the Medium towards the rarer? For if this Medium be rarer within the Sun's Body than at its Surface, and rarer there than at the hundredth part of an Inch from its Body, and rarer there than at the fiftieth part of an Inch from its Body, and rarer there than at the Orb of *Saturn*; I see no reason why the Increase of density should stop any where, and not rather be continued through all distances from the Sun to *Saturn*, and beyond. And though this Increase of density may at great distances be exceeding slow, yet if the elastick force of this Medium be exceeding great, it may suffice to impel Bodies from the denser parts of the Medium towards the rarer, with all that power which we call Gravity. And that the elastick force of this Medium is exceeding great, may be gather'd from the swiftness of its Vibrations.

B O O K III. 327

exceedingly more able to press upon gross Bodies, by endeavouring to expand it self.

Qu. 22. May not Planets and Comets, and all gross Bodies, perform their Motions more freely, and with less resistance in this Æthereal Medium than in any Fluid, which fills all Space adequately without leaving any Pores, and by consequence is much denser than Quick-silver or Gold? And may not its resistance be so small, as to be inconsiderable? For instance; If this Æther (for so I will call it) should be supposed 700000 times more elastick than our Air, and above 700000 times more rare; its resistance would be above 600000000 times less than that of Water. And so small a resistance would scarce make any sensible alteration in the Motions of the Planets in ten thousand Years. If any one would ask how a Medium can be so rare, let him tell me how the Air, in the upper parts of the Atmosphere, can be above an hundred thousand thousand times rarer than Gold. Let him

Newton, I.: Opticks: or, a treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light. London, 1730. Kniha III., p. 325, 327.

Výměna energií Jupiter \leftrightarrow Saturn konjunkce

Před konjunkcí: Jupiter „dohání“ Saturn, zpomaluje ho \rightarrow úbytek kinetické energie jeho planetárního pohybu \rightarrow přechod na nižší oběžnou dráhu \rightarrow **zvýšení rychlosti středního pohybu Saturnu.**

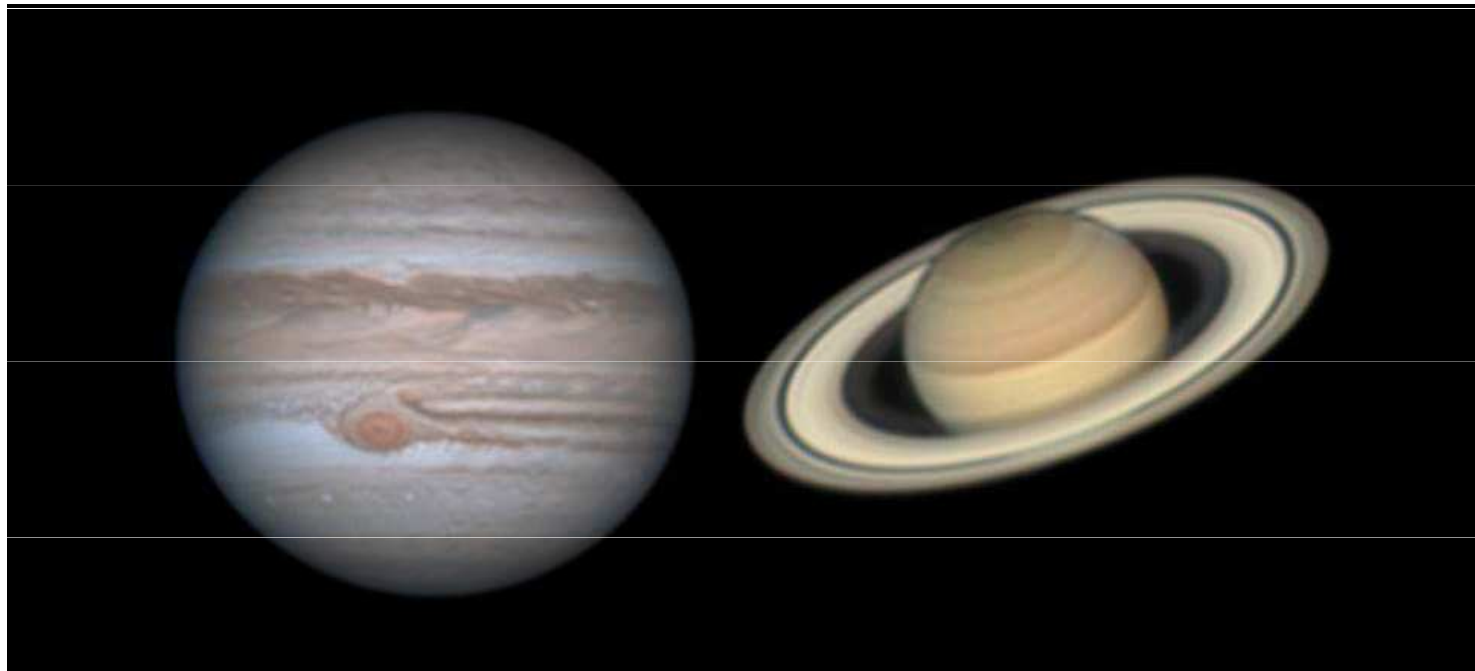
Po konjunkci: jev opačný \rightarrow přechod na vyšší oběžnou dráhu \rightarrow **zpomalení rychlosti středního pohybu Saturnu.**

Při stejné velikosti gravitační interakce obou planet před a po konjunkci - výsledný efekt nulový. **Úplně přesně nikoliv**, dráhy planet nejsou soustředné. Pokud ke konjunkci dochází v poloze v prostoru, kde dráhy obou planet k sobě konvergují, v perihéliu Saturnovy dráhy a v aféliu Jupiterovy dráhy, je jev po konjunkci větší než před ní. Výsledek - zvětšování poloměru Saturnovy dráhy a zmenšování velikosti jeho středního pohybu. Při konjunkci v prostoru, kdy dráhy obou planet k sobě divergují, je výsledkem pokles poloměru Saturnovy dráhy a zvýšení rychlosti jeho středního pohybu.

Důsledkem jsou celková **nepatrná zpomalování nebo zrychlování pohybu Saturnu**, rozeznatelná za větší časové intervaly.

Stabilita Sluneční soustavy

astronomové objevili v pohybu Jupiteru a Saturnu poruchy, velmi pomalé změny jejich střední rychlosti, příčina - oběžné doby Jupiteru a Saturnu kolem Slunce jsou přibližně 12 roků a 30 roků, každých zhruba 20 roků dochází ke konjunkci, při níž se zesiluje gravitační interakce, v průběhu konjunkce dochází k výměně kinetických energií planet, před ní Jupiter „dohání“ Saturn, zpomaluje ho, nastává úbytek jeho kinetické energie – přechází na nižší oběžnou dráhu



Pohyb Saturnu - Euler

Pařížská akademie vypsala cenu \approx r. 1748 na
*...,teorii Jupiteru a Saturnu vysvětlující nerovnosti těchto planet,
majících příčinu v jejich pohybech, speciálně v době konjunkce“ ...*

Leonhard Euler 1703 - 1783

geometrická metoda \rightarrow analytická.

\approx do r. 1750 - pochybnosti o gravitačním zákonu,
domněnka - síly mají původ v neprostupnosti
hmoty, **síly kontaktní.**

Alexis Claud Clairaut 1713 - 1765

r. 1752 souhlas teoreticky vypočítané a
pozorované hodnoty posuvu perigea dráhy Měsíce.

V * Euler vycházel z gravitačního zákona, odvodil poruchy Saturnu
způsobené Jupiterem, soutěž \rightarrow \approx cena: **za inovativní přístup k výpočtu
planetárních poruch**, nikoliv za úplný výklad zpomalování Saturnu a
zrychlování Jupiteru .

decelerace Saturnu /akceleraci Jupiteru = $7/3 \rightarrow$ Laplace 1784!



Pohyb Měsíce

Teorie pohybu Měsíce

1. Newton (1643 - 1727)

problém tří těles, výpočet poruchového působení Slunce, neobjevil však střední pohyb perigea, jeho posuv, vyřešil hodastu zkrát mezi měřičem

A. C. Clairaut (1713 - 1765)

$$r d^2 \varphi + 2 dr d\varphi = F_k dt^2 \quad \text{slůžky } \perp \text{ na radius}$$

$$r d\varphi^2 - d^2 r = F_r dt^2 \quad \text{slůžky ve směru rád.}$$

$$r = \frac{k}{1 + e \cos \varphi}$$

pohyb perigea... rotace elipsy $c = 1 - \frac{3}{4} m^2$

Clairaut: $m = 0,0748 \rightarrow 1 - c = 0,00420$

poruchou: $1 - c = 0,00845$

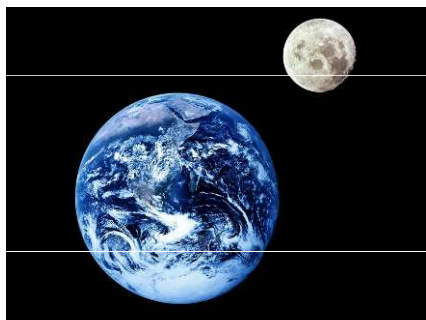
odpověď $F = G \frac{M_1 M_2}{r^2} + \alpha \frac{M_1 M_2}{r^3}$, $n > 2$
 α ... velmi malé

podlejší výpočet

$$c = 1 - \frac{3}{4} m^2 - \frac{225}{32} m^3 - \frac{4071}{128} m^4 - \dots$$

dosažení $m = \frac{n'}{n} = \frac{\text{str. den. pohyb } S}{\text{str. den. pohyb } M} \approx \frac{3}{40}$

$1 - c = 0,007139$



Euler - poruchové síly

Souběžně Euler zkoumal, zda střední pohyby planet se podrobují **sekulárním změnám**, (v jeho době chápáno neperiodickým či s dlouhodobou periodou).

Na soustavu Slunce – Jupiter – Saturn, Euler aplikoval II. Newtonův pohybový zákon v pravoúhlých souřadnicích

$$2 \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{X}{m_{Sa}} \quad 2 \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{Y}{m_{Sa}} \quad 2 \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{Z}{m_{Sa}}$$

m_{Sa} je hmotnost rušené planety - Saturnu, X , Y , Z jsou složky síly působící na Saturn ve směru souřadných os. Koeficient 2 - Eulerova volba jednotek (zrychlení volného pádu na zemském povrchu položil za jednotkové pro vyjádření urychlujících sil, místo $v^2 = 2gh$ používal $v^2 = h$).

#Euler, L.: Recherches sur le mouvement des corps célestes en générale. Mémoires de l'Académie des Science de Berlin **3** (1747), p. 93 - 143.

Eulerovy výsledky

Metoda variace dráhových elementů - propočítání jejich změn, nikoliv odchylek v poloze planet.

- rovnice pro malé šířkové odchylky Saturnu od dráhové roviny Jupiteru ve směru $z = r \sin(\phi - \Omega) \operatorname{tgi}$, **délku výstupného uzlu Ω , sklon dráhy i .**
- při bezporuchové eliptické dráze Ω a i konstantní, proměnnost vyvolána poruchami.
- velmi pozvolné změny Ω a i , \rightarrow matematické zjednodušení řešení.
- vypočítané výsledky neodpovídaly úplně polohám Saturnu, nepřesnosti 8' - 9'.

První analytické určení změn dráhových elementů: při omezení propočtu na několik prvních členů řad vyjadřujících změny dráhových elementů –, délky výstupného uzlu Ω , sklonu dráhy i .

Euler \rightarrow poruchy dlouhodobé.

Pierre Simon de Laplace



- * Výpočet aproximací vyšších řádů → střední pohyby obou planet imunní k dlouhodobým změnám.
- * Poslední část spisu - odvození sekulárních nerovností dráhových elementů planet.

*P. S. Laplace: „Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes“, Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, année 1772, p. 325 - 366.

Pierre Simon de Laplace

Laplace*: „Síly vyvolávající poruchy od eliptického pohybu, zavedené ve výrazech pro r , dv/dt a s , v předcházející kapitole, čas t přes sinus a cosinus ve tvaru kruhového oblouku narůstajícího neomezeně... Jelikož tyto změny jsou vytvářeny velmi pomalým způsobem, bývají proto nazývány termínem sekulární nerovnosti.“

CHAPITRE VII.

Des inégalités séculaires des mouvemens célestes.

53. LES forces perturbatrices du mouvement elliptique introduisent dans les expressions de r , $\frac{dv}{dt}$ et s , du chapitre précédent, le temps t , hors des signes *sinus* et *cosinus*, ou sous la forme d'arcs de cercle qui en croissant indéfiniment, doivent à la longue, rendre ces expressions fantives; il est donc essentiel de faire disparaître ces arcs, et d'avoir les fonctions qui les produisent par leur développement en série. Nous avons donné pour cet objet, dans le Chapitre V, une méthode générale de laquelle il résulte que ces arcs naissent des variations du mouvement elliptique, qui sont alors fonctions du temps. Ces variations s'exécutant avec une grande lenteur, elles ont été désignées sous le nom d'*inégalités séculaires*.

***současnost - sekulární nerovnosti
neperiodické, narůstající s časem***

*P. S. Laplace: *Traité de Mécanique Céleste*, vol. 2 Duprat, Paris 1799.

Pierre Simon de Laplace - gravitace

SUR LE PRINCIPE

DE LA

GRAVITATION UNIVERSELLE

ET SUR LES

INÉGALITÉS SÉCULAIRES DES PLANÈTES QUI EN DÉPENDENT (*).

Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris (Savants étrangers),
année 1773, t. VII, 1776.

DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE.

213

2° La force attractive d'un corps est le résultat de l'attraction de chacune des parties qui le composent.

3° Cette force se propage dans un instant, du corps attirant à celui qu'il attire.

4° Elle agit de la même manière sur les corps en repos et en mouvement.

1. *Přitažlivost je přímo úměrná hmotnosti tělesa a nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti.*
2. *Působící síla tělesa je výslednicí interakcí všech jeho částí.*
3. *Síla se šíří okamžitě.*
4. *Přitažlivost je stejná u tělesa v klidu jako v pohybu.*

P. S. Laplace: „Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent“, Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, année 1773, p. 201 - 275.

Lagrange - vztah

Po dosazení a úpravě derivací podle času t získal Lagrange **vztah**

$$d \frac{1}{2a} = \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{F}$$

**„Vida, obdrželi jsme velmi jednoduchý vztah pro určování změn velké poloosy $2a$ eliptické dráhy tělesa podrobeného působení centrální síly a poruchových sil X, Y, Z .“*

Změny velké poloosy $2a$ eliptické dráhy rušené planety vyvolány gravitačním působením rušících planet.

*J. L. Lagrange: Sur l'altération des moyens mouvements des planètes, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles - Lettres de Berlin, année 1776, p. 255 - 271.

Lagrangeův - vztah

$$d \frac{1}{2a} = \frac{X dx + Y dy + Z dz}{F}$$

8. Voilà donc, comme l'on voit, une formule fort simple pour déterminer les altérations du grand axe $2a$ de l'orbite elliptique d'un corps animé par une force centrale $\frac{F}{r^2}$, et dérangé par des forces perturbatrices quelconques X, Y, Z .

Pour appliquer cette formule à la solution de la question qui fait l'objet de ce Mémoire, il est clair qu'il faut commencer par déterminer les forces

*J. L. Lagrange: Sur l'altération des moyens mouvements des planètes, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles - Lettres de Berlin, année 1776, p. 255 - 271.

Laplace: pohyb Saturn \leftrightarrow Jupiter

Z integrálu živých sil, při zanedbání všech členů druhého a třetího řádu v hmotnostech m^2 a m^3 , které buď periodické nebo konstantní \rightarrow vztah

$$\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \dots = konst._1$$

kde $m, m', m'' \dots$ jsou hmotnosti planet, $a, a', a'' \dots$ velikosti velkých poloos jejich drah. Větší hmotnosti Jupiteru a Saturnu oproti ostatním planetám, proto

$$\frac{m_J}{a_J} + \frac{m_S}{a_S} = konst._2$$

\rightarrow zmenšování velké poloosy Jupiterovy dráhy \rightarrow zvětšování velké poloosy dráhy Saturnu. Necht' n_J, n_S označují střední pohyby Jupiteru a Saturnu, při vyjádření III. Keplerova zákona

$$a_J^{-1} = n_J^{\frac{2}{3}} \qquad a_S^{-1} = n_S^{\frac{2}{3}} \qquad m_J n_J^{\frac{2}{3}} + m_S n_S^{\frac{2}{3}} = konst._3$$

*P. S. Laplace: Théorie de Jupiter et de Saturne. Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 1785, p. 95 - 207.

Laplace:

decelerace Saturnu, akcelerace Jupiteru

Vzájemná interakce obou planet ovlivňuje střední pohyb, což popsal vztahem

$$\delta n_S = - \frac{m_J}{m_S} \left(\frac{n_S}{n_J} \right)^{\frac{1}{3}} \delta n_J$$

respektive
$$\delta n_S = - \frac{m_J}{m_S} \left(\frac{a_J}{a_S} \right)^{\frac{1}{2}} \delta n_J$$

Použité hodnoty $m_J = \frac{1}{1067,2}$ $m_S = \frac{1}{3358,4}$ $a_J = 5,20279 \text{ au}$ $a_S = 9,53877 \text{ au}$
dosazení ke vztahu

$$\delta n_S = -2,33 \delta n_J$$

Poměr **decelerace Saturnu k akceleraci Jupiteru 7 : 3**, viz věta v textu spisu str. 52*, poměr odpovídal zjištěným historickým hodnotám.

*P. S. Laplace: Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 1784, p. 49 - 92.

Laplace - úvaha o poruchách

THÉORIE DE JUPITER ET DE SATURNE.

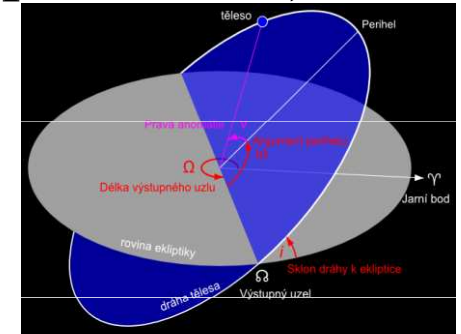
Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, année 1785: 1788.

Ve spisu * Laplace konstatuje: „*Je tudíž velmi pravděpodobné, že pozorované změny v pohybech Jupiteru a Saturnu jsou výsledkem jejich vzájemných interakcí a je prokázáno, že toto působení může vyvolávat nerovnosti, které buď nepřetržitě narůstají nebo se vyznačují dlouhými periodami ...*“ „...,, je přirozené se domnívat, že existují teorie a velký počet nerovností tohoto typu, jejichž perioda je velmi dlouhá.“

*P. S. Laplace: Théorie de Jupiter et de Saturne. Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 1785, p. 95 - 207.

Laplace - stabilita Sluneční soustavy

1. Pozorované zrychlení Jupiteru, zpomalení Saturnu - výsledek vzájemných poruch obou planet. Dlouhoperiodické variace - změny rychlosti středního pohybu, (vyjadřované lineární aproximací), perioda přibližně 900 r.



2. Planetární dráhy vykonávají **dva pohyby**
 - **precesi perihélia** (pomalá rotace dráhy v rovině)
 - **precesi uzlové přímky** (rotace dráhové roviny v prostoru).

3. Vývoj dráhových elementů planet vyjádřen prostřednictvím dvou vět, zachycující kinematické vlastnosti planet sluneční soustavy.

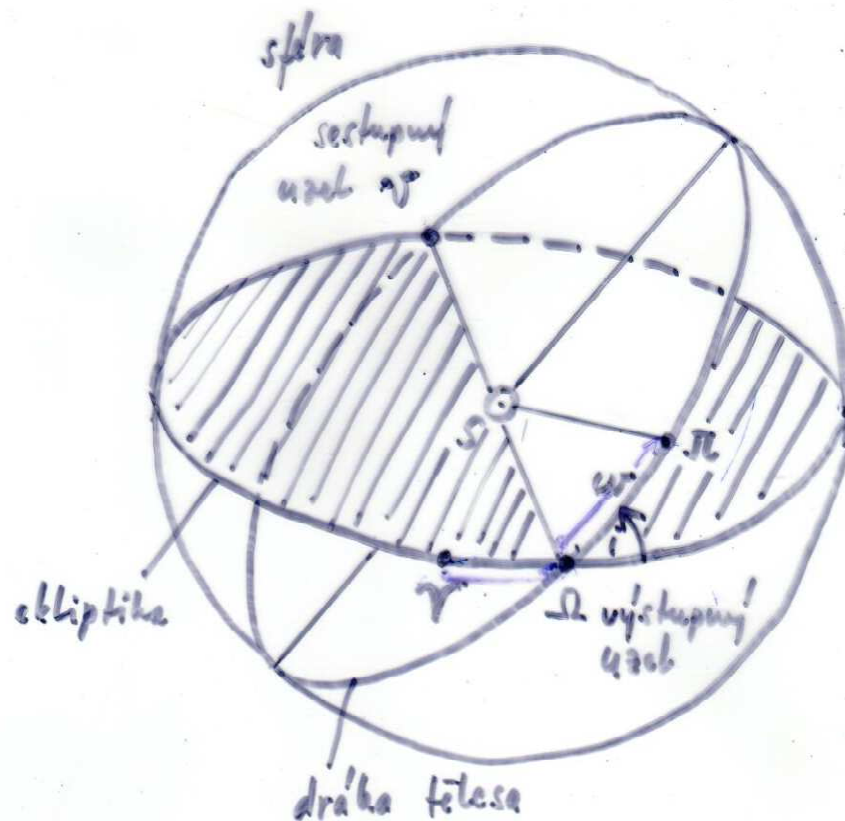
$$\sum_i m_i \sqrt{a_i} e_i^2 = konst.4 \quad \sum_i m_i \sqrt{a_i} i_i^2 = konst.5$$

* P. S. Laplace: Théorie de Jupiter et de Saturne. Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 1786, p. 211 - 239.

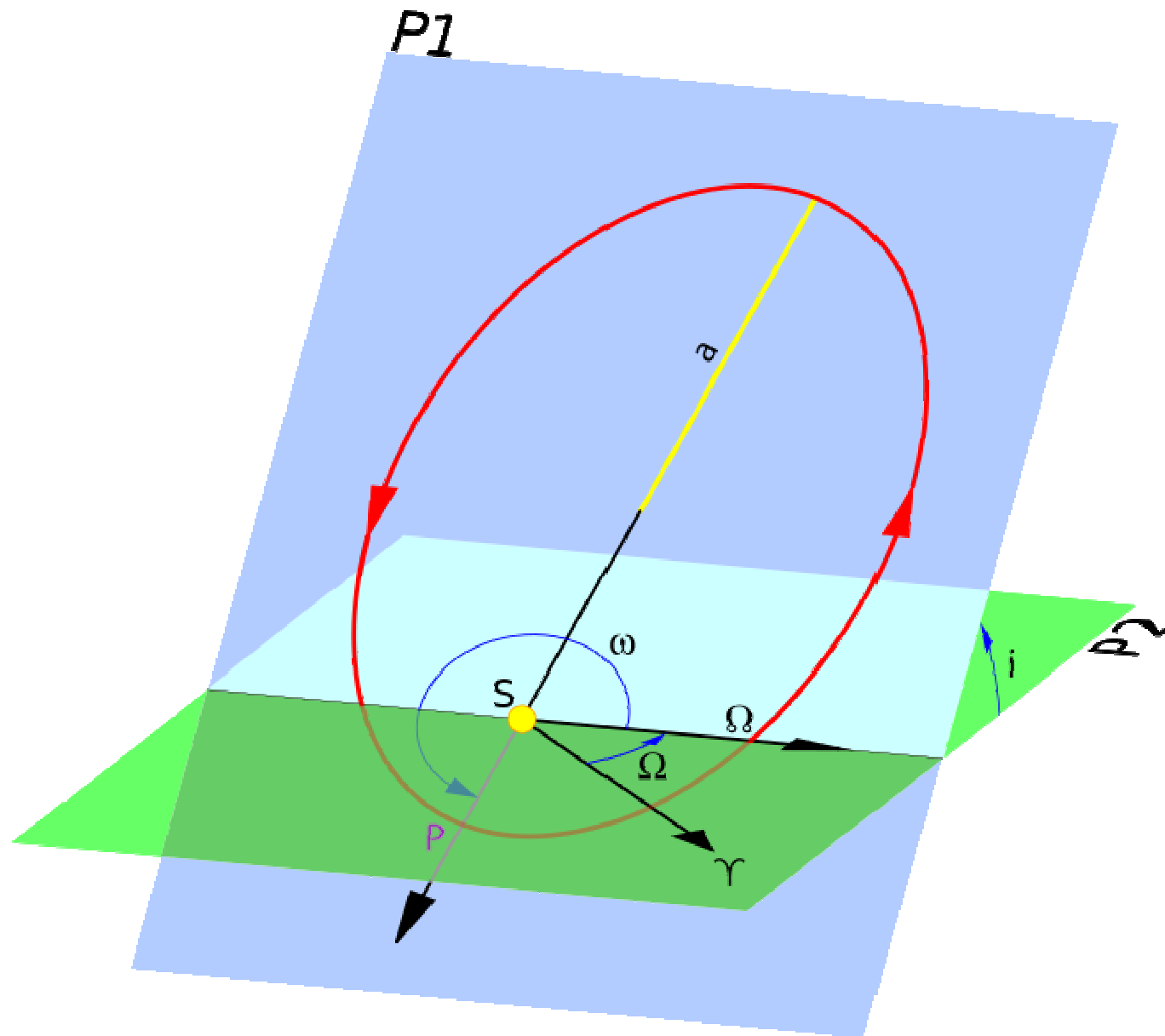
Dráhové elementy

Základní elementy dráhy

1. Velká poloosa dráhy a
2. Numerická excentricita $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
3. Okamžik příchodu perihéliem T
4. Délka výstupného uzlu Ω
5. Sklon dráhy k ekliptice i
6. Argument perihélie ω



Dráhové elementy



Stabilita Sluneční soustavy

Při analýze nejprve rozdělili dráhové elementy do dvou skupin. V první byly délka výstupného uzlu Ω , argument šířky perihélia ω a okamžik průchodu perihéliem T . Změny těchto elementů drah v důsledku poruch nevedou u planet k opuštění sluneční soustavy.

Do druhé skupiny byly zařazeny velká poloosa a , excentricita e a sklon dráhy i . Charakter jejich změn určuje stabilitu sluneční soustavy, proto byly sledovány změny těchto elementů. Lagrange zjistil, že nestačí pouze zkoumat omezenost velké poloosy v libovolném časovém okamžiku, což by řešilo stabilitu planetárních drah ve smyslu „rozbíhání“ planet. Existuje však možnost srážky planety se Sluncem. I při ohraničené hodnotě velké poloosy se bude dráha zplošťovat při zvětšování excentricity. Minimální vzdálenost planety od Slunce je $r = a(1 - e)$, pak při $e \rightarrow 1$ se $r \rightarrow 0$.

Stabilita Sluneční soustavy

Při rozboru stability planetárních drah tak byly studovány změny dráhových elementů a , e , i . Roku 1784 Laplace dokázal platnost dvou vět:

1. $m_1\sqrt{a_1}e_1^2 + m_2\sqrt{a_2}e_2^2 + \dots + m_n\sqrt{a_n}e_n^2 = c_1$, kde c_1 je konstanta, m hmotnost planety, a velká polosa, e excentricita příslušné dráhy.
2. $m_1\sqrt{a_1}\operatorname{tg}^2i_1 + m_2\sqrt{a_2}\operatorname{tg}^2i_2 + \dots + m_n\sqrt{a_n}\operatorname{tg}^2i_n = c_2$, kde c_2 je konstanta i označuje úhel sklonu příslušné dráhy.

V obou větách součty výrazů pro planety jsou stálé. Věty byly odvozeny za omezujícího předpokladu, že velké poloosy drah se podrobují pouze malým periodickým změnám, tudíž platí pro ohraničené změny e a i . Jak vyplývá z vět, jestliže excentricita jedné dráhy narůstá, excentricita druhé dráhy se zmenšuje. Obdobnou úvahu lze provést i pro sklon drah. Dalším předpokladem bylo, že hmotnosti planet jsou zhruba stejného řádu.

Závěry z obou vět lze shrnout slovně: Jestliže pohyb planet probíhá jedním směrem, jejich hmotnosti jsou stejného řádu, excentricity a sklony drah malé, velké poloosy jsou podrobovány pouze nevelkým změnám vzhledem ke střední hodnotě, pak excentricity a sklony drah budou malé ve zkoumaném časovém intervalu.

Uvedenými větami byla prokázána stabilita sluneční soustavy. Výpočet ukázal, že jde o dlouhoperiodické poruchy, jejichž perioda činí přibližně 930 roků.

Později roku 1839 Leverrier propočítal celou soustavu matematických vztahů charakterizujících stabilitu drah planet, včetně započtení poruch od Uranu. Výsledky v mezích přesnosti vedly k existenci horní hranice změn excentricity a úhlu sklonu dráhy při zachování stability sluneční soustavy:

Lagrange \leftrightarrow Laplace



Nadšený Laplace ocenil Lagrangeův spis* a odvození vztahu slovy:

...,výstižná aplikace nádherné metody, kterou jste vysvětlil na začátku vašich memoárů“ ...,neobyčejně jednoduchý vztah obdrženy pro změnu velké poloosy“...

Korespondence Lagrange → Laplace

Berlin, 10 avril 1775.

Monsieur et très illustre Confrère, j'ai reçu vos Mémoires, et je vous suis obligé de m'avoir anticipé le plaisir de les lire. Je me hâte de vous en remercier, et de vous marquer la satisfaction que leur lecture m'a donnée. Ce qui m'a le plus intéressé, ce sont vos recherches sur les inégalités séculaires. Je m'étais proposé depuis longtemps de reprendre mon ancien travail sur la théorie de Jupiter et de Saturne, de le pousser plus loin et de l'appliquer aux autres planètes; j'avais même dessein d'envoyer à l'Académie un deuxième Mémoire sur les inégalités séculaires du mouvement de l'aphélie et de l'excentricité des planètes, dans lequel cette matière serait traitée d'une manière analogue à celle dont

Lagrange píše Laplaceovi 10. dubna 1775:., *Co mne nejvíce zaujalo, byl výzkum sekulárních nerovností. Vzpomněl jsem si na svou starší práci o teorii Jupiteru a Saturnu, budu usilovat o její aplikaci na další planety. Zamýšlím dále zaslat do spisů Akademie druhé pojednání o nerovnostech sekulárního pohybu afélie a výstředností planet, v kterých je problematika interpretována podobným způsobem .“*

Korespondence Laplace → Lagrange

Paris, 10 février 1783.

MONSIEUR ET TRÈS ILLUSTRE CONFRÈRE,

Voici un exemplaire de mon Mémoire sur les comètes, que vous connaissez en partie par l'extrait que j'ai eu l'honneur de vous en envoyer. tirerez probablement sans beaucoup de difficulté de votre belle méthode sur les moyens mouvements des planètes. Ce théorème est que *si l'on suppose deux planètes dont les orbites soient inclinées l'une à l'autre d'une manière quelconque, leur inclinaison moyenne ne change pas en vertu de l'action réciproque des deux planètes.* Je m'étais proposé d'en chercher

Laplace → Lagrange 10. února 1783:., *jestliže předpokládáme dvě planety mající velmi podobný dráhový sklon, potom se na základě vzájemné interakce nemění...*“

Vzájemná korespondence nebyla zdvořilostně formální, nýbrž **věcná i s matematickými vztahy...** Oba považujeme za architekty důkazu stability Sluneční soustavy, proto Lagrangeova - Laplaceova teorie...

Znovunalezení Ceres

Titiusovo - Bodeovo pravidlo

předchůdci: Wolf, Ch. 1679 - 1754

Kant, I. 1724 - 1804 existuje mezera u planet

Titius, J. D., 1766: Překlad knihy*, umístění poznámky o pravidle
→ Bonnet pro $k = 3 \dots$ „*Skutečně Stvořitel zanechal toto místo prázdné? V žádném případě!*“

- první zmínka o Ceres!?

Bode, J. E., 1772:* * zřejmě na základě dopisování s Titusem

*Bonnet, Ch.: Contemplation de la Nature – Pozorování přírody, Amsterdam 1764.

* *Bode J. E.. Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels – Příručka ke studiu hvězdné oblohy, Hamburg 1772

Titiusovo - Bodeovo pravidlo

$$a_k = 0,4 + 0,3 \times 2^k \quad (k = -\infty, 0, 1, 2, \dots)$$

	k	a_k	a observed	<i>au</i>
Mercury	$-\infty$	0.4	0.39	
Venus	0	0.7	0.72	
Earth	1	1.0	1.00	
Mars	2	1.6	1.52	
asteroids	3	2.8	2.90	
Jupiter	4	5.2	5.20	
Saturn	5	10.0	9.55	
Uranus	6	19.6	19.20	

Počátky hledání

r. 1781 anglický astronom W. Herschel 1738 - 1822

- objev Uranu pro $k = 6$

T. B. pravidlo $a = 19,6$ AU,

reálná velká poloosa $a = 19,2$ AU

Franz Xaver von Zach 1754 – 1832, budapešť'ský rodák,
klíčová osoba příběhu

astronom v Gotha, začal r. 1787 s hledáním planety mezi

Marsem a Jupiterem pro $k = 3$, $a = 2,8$ AU

nebeská policie - J. H. Schröter, H. W. M. Olbers,

W. Herschel, N. Maskelyne atd., celkem 24 astronomů –

policistů, G. Piazzi původně nebyl členem

Giuseppe Piazzi 1746 - 1826

objev planety (planetky) Ceres Ferdinandea

identifikace hvězdy Mayer 87 x
Lacaille 87, objev Ceres náhodný



Ramsdenův čočkový dalekohled,
D objektivu 7,5 cm



Piazziho pozorování

Piazzi **1. ledna 1801** ve 20 hod 43 min místního času našel **objekt**, který se během noci posunul o 4' k severozápadu. Svůj objev popsal takto: „*Pozoroval jsem 1. ledna poblíž ramena Býka objekt s hvězdnou velikostí osmé magnitudy, který se dalšího večera 2. ledna posunul o 3'30“ přibližně k severu o 4' ke znamení Berana*“ ...

Sledování prováděl do **11. února 1801**, kdy se objekt přiblížil ke Slunci a přestal být pozorovatelný. Celkově Piazzi sledoval objekt 41 nocí, získal údaje o 21 úplných pozorováních, v nichž zachytil zhruba 9° jeho dráhy kolem Slunce, předpokládal, že jde o kometu....., *„já bych tu hvězdu označil jako kometu, avšak nevykazuje žádnou mlhovinu...“*

Záznam Piazziiho pozorování

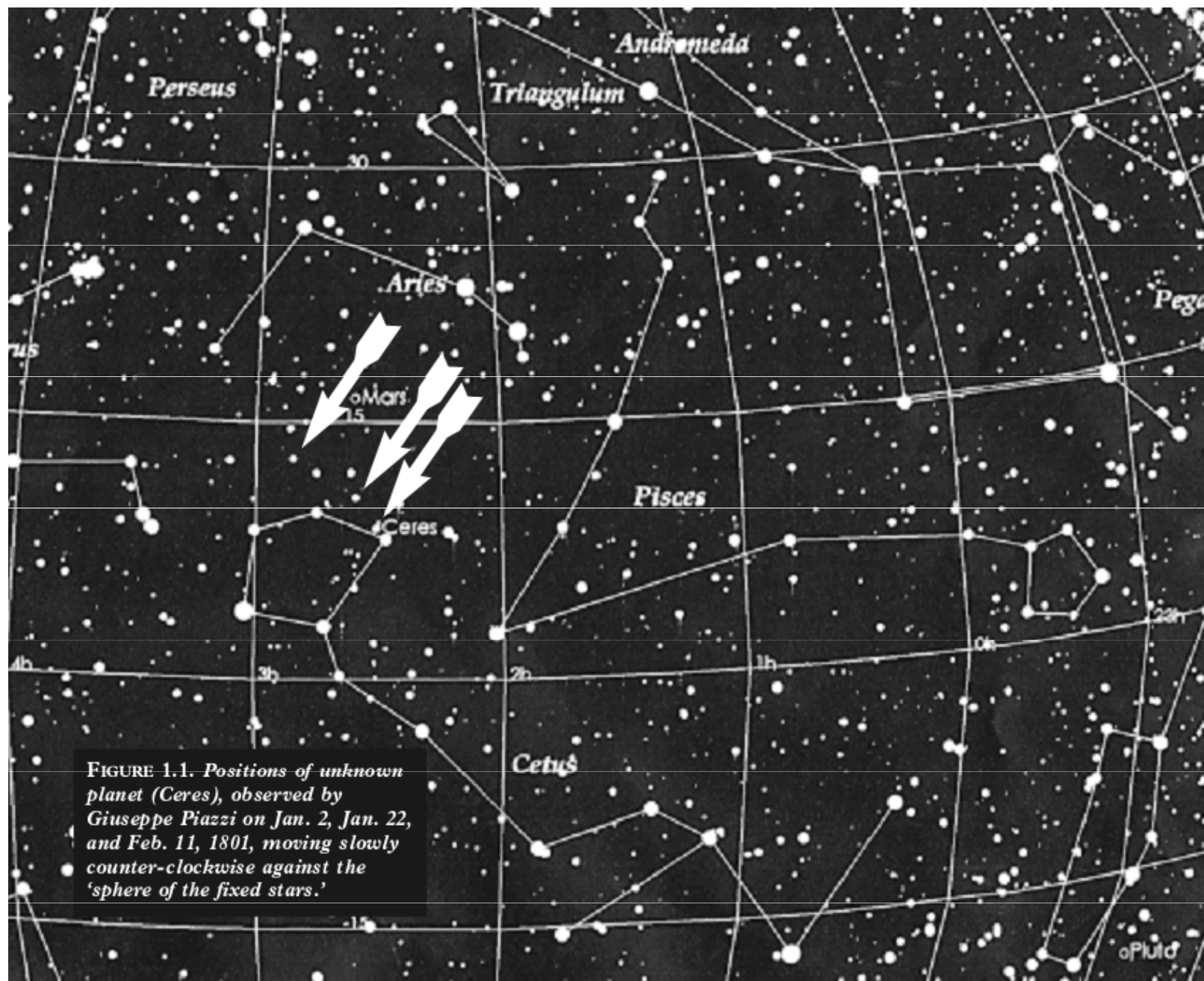
1800

STORIA CELESTE
DELL' OSSERVATORIO DI PALERMO
ANNO MDCCCI
PARTE PRIMA
*Piazzi e Dyrantz dal Verice delle Stelle e de' Pianeti
osservati nel Meridiano del Ghetto.*

CORSI
Anno MDCCCI

Stelle	Verice	Piazzi	Dyrantz	Stelle	Verice	Piazzi	Dyrantz	Stelle	Verice	Piazzi	Dyrantz
1	20	25	27	2	30	32	34	3	40	45	47
4	50	52	54	5	60	62	64	6	70	72	74
7	80	82	84	8	90	92	94	9	100	102	104
10	110	112	114	11	120	122	124	12	130	132	134
13	140	142	144	14	150	152	154	15	160	162	164
16	170	172	174	17	180	182	184	18	190	192	194
19	200	202	204	20	210	212	214	21	220	222	224
22	230	232	234	23	240	242	244	24	250	252	254
25	260	262	264	26	270	272	274	27	280	282	284
28	290	292	294	29	300	302	304	30	310	312	314
31	320	322	324	32	330	332	334	33	340	342	344
34	350	352	354	35	360	362	364	36	370	372	374
37	380	382	384	38	390	392	394	39	400	402	404
40	410	412	414	41	420	422	424	42	430	432	434
43	440	442	444	44	450	452	454	45	460	462	464
46	470	472	474	47	480	482	484	48	490	492	494
49	500	502	504	50	510	512	514	51	520	522	524
52	530	532	534	53	540	542	544	54	550	552	554
55	560	562	564	56	570	572	574	57	580	582	584
58	590	592	594	59	600	602	604	60	610	612	614
61	620	622	624	62	630	632	634	63	640	642	644
64	650	652	654	65	660	662	664	66	670	672	674
67	680	682	684	68	690	692	694	69	700	702	704
70	710	712	714	71	720	722	724	72	730	732	734
73	740	742	744	74	750	752	754	75	760	762	764
76	770	772	774	77	780	782	784	78	790	792	794
79	800	802	804	80	810	812	814	81	820	822	824
82	830	832	834	83	840	842	844	84	850	852	854
85	860	862	864	86	870	872	874	87	880	882	884
88	890	892	894	89	900	902	904	90	910	912	914
91	920	922	924	92	930	932	934	93	940	942	944
94	950	952	954	95	960	962	964	96	970	972	974
97	980	982	984	98	990	992	994	99	1000	1002	1004

Polohy Ceres zjištěné Piazzim

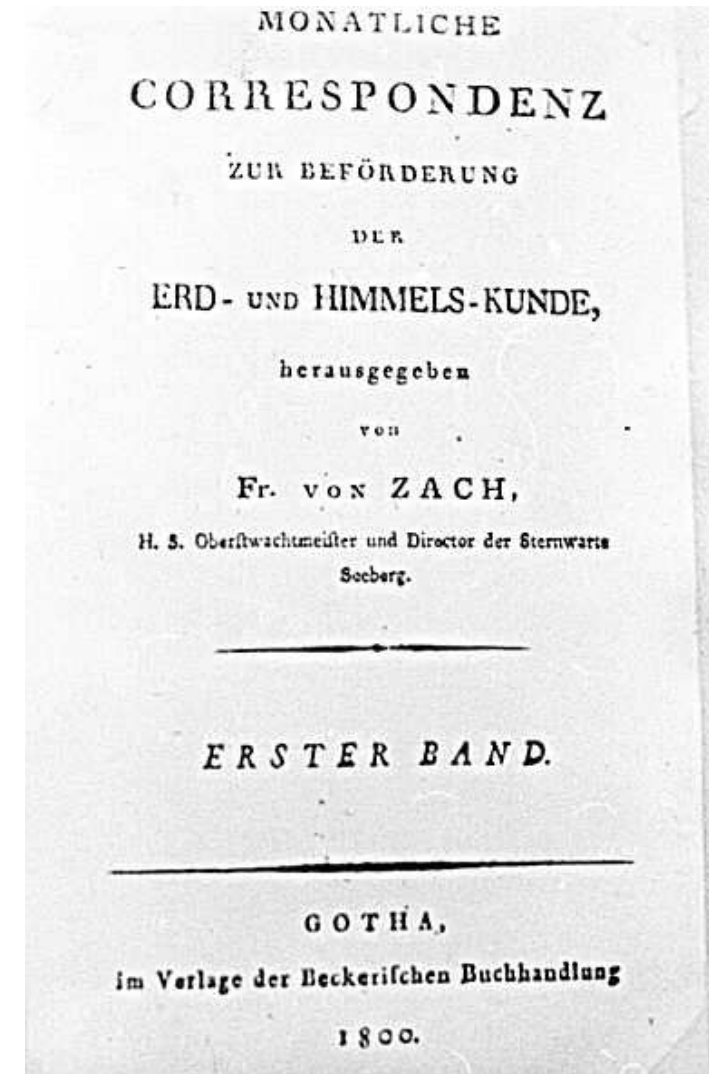


Franz Xaver von Zach 1754 - 1832

ředitel observatoře v Gota*

editor *Monatliche Correspondenz*

informován o „kometě“ v dubnu



Monatliche Correspondenz - 1801

Piazzini - leden 1801 - dopisy → Bodemu, Oriani, Lalandovi
Bode v dubnu → von Zachovi

von Zach - červen rozsáhlá zpráva o objevu v *Mon. Cor.*

Burckhardt v červenci výpočet dráhy v *Mon. Cor.* →

von Zach v září soubor Piazziniho pozorování v *Mon. Cor.*

von Zach v říjnu popsal neúspěch při hledání Ceres v
Mon. Cor.

Gauss v listopadu provádí výpočty

von Zach v prosinci v *Mon. Cor.* předpověď dráhy Ceres

7/8. prosince 1801 **von Zach znovunalezl Ceres**, přesněji
vymezuje 4 podezřelé objekty, následné potvrzení 1. ledna
1802, kdy pozoruje již i Olbers

Monatliche Correspondenz - září 1801

Piazziho pozorování 1.1 - 11.2.1801

Beobachtungen des zu Palermo d. 1 Jan. 1801 von Prof. Piazzii neu entdeckten Gestirns.

1801	Mittlere Sonnen-Zeit			Gerade Aufsteig. in Zeit			Gerade Aufsteigung in Graden			Nördl. Abweich.			Geocentrische Länge			Geocentr. Breite			Ort der Sonne + 20" Aberration			Logar. d. Distanz			
	St	'	"	St	'	"	St	'	"	St	'	"	Z	'	"	St	'	"	Z	'	"	⊙	♂		
Jan.	1	8	43	17,8	3	27	11,25	51	47	48,8	15	37	43,5	1	23	22	58,3	3	6	42,1	9	11	1	30,9	9,9926156
	2	8	39	4,6	3	26	53,85	51	43	27,8	15	41	5,5	1	23	19	44,3	3	2	24,9	9	12	2	28,6	9,9926317
	3	8	34	53,3	3	26	38,4	51	39	36,0	15	44	31,6	1	23	16	58,6	2	58	9,9	9	13	3	26,6	9,9926324
	4	8	30	42,1	3	26	23,15	51	35	47,3	15	47	57,6	1	23	14	15,5	2	53	55,6	9	14	4	24,9	9,9926418
	10	8	6	15,8	3	25	32,1	51	23	1,5	16	10	32,0	1	23	7	59,1	2	29	0,6	9	20	10	17,5	9,9927641
	11	8	2	17,5	3	25	29,73	51	22	26,0	16	22	49,5	1	23	10	37,6	2	16	59,7	9	23	12	13,8	9,9928490
	13	7	54	26,2	3	25	30,30	51	22	34,5	16	27	5,7	1	23	12	1,2	2	12	56,7	9	24	14	13,5	9,9928809
	14	7	50	31,7	3	25	31,72	51	22	55,8	16	40	13,0	1	23	12	1,2	2	12	56,7	9	24	14	13,5	9,9928809
	17	7	35	11,3	3	25	55,0	51	28	45,0	16	40	13,0	1	23	12	1,2	2	12	56,7	9	24	14	13,5	9,9928809
	18	7	31	28,5	3	26	8,15	51	32	2,3	16	49	16,1	1	23	25	59,2	1	53	38,2	9	29	19	53,8	9,9930607
	19	7	24	2,7	3	26	34,27	51	38	34,1	16	58	35,9	1	23	34	21,3	1	46	6,0	10	1	20	40,3	9,9931434
	21	7	20	21,7	3	26	49,42	51	42	21,3	17	3	18,5	1	23	39	1,8	1	42	28,1	10	2	21	32,0	9,9931886
	22	7	16	43,5	3	27	6,90	51	46	43,5	17	8	5,5	1	23	44	15,7	1	38	52,1	10	3	22	22,7	9,9932348
	23	6	58	51,3	3	28	54,55	52	13	38,3	17	32	54,1	1	24	15	15,7	1	21	6,9	10	8	26	20,1	9,9935062
	30	6	51	52,9	3	29	48,14	52	27	2,1	17	43	11,0	1	24	30	9,0	1	14	16,0	10	10	27	46,2	9,9936332
	31	6	48	25,4	3	30	17,25	52	34	18,8	17	48	21,5	1	24	38	7,3	1	10	54,6	10	11	28	28,5	9,9937007
	Febr.	1	6	44	59,9	3	30	47,2	52	41	48,0	17	53	36,5	1	24	46	19,3	1	7	30,9	10	12	29	9,6
2		6	41	35,8	3	31	19,06	52	49	45,9	17	58	57,5	1	24	54	57,9	1	4	10,5	10	13	29	49,9	9,9938423
5		6	31	31,5	3	33	2,70	53	15	40,5	18	15	1,0	1	25	22	43,4	0	54	28,9	10	16	31	45,5	9,9940751
8		6	21	39,2	3	34	58,50	53	44	37,5	18	31	23,2	1	25	53	29,5	0	45	5,0	10	19	33	33,3	9,9943276
11	6	11	58,2	3	37	6,54	54	16	36,1	18	47	58,8	1	26	26	40,0	0	36	2,9	10	22	35	11,4	9,9945823	

I. dráha:

střední sluneční čas p.m.

rektascenze

deklinace

8 hod 39 min 4,6 s

2. ledna 51° 47' 49"

15° 41' 5"

7 hod 20 min 21,7 s

22. ledna 51° 42' 21"

17° 3' 18"

6 hod 11 min 58,2 s

11. února 54° 10' 23"

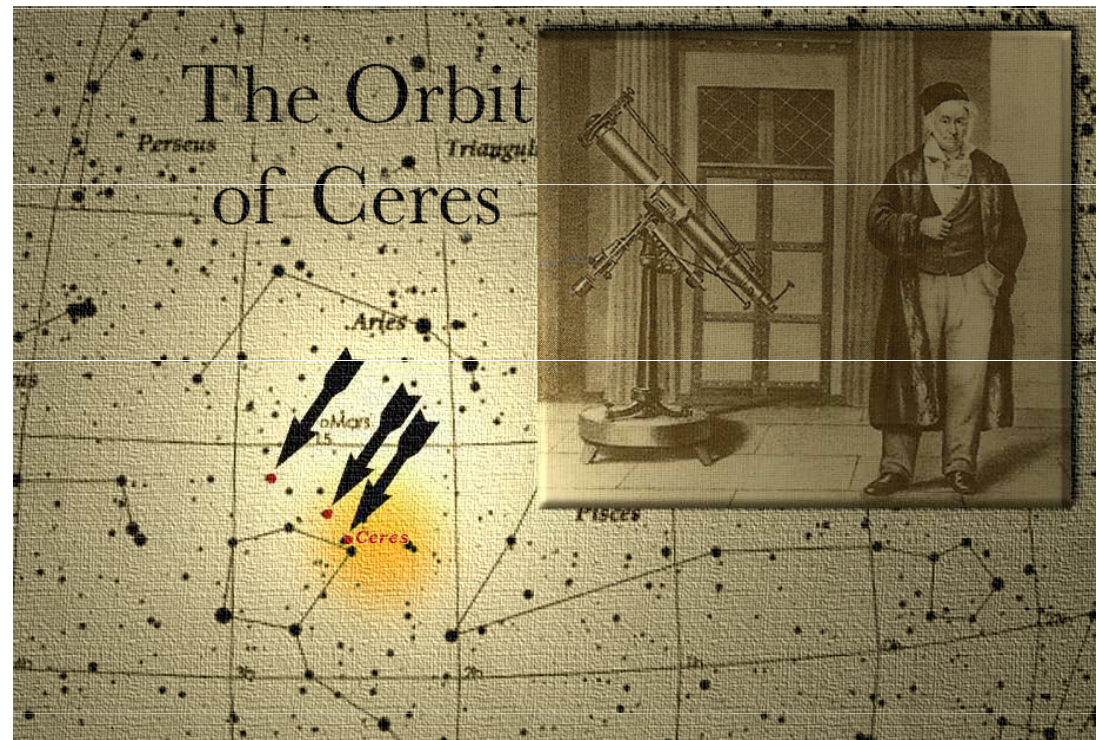
18° 47' 59"

Gauss znovunalezení planety Ceres

K. F. Gauss: **Theoria Motus:**

*„Determinare orbitam corporis
coelestis, absque omni
suppositione hypothetica, ex
observationibus tempus haud
magnum complectentibus
neque adeo delectum...“*

A. Seydler: *„Uřiti dráhu
oběžnice bez všelikého
hypothetického podkladu a
z pozorování v krátkém čase
po sobě učiněným.“*



Gaussovy ekliptikální souřadnice

1801	Berechuete						Fehler der	
	Länge			Breite			Länge	Breite
Jan. 1	53	23	2,34	3	6	43,63	+ 4,04	+ 1,53
2	53	19	41,24	3	2	25,68	- 3,06	+ 0,78
* 3	53	16	48,05	2	58	8,97	- 10,55	- 0,93
4	53	14	18,47	2	53	53,79	+ 2,97	- 1,81
10	53	7	58,37	2	28	57,12	- 0,73	- 3,48
* 13	53	10	21,60	2	16	52,89	- 16,00	- 6,81
14	53	11	57,70	2	12	55,36	- 3,50	- 1,34
19	53	26	0,59	1	53	38,01	+ 1,39	- 0,19
21	53	34	21,99	1	46	9,53	+ 0,69	+ 3,53
22	53	39	6,69	1	42	28,45	+ 4,89	+ 0,35
23	53	44	14,08	1	38	49,44	- 1,62	- 2,66
28	54	15	17,11	1	21	5,91	+ 1,41	- 0,99
30	54	30	9,76	1	14	15,12	+ 0,76	- 0,88
31	54	38	6,44	1	10	52,81	- 0,86	- 1,79
Febr. 1	54	46	23,22	1	7	32,74	+ 3,92	+ 1,64
2	54	54	59,71	1	4	14,30	+ 1,81	+ 3,80
5	55	22	44,30	0	54	31,72	+ 0,90	+ 2,82
8	55	53	17,01	0	45	6,65	- 12,49	+ 1,63
11	56	26	34,10	0	35	58,96	- 5,90	- 3,94

Piazziho pozorování obsahovalo chyby *, Gauss se snažil je vyloučit → restriktce

C – O výpočet

III. dráha: #

1. ledna,
21. ledna,
11. února.

FIG. 1—The ecliptic longitudes and latitudes of Ceres, calculated by Gauss, using his third # orbit; and also the residuals, in the sense calculated minus observed. The last column for Jan. 23 should read -2.66 (From *Monatl. Corresp.*, 4, 644, 1801.)

Výpočet pozorovacích hodnot Ceres

tafeln aus sehr genauen Beobachtungen für diese Zeiten bestimmte, und die Örter der Sonne hiernach verbesserte. Diese vierten Elemente sind nun folgende:

Sonnenferne	326° 27' 38"	Heraus: grösste Mittelpunkts-Gleichung 9° 27' 41" tägliche mittlere helioc. tropische Bewegung 770"914
Ω	81 0 44	
Neigung	10 36 57	
Logarithmus der halben grossen Axe	0.4420527	
Excentricität	0.0825017	
Epoche 1800 31. Dec.	77° 36' 34"	

Aus diesen Elementen hat Dr. GAUSS folgende Örter der *Ceres Ferdinandea* im voraus berechnet. Die Zeit ist mittlere für Mitternacht in *Palermo*.

1801	Geocentrische Länge	Geocentrische Breite nördlich	Logarithm. des Abstandes von der ☿	Logarithm. des Abstandes von der ☉	Verhältniss der gesehenen Helligkeit
November 25	5 ^s 20 ^m 16 ^s	9 ^o 25'	0.42181	0.40468	0.6102
December 7	5 22 15	9 48	0.40940	0.40472	0.6459
13	5 24 7	10 12	0.39643	0.40479	0.6855
19	5 25 51	10 37	0.38296	0.40488	0.7290
25	5 27 27	11 4	0.36902	0.40499	0.7770
31	5 28 53	11 32	0.35468	0.40512	0.8295
	6 0 10	12 1	0.34000	0.40528	0.8869

Sollte man den Ort des Planeten nach diesen Elementen genauer, oder auf eine längere Zeit berechnen wollen: so setzen wir zu diesem Behufe noch folgende Formeln hierher:

základní myšlenky výpočtu -
září, říjen 1801, první aplikace
metody listopad 1801,
→ dráhové elementy, propočít
vícekrát opakován

*Gauss stanovil souřadnice pro
25.11. – 31.12.1801 v intervalu
po šesti dnech*



7/8. prosince 1801 von Zach
vymezil 4 podezřelé objekty,
jeden z nich Ceres

Dráhové elementy Ceres

listopad 1801

sklon dráhy i $10^{\circ} 36' 57''$

excentricita e 0,0825

hlavní poloosa a 2,7673 AU

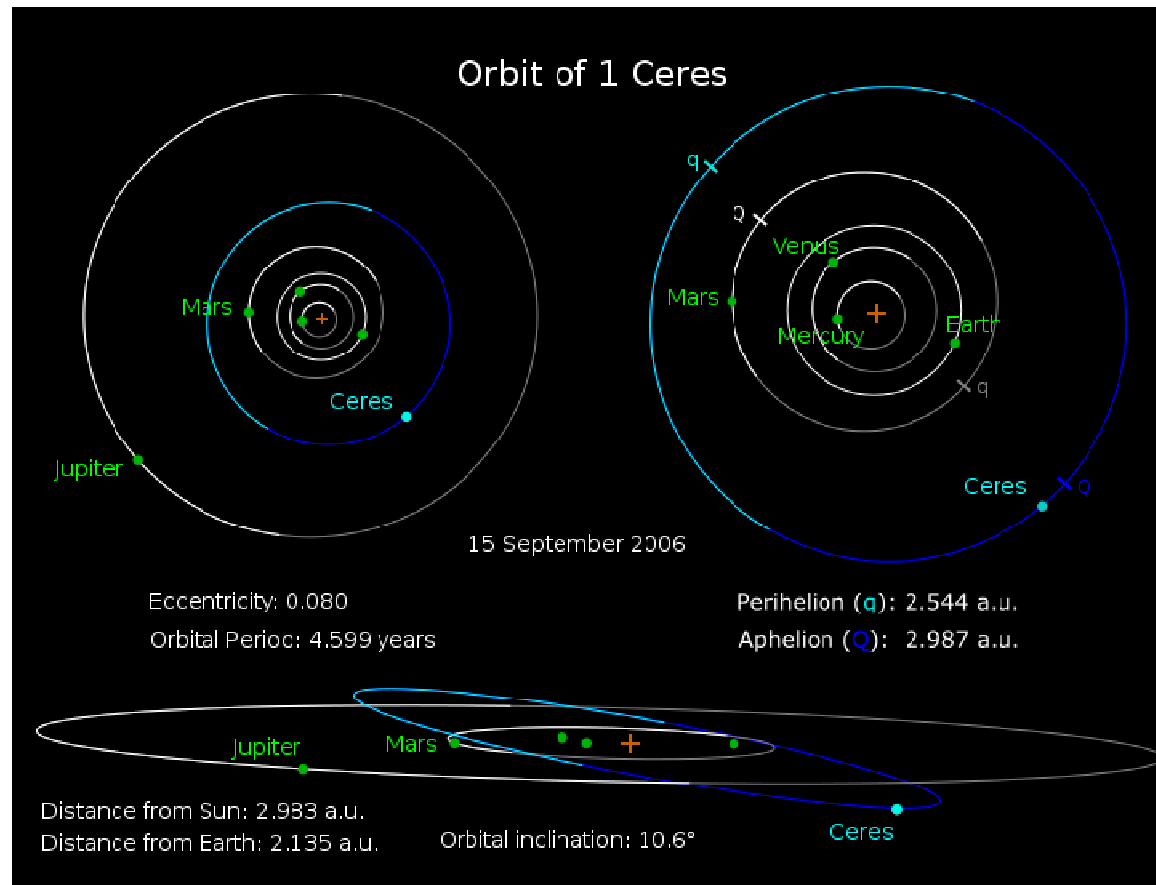
současné hodnoty:

sklon dráhy i $10^{\circ} 35' 10''$

excentricita e 0,0800

hlavní poloosa a 2,7660 AU

oběžná doba T 1 680,3 dne



Carl Friedrich Gauss 1777 - 1855



Jak vypočítat dráhové elementy eliptické dráhy?

Jak určit efemeridy?

Kolik pozorování ze Země je nezbytných?

Obtíže: rotace Země, oběh kolem Slunce, pozorovací chyby, těsnější pozorovací řada

C. F. Gauss r. 1801

± 24 letý + svobodný

- Pojednání o aritmetice

Carl Friedrich Gauss 1777 - 1855



- r. 1788 gymnázium,
- r. 1794 idea metody nejmenších čtverců
- r. 1795 - 1798 studia v Göttingenu
- r. 1796 článek o konstruovatelnosti sedmnáctiúhelníka
- r. 1801 *Pojednání o aritmetice*
- r. 1809 *Teorie pohybu nebeských těles*
- r. 1827 *Obecný výzkum zakřivených ploch*



†1805 - sňatek s. J. Osthofovou

† umírá r. 1809

†1810 - sňatek s M. Waldeckovou

† umírá r. 1831

celkem šest dětí, dva synové

r. 1807 ř. hvězdárny v Göttingenu, prof. astronomie, ne matematiky!

r. 1818 - 1820 geodézie

r. 1831 W. Weber, magneticko-elektrické práce, zemský magnetismus

Carl Friedrich Gauss 1777 - 1855



r. 1777 † narozen Braunschweig,

r. 1788 - 92 Gymnásium Catharineum

r. 1792 - 95 Colegium Carolineum

r. 1795 stipendium Carla Wilhelma Ferdinanda

r. 1807-1855 Göttingen, Laplace-Napoleon



r. 1855 † umřel Göttingen

Göttingen, C.F.Gauss + W. Weber



Podstata Gaussovy metody

tři polohy planety ve třech časech, dráhová rovina planety prochází středem Slunce

aplikovaná matematika – kombinace geometrických a dynamických podmínek

celkové řešení, geometrie situace, prostorový pohyb Země, planety, více než 80 proměnných ve třech různých souřadných soustavách, jejich transformace, abstraktní matematické myšlení, mnoho algebraických a aritmetických výpočtů,

Gauss nevzal do ruky tužku, pokud nebyl problém vyřešen...

numerické výpočty, k určení dráhy v prostoru je zapotřebí šesti dráhových parametrů, nezbytná tři pozorování – rektascenze, deklinace → šest konstant, časový interval mezi nimi → II. Keplerův zákon

zanedbání gravitačního působení ostatních těles vzhledem k malému časovému intervalu pozorování

Ceres pozorujeme z pohybující se Země, jejíž polohu známe, obě **tělesa obíhají v různých dráhových rovinách**

Jak Gauss propočítal dráhu Ceres?

Gauss metodu předběžného určení dráhy Ceres popsal v dopise ze 6. srpna **1802** H. W. Olbersovi (1758 – 1840)

...výměna mnoha dopisů, občas Gauss neplatil poštovné...

vydáno se souhlasem Gausse až r. 1809

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd – und Himmelskunde, C. F. Gauss + Franz Xaver Zach + Lindenau, September 1809, původně Gauss nepředpokládal publikování → von Lindenau „*s mnoha omluvami za četné nedostatky*“

Summarische Übersicht der Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden ... (Ceres, Pallas)

Souhrnný přehled metody užitá k určení drah dvou nových planet

C. F. Gauss: Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen - září 1809

SUMMARISCHE ÜBERSICHT DER ZUR BESTIMMUNG DER BAHNEN DER BEIDEN NEUEN HAUPTPLANETEN ANGEWANDTEN METHODEN*).

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde,
herausgegeben vom Freiherrn von ZACH. September 1809.

1.

Die von Kreis- und Parabel-Hypothesen unabhängige Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus einer kurzen Reihe von Beobachtungen beruht auf zwei Forderungen: I. Muss man Mittel haben, die Bahn zu finden, die drei gegebenen vollständigen Beobachtungen Genüge thut. II. Muss man die so gefundene Bahn so verbessern können, dass die Differenzen der Rechnung von dem ganzen Vorrath der Beobachtungen so gering als möglich werden.

*) Als ich vor einiger Zeit die persönliche Bekanntschaft des Hrn Prof. GAUSS zu machen das Glück hatte, sah ich unter dessen Papieren den hier folgenden schon vor mehreren Jahren entworfenen und noch nirgends bekannt gemachten Aufsatz, der die frühere Methode des Verfassers zu Bestimmung der Planetenbahnen enthält. Da ich mich bei der flüchtigen Durchsicht dieser summarischen Übersicht bald überzeugte, dass die hier von dem Verfasser entwickelte Methode zu erster genäherter Bestimmung zweier Distanzen des Planeten von der Erde wesentlich von der verschieden sei, die der Verfasser nun in seinem grössern Werk öffentlich dargelegt hat, so bat ich ihn um die Erlaubniss, diesen Aufsatz bekannt machen zu dürfen, in der Voraussetzung, dass es allen Kennern interessant sein muss, die verschiedenen Wege zu kennen, auf denen es dem Verfasser gelungen ist, zu der vollendeten Auflösung zu gelangen, von der wir unsern Lesern im vorigen Hefte eine Übersicht mitgetheilt haben. Ich hatte anfangs die Absicht, den Aufsatz mit einigen Bemerkungen zum Behuf einer Vergleichung der frühern und spätern Methode des Verfassers zu begleiten; allein da diese, hätten sie wirklich erläuternd sein sollen, etwas weitläufig und ohne Hinweisung auf das Werk selbst doch immer undeutlich geblieben wären, so schien es mir zweckmässiger, den ganzen Aufsatz (der denn doch mehr für Kenner bestimmt ist, die das Werk selbst dabei zur Hand haben), so wie er vor sechs Jahren vom Verfasser niedergeschrieben wurde, ohne allen fernern Beisatz, den astronomischen Lesern dieser Zeitschrift mitzutheilen.

VON LINDENAU.

Typografické chyby

Dear Dr. Stefl,

You are correct: the denominators should be $(\pi_1 \times \pi_3) \cdot P_2$.

Your e-mail amazes me! I was very surprised to see that the paper was even available on the internet.

You must be reading the paper very carefully to have found that typographical error. I read it several times, and **it escaped my attention.**

You might be interested in two other sources of information on this subject. The first is an article titled, "The Discovery of Ceres: How Gauss Became Famous," in *Mathematics Magazine*, v.71 n.2, April 1999. This is a paper that I wrote on the subject several years ago. In that article, you will find the formulas that you refer to, but in slightly different notation. Second, you can go straight to the original source. Gauss's paper, Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden is easily available on the internet. You will find it in the Gauss *Werke*, v. 6 pp. 146-165. It is, of course, in German. My paper in *Mathematics Magazine* is a simplified look at Gauss's original work.

Thanks for your note. It is always nice to see that other people are interested in the same things I am!

By the way, may I ask where you are located?

Don Teets

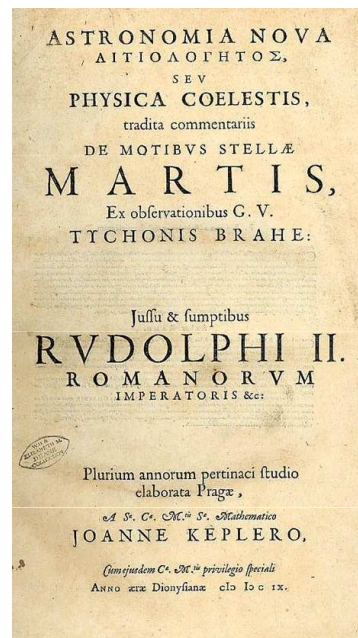
C. F. Gauss: *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* 1809

*Teorie pohybu nebeských těles pohybujících se kolem Slunce
po kuželosečkách*

Gauss začal sepsovat r. 1805, dokončil v německé verzi

r. 1806, následně dílo překládal do latiny, vyšlo až r. 1809

*dvě stě roků po **Astronomia nova**, na kterou těsně navazuje*



Theoria motus corporum coelestium

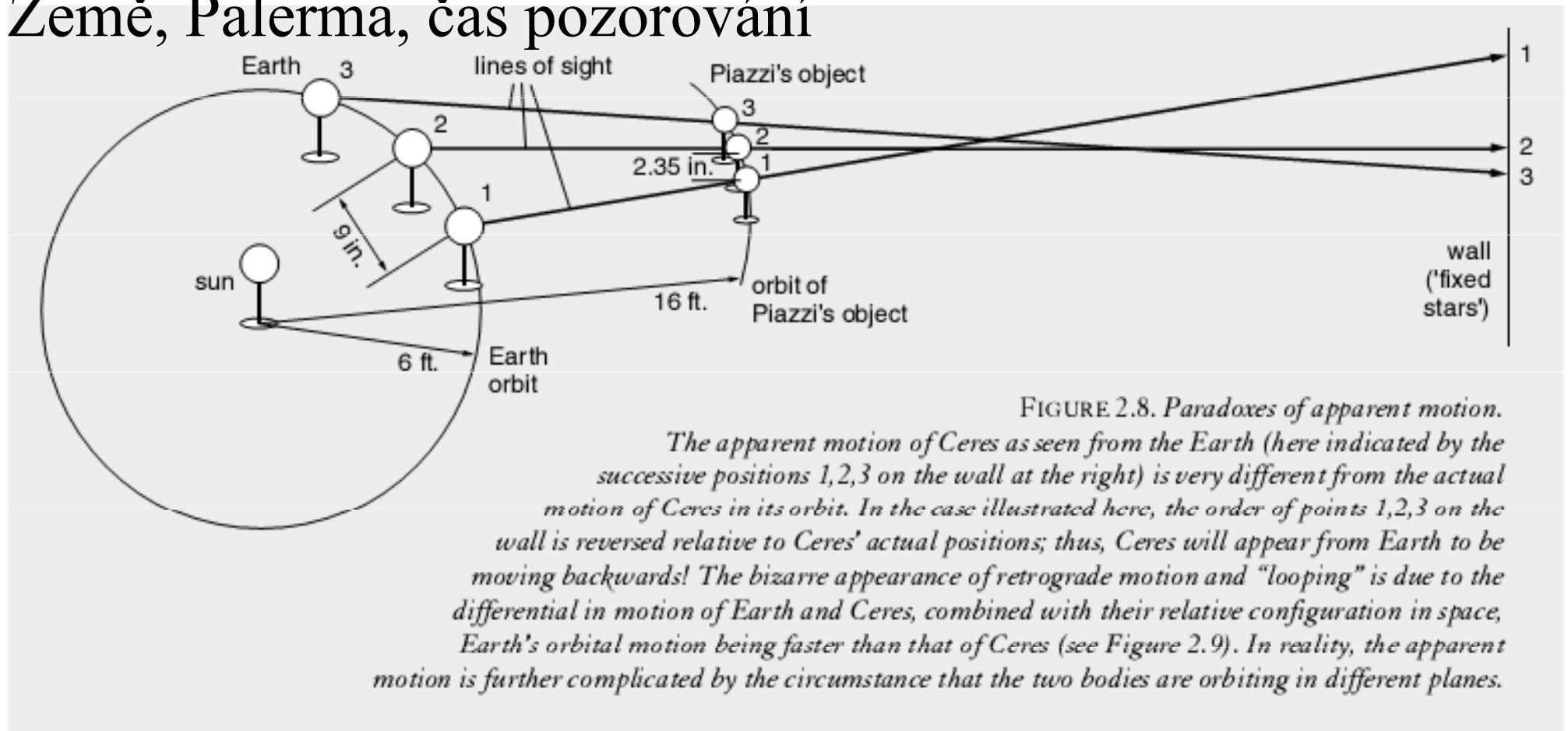
základní předpoklady

1. Pohyb každého kosmického tělesa probíhá ve **stále rovině**, v níž **leží střed Slunce**.
2. **Dráha** opisovaná kosmickým tělesem je **kuželosečka**, jejíž ohnisko je ve středu Slunce.
3. Pohyb kosmického tělesa po dráze probíhá tak, že plochy sektorů opisované kolem Slunce v různých časových intervalech jsou úměrné těmto intervalům. Jestliže **plochy a časy vyjádříme** pro zvolený sektor **číselně**, vždy je jejich **podíl konstantní**.
4. Pro různá kosmická tělesa obíhající kolem Slunce platí: odpovídající **podíly ploch sektorů a časů** jsou **úměrné odmocninám Gaussových parametrů**.

Výběr z geometrických Gaussových úvah*

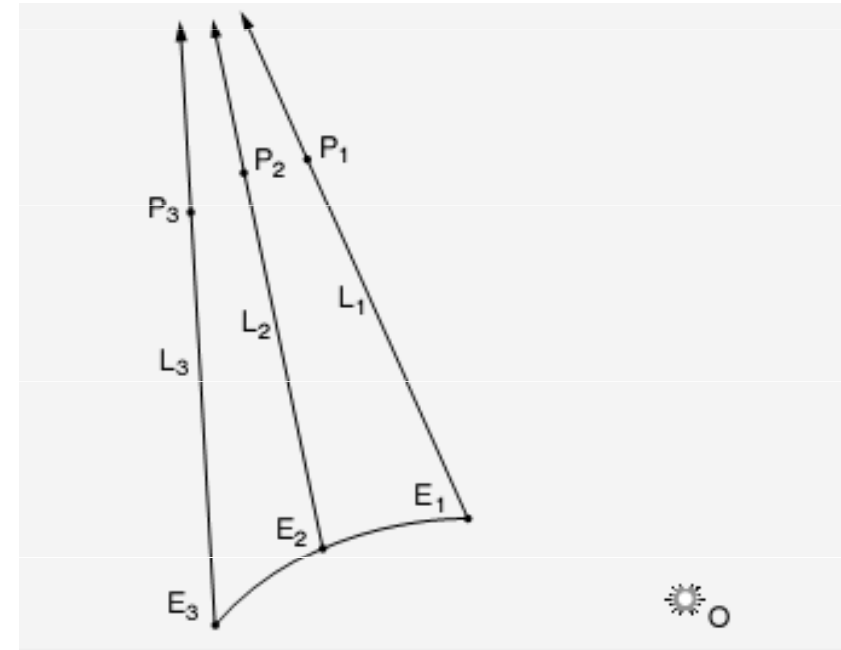
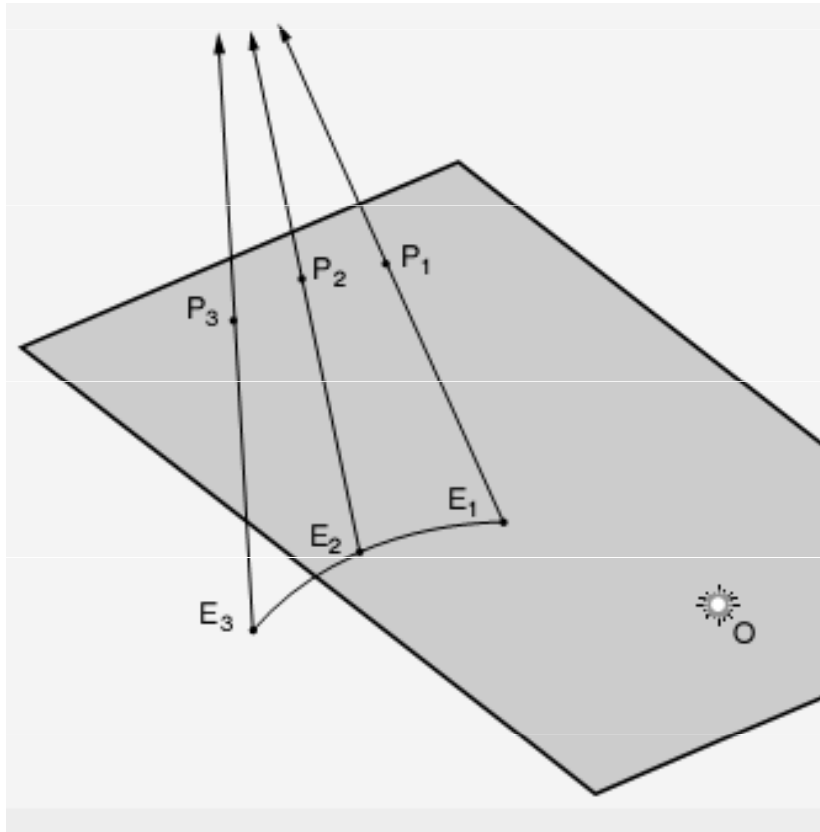
Theoria Motus čl. 88 – 105

pozorovaný pohyb planety Ceres, známe přesnou polohu Země, Palerma, čas pozorování



* Teenenbaum, J., Director, B.: How Gauss Determined The Orbit of Ceres. The American Almanac, December, 1997.

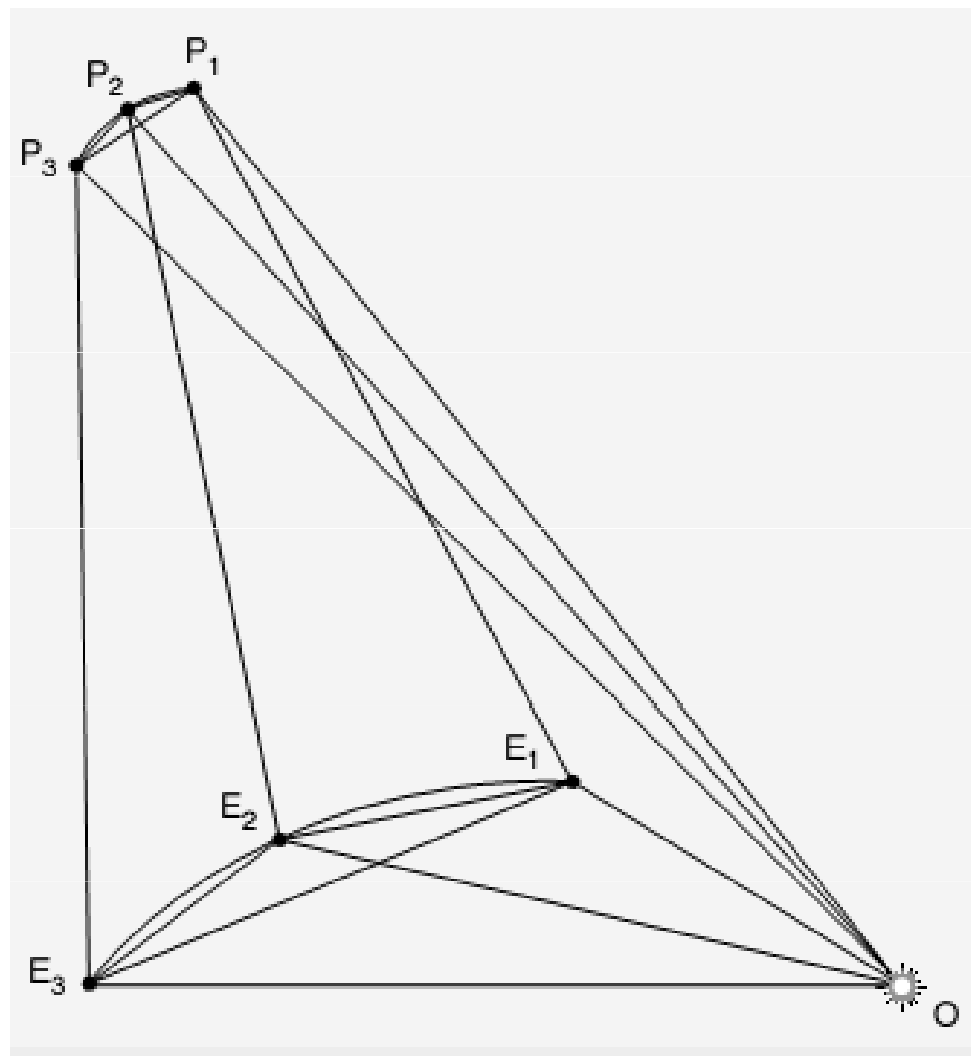
Piazzí určil tři pozorovací směry L_1 , L_2 , L_3



neurčují, kde se sledovaná planetka v prostoru nachází, **neznal její vzdálenost a dráhovou rovinu**, na které se Ceres pohybuje

Prostorová geometrie:

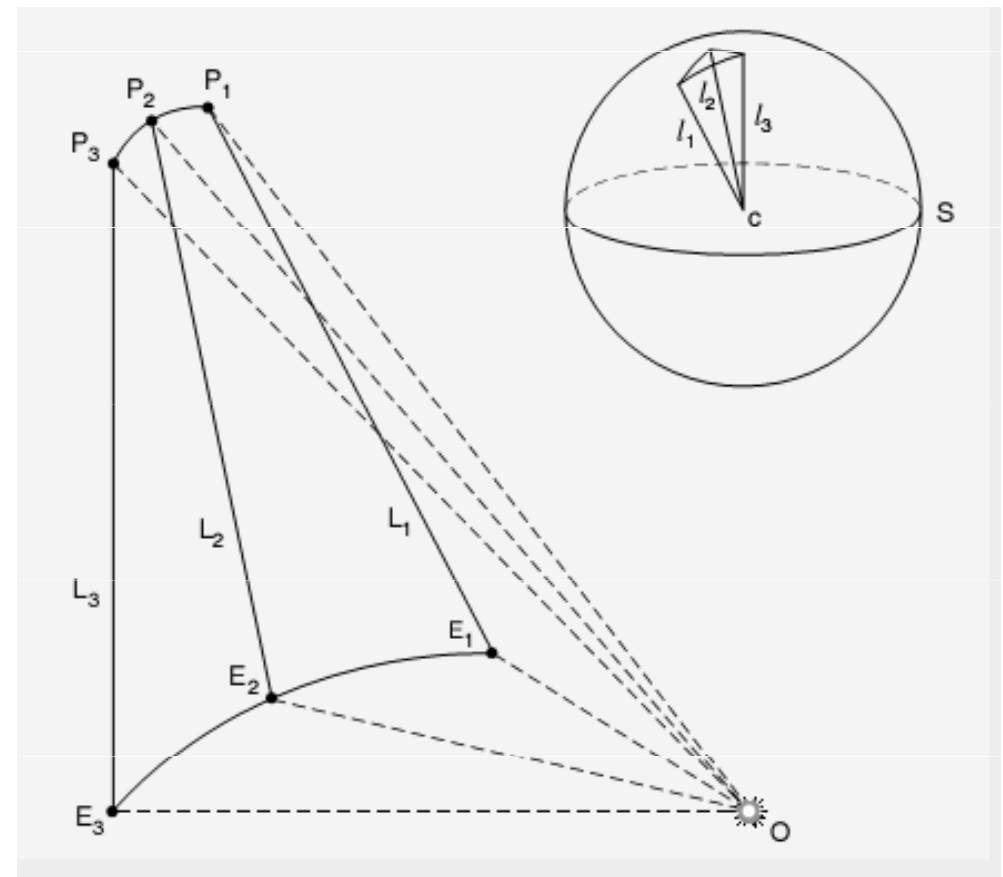
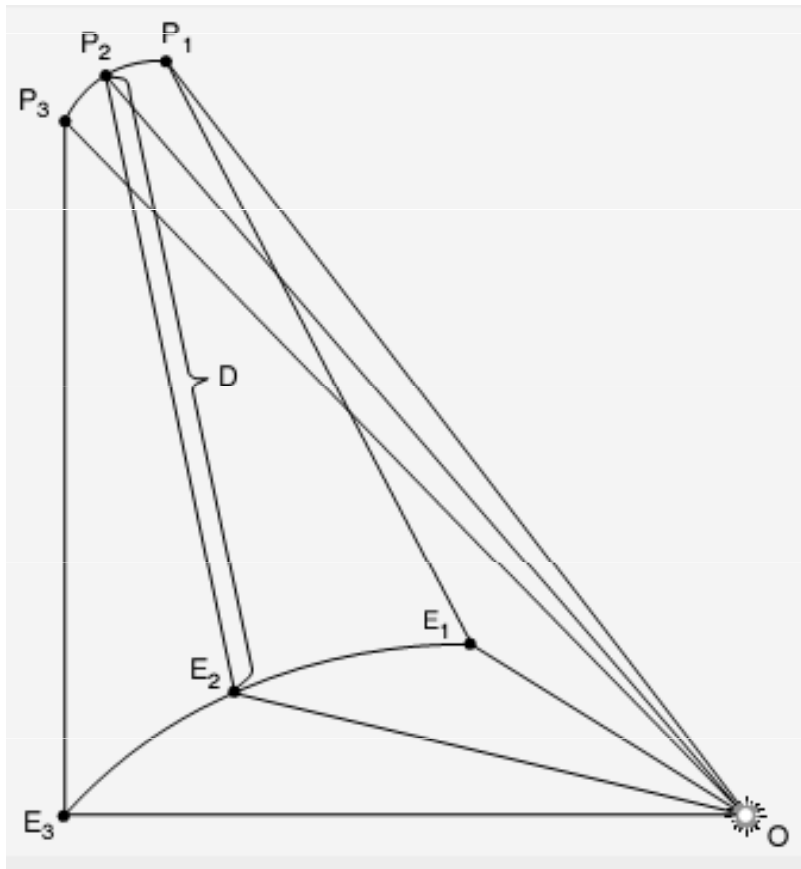
O - Slunce, E - Země, P - Ceres



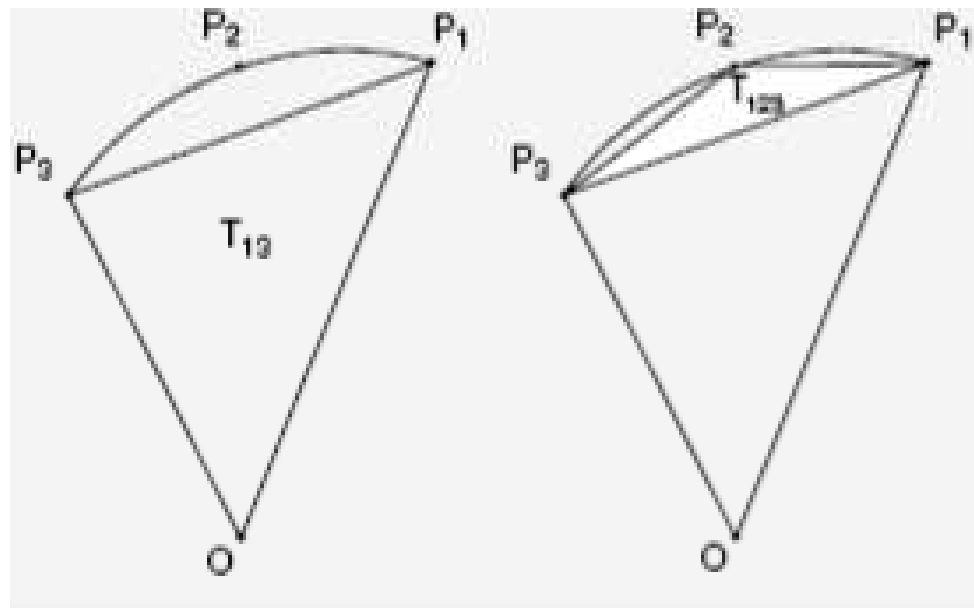
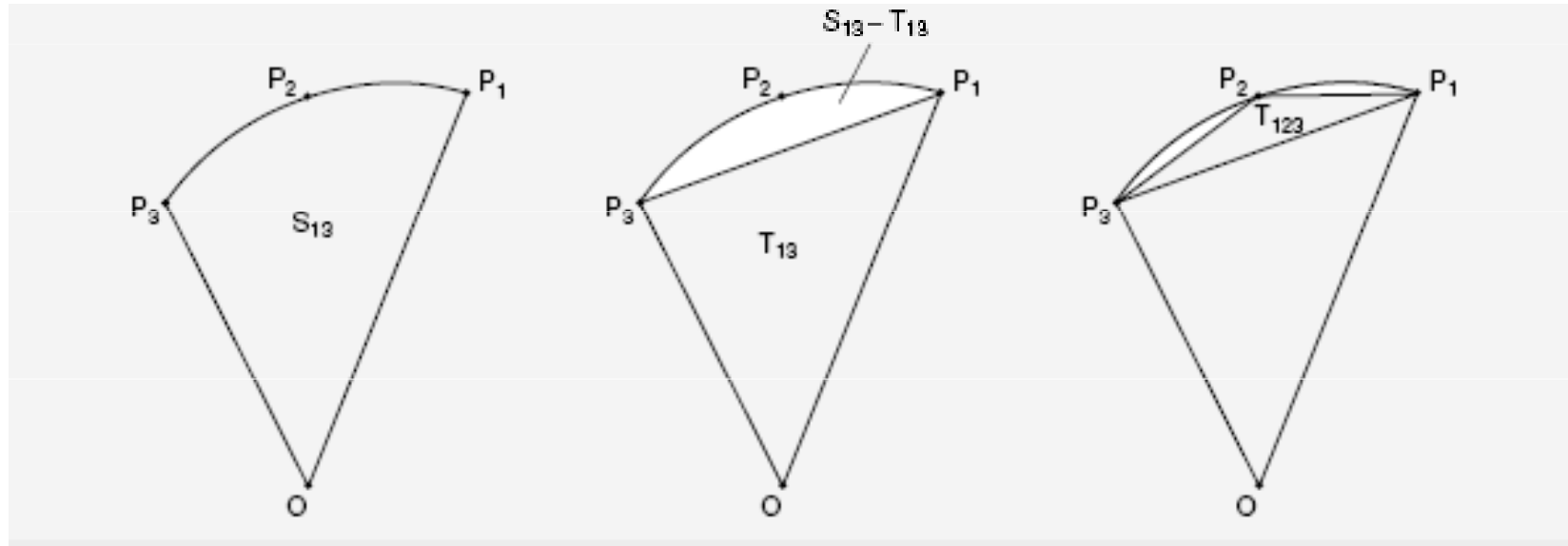
Geometrie metody

D - vzdálenost Země - Ceres

Hledání vztahů mezi plochami $\triangle OE_1E_2$, $\triangle OE_2E_3$, $\triangle OE_1E_3$ respektive $\triangle OP_1P_2$, $\triangle OP_2P_3$, $\triangle OP_1P_3$ a odpovídajícími sektory a časy, referenční koule ke studiu úhlových vztahů, cíl bylo určení vzdálenosti D



Nahrazování plošných sektorů trojúhelníky, určení plochy $P_1P_2P_3$ pomocí T_{123}

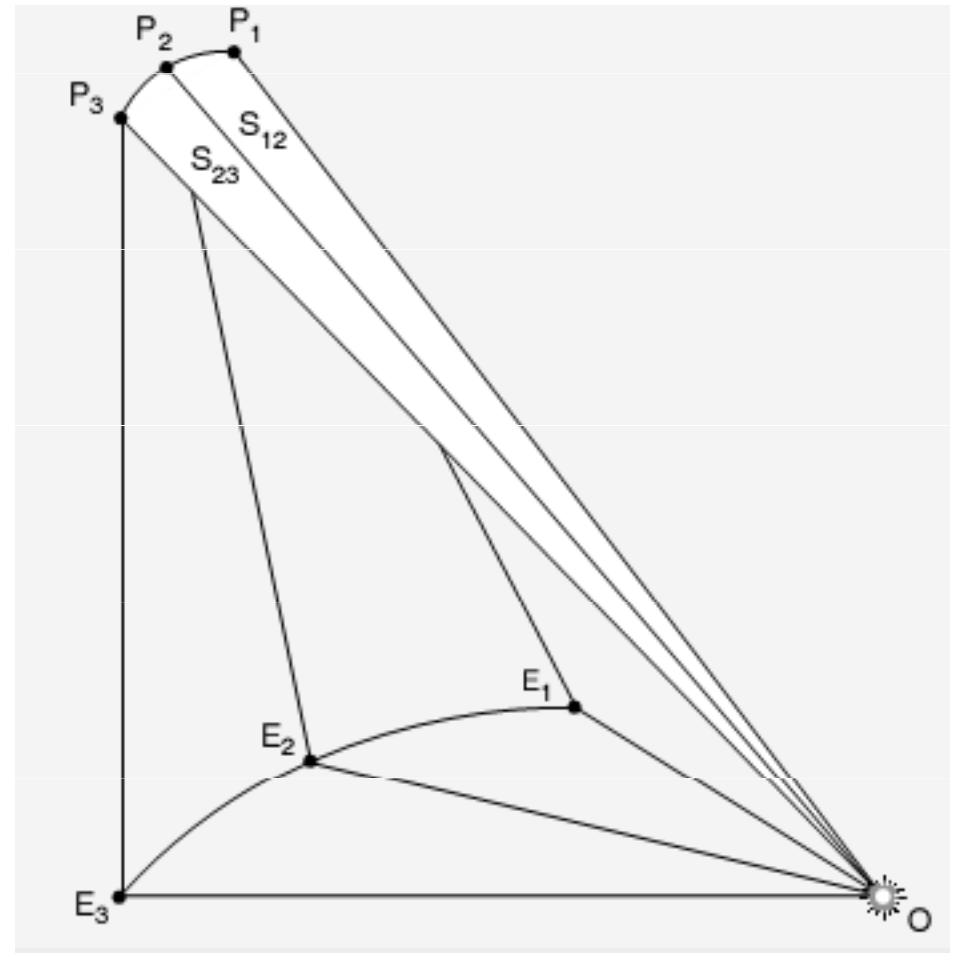


Plochy sektorů při pohybu Ceres, podíly ploch a časů

$$\frac{S_{12}}{S_{23}} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} = 0,949$$

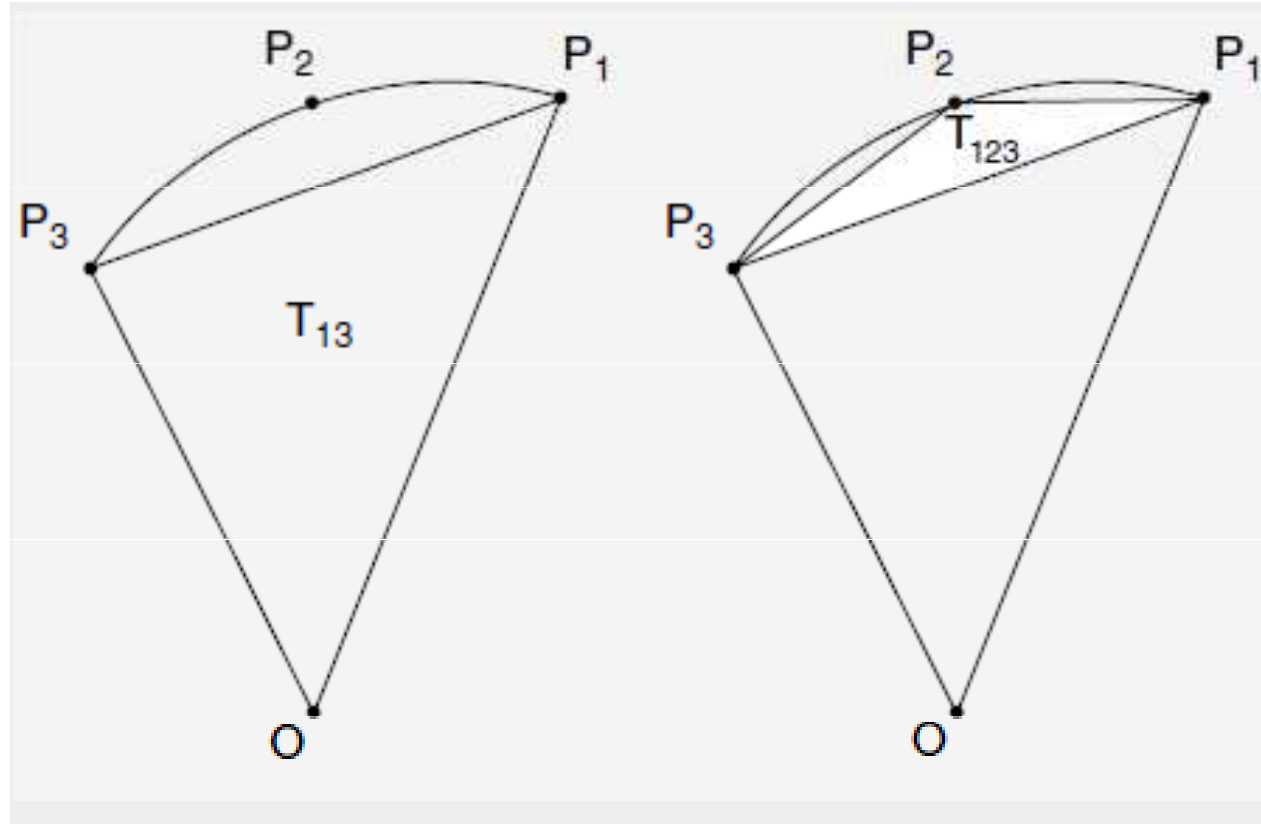
$$\frac{S_{12}}{S_{13}} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} = 0,487$$

$$\frac{S_{23}}{S_{13}} = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} = 0,513$$



Geometrická upřesnění

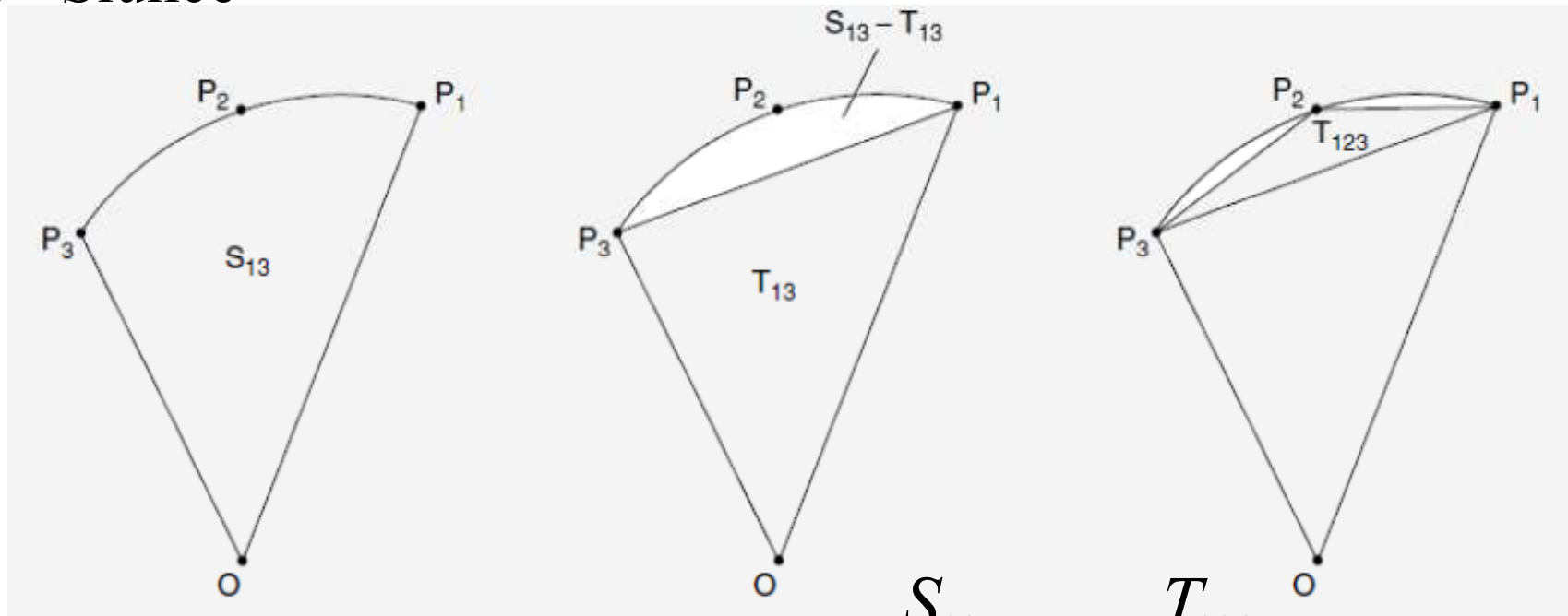
Rozdílnost ploch S_{13} a $T_{13} \rightarrow$ nutnost zavedení Gaussova korekčního faktoru



$$T_{123} \cong \frac{1}{4r} \left[2\pi r \left(\frac{t_2 - t_1}{r^{\frac{3}{2}}} \right) \right] \left[2\pi r \left(\frac{t_3 - t_2}{r^{\frac{3}{2}}} \right) \right] \left[2\pi r \left(\frac{t_3 - t_1}{r^{\frac{3}{2}}} \right) \right] = 2\pi^3 \frac{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)}{r^{\frac{5}{2}}}$$

Gaussův korekční faktor

Hledání korekčních faktorů, k získání vztahu mezi poměry ploch trojúhelníků a časovými poměry, korekční faktor závisí na vzdálenosti Ceres - Slunce



$$S_{13} \cong T_{13} + T_{123}$$

$$\frac{S_{13}}{T_{13}} \cong 1 + \frac{T_{123}}{T_{13}}$$

$$T_{123} \cong 2 \frac{\pi^2 (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}{r_2^3} T_{13}$$

$$\frac{S_{13}}{T_{13}} \cong 1 + \left[2 \frac{\pi^2 (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}{r_2^3} \right]$$

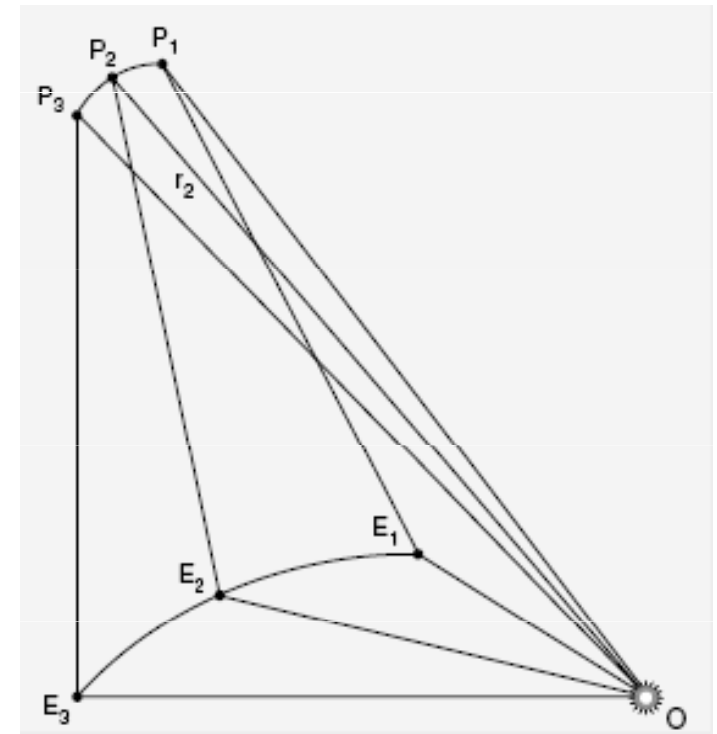
Upřesnění hlavní poloosy a Ceres

Gaussův korekční faktor $G \cong 1 + \left[2 \frac{\pi^2 (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}{r_2^3} \right]$

závisí na vzdálenosti Ceres od Slunce – r_2

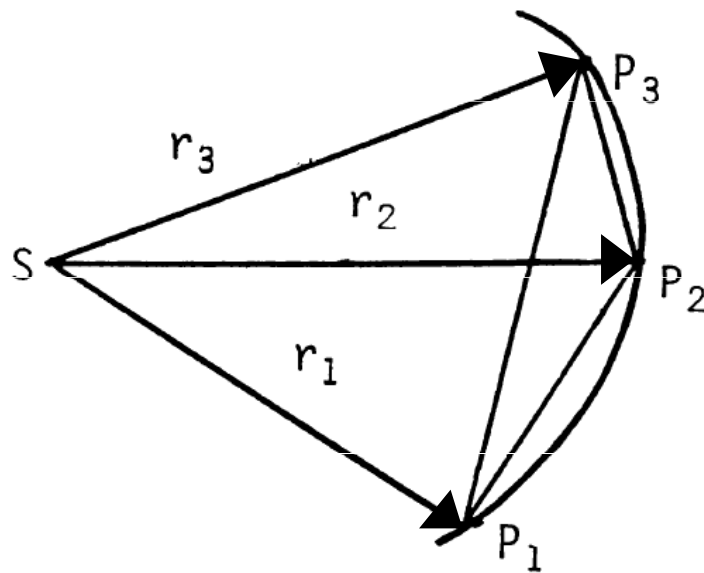
upřesnění výpočtu $\frac{S_{13}}{T_{13}} \cong 1 + \left[2 \frac{\pi^2 (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}{r_2^3} \right]$

který je mírně větší než 1,
Zach, Olbers předpokládali
podle T.B. pravidla $a = 2,8$ au.
Gaussův výpočet vedl při hodnotě
 $G \approx 1,003 \rightarrow$ zpřesnění $a = 2,767$ au.



Podstata Gaussovy metody

heliocentrické poziční vektory
v jedné rovině (zanedbáváme
poruchy), v časech t_i



$$\vec{r}_2 = c_1 \vec{r}_1 + c_3 \vec{r}_3$$

$$c_1 = \frac{\Delta SP_2 P_3}{\Delta SP_1 P_3}$$

$$c_3 = \frac{\Delta SP_1 P_2}{\Delta SP_1 P_3}$$

Gauss – metoda nejmenších čtverců

- Jak a kdy při výpočtech použil Gauss metodu nejmenších čtverců?

- Při prvních výpočtech dráhových elementů na podzim r. 1801 nebo posléze při znovuobjevení Ceres?

Dokladem věta v **Summarische Übersicht** ..., *hat man schon Beobachtungen von der 1 oder mehreren Jahre..., so halte ich den Gebrauch der **Differential -Änderung**, wobei man eine beliebige Zahl von Beobachtungen zum Grunde legen kann, für das beste Mittel“*
*..., jestliže používáme pozorování za 1 nebo více roků..., beru na zřetel metodu **diferenciálních odchylek**, s jejíž pomocí libovolný počet pozorování může být využit jako podklad, je to nejlepší metoda“*

Gauss nesděluje podrobnosti, výklad není v Summarische Übersicht zdaleka souvislý, všechny kroky výpočtů jakož i hodnoty používaných různých konstant nejsou uváděny, písemně podložené doklady z roku 1801 neexistují. Její použití je však zřejmé.

Gauss – metoda nejmenších čtverců

Calculus probabilitatis contra La Place defensus
Gott. Junii 17.

Zápis v Gaussově diáři 17.6.1798

Calculus probabilitatis contra La Place defensus

Výpočet pravděpodobnosti obhajovaný ve sporu s Laplacedem

Druhá kniha **Theoria motus corporum celestium**, třetí část **Určování dráhy z jakéhokoliv počtu pozorování**, čl. 179, Gauss uvádí: “... *the most probable system of values of the quantities...will be that in which the sum of the squares of the differences between the actually observed and computed values multiplied by numbers that measure the degree of precesion, is a minimum.* “ , dále v čl. 186: “...*Our principle, which we have use of since the year 1795, has lately been published by Legendre in the work ...* “

A. M. Legendre: **Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes**, Paris 1806.

Gauss Theoria Motus - metoda nejmenších čtverců

214

LIBR. II. SECT. III. Čl. 179

Ad observationes praecisionis *inaequalis* principium nullo iam negotio extendi potest. Scilicet si mensura praecisionis observationum, per quas inuentum est $V = M$, $V' = M'$, $V'' = M''$ etc. resp. per h , h' , h'' etc. exprimitur, i. e. si supponitur, errores his quantitibus reciproce proportionales in istis observationibus aequae facile committi potuisse, manifesto hoc idem erit, ac si per observationes praecisionis aequalis (cuius mensura = 1) valores functionum hV , $h'V'$, $h''V''$ etc. immediate inuenti essent = hM , $h'M'$, $h''M''$ etc.: quamobrem systema maxime probabile valorum pro quantitibus p , q , r , s etc. id erit, vbi aggregatum $hhvv + h'h'v'v' + h''h''v''v'' +$ etc. i. e. vbi summa quadratorum differentiarum inter valores reuera obseruatos et computatos per numeros qui praecisionis gradum metiuntur multiplicatarum fit minimum. Hoc pacto ne necessarium quidem est, vt functio-

Čl. 186

liter summa potestatum exponentis cuiuscunque paris in minimum abit. Sed ex omnibus his principiis nostrum simplicissimum est, dum in reliquis ad calculos complicatissimos deferremur. Ceterum principium nostrum, quo iam inde ab anno 1795 vsi sumus, nuper etiam a clar. Legendre in opere *Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cometes*, Paris 1806 prolatum est, vbi plures aliae proprietates huius principii expositae sunt, quas hic breuitatis causa supprimimus.

Ohlasy Gaussova objevu v Čechách

„Ale dlouhého trvání neměla radost tato rázu tak ideálního; oběžnička, již dáno jméno Ceres, nemohla delší dobu býti sledována a ztratila se konečně na dobro, nemajíc ještě dráhu přesně vyměřenou. Psalo se již 1. prosince 1801 a nově objevená a brzy zase ztracená hvězdička nebyla ještě na obloze nalezena.“

*„Mezi tím však uveřejnil jakýsi Dr. Gauss stručné, ale velmi přesné popsání jejího oběhu, **pravý to zatykač**, a sice na základě trojího pozorování, jež Piazzzi dne 2. a 22. ledna, pak 11. února provedl. Výpočet byl proveden podle zcela nových method a byly výsledky jeho tak správné, že již 7. prosince postihl Zach v této Gaussově dráze **nebeského úskoka**...“*

F. J. Studnička: **Na oslavu stoleté památky narození K. B. Gausse.**
Čas. pro pěstování matematiky a fysiky, vol. 6 (1877), p. 146 – 148.

Objev Neptunu

Merkur, Venuše, Země, Mars, Jupiter, Saturn

r. 1766 německý matematik a fyzik J. D. Titius

r. 1772 německý matematik a astronom J. E. Bode

Johann Daniel Titius

1729-1796



Johann Elert Bode

1747-1826



Titiusovo – Bodeovo pravidlo

$$a_k = 0,4 + 0,3 \times 2^k \quad (k = -\infty, 0, 1, 2, \dots)$$

Objev Uranu

březen 1781: anglický astronom **W. Herschel (1738 - 1822)**

- objev Uranu pro $k = 6$

T. B. pravidlo $a = 19,6$ au,

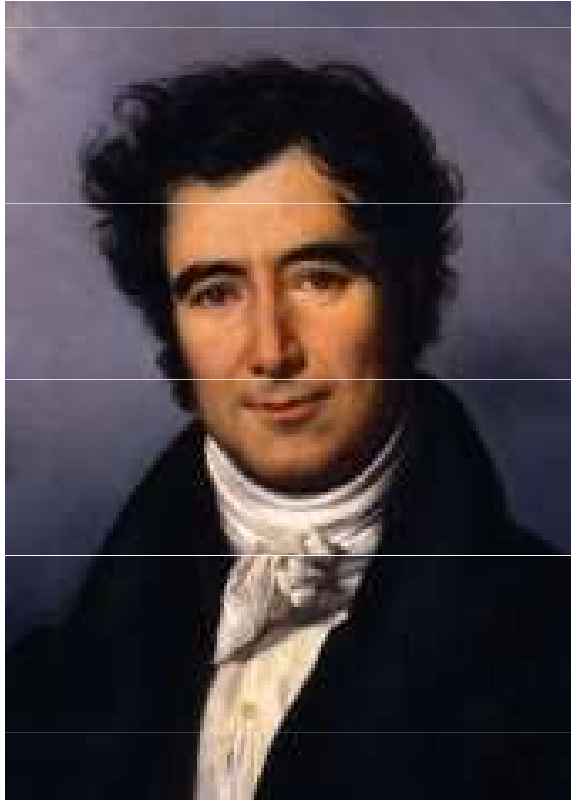
reálná velká poloosa $a = 19,2$ au



Ceres, Pallas, Juno, Vesta
považovány za planety ~ 1850

Urbain Jean Le Verrier 1811 - 1877

problém Uranu (Neptun)

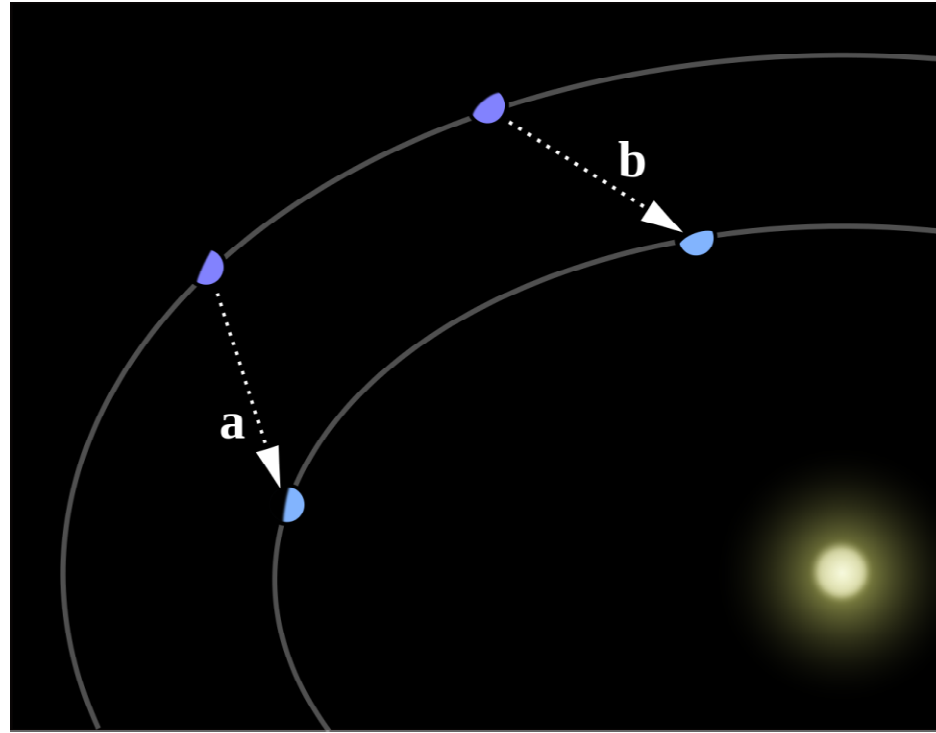


Le Verrier:
chemik, astronom, matematik



Dominique François Arago 1786 -1853,
léto 1845 → Le Verrier řešení problému Uranu

Problém Uranu



pozorování Uranu, zrychlování pohybu v letech 1781 - 1830,
od roku 1831 zpomalování

Alexis Bouvard 1767 - 1843

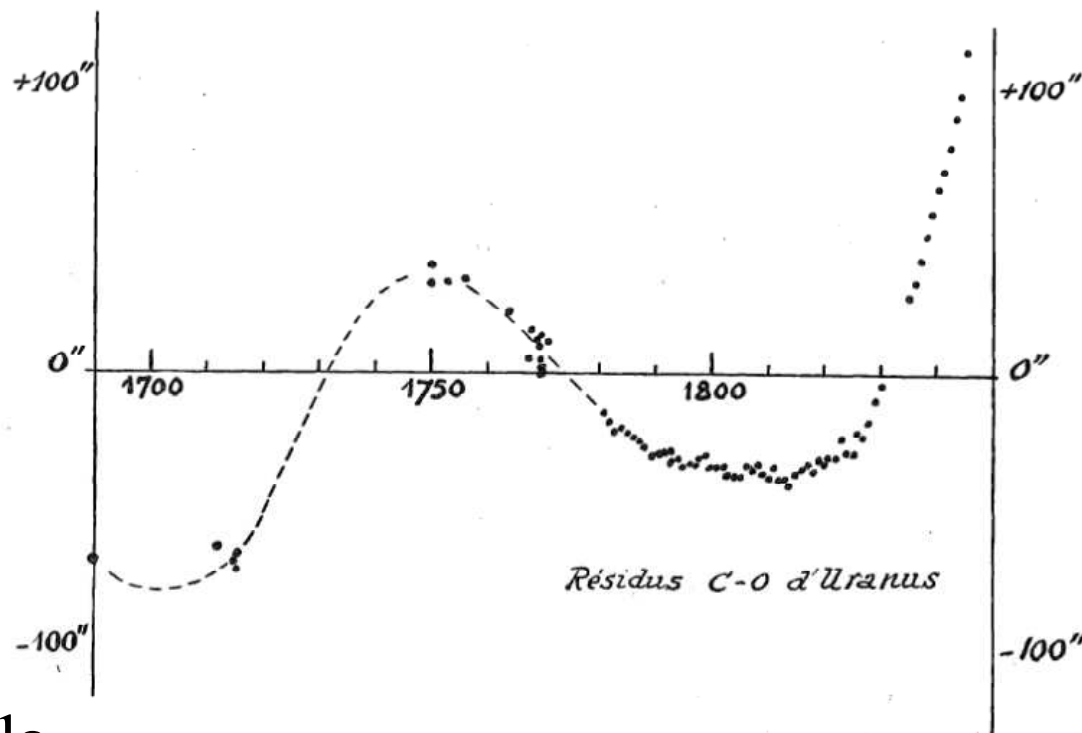
stará pozorování → výpočet dráhových elementů → teoretické polohy
→ **velké nepřesnosti**, nevysvětlitelné pozorovacími chybami

nová pozorování → výpočet dráhových elementů → zlepšení teoretické polohy → **nesoulad se starými pozorováními**

teorie Uranu r. 1781 - 1820: 5",
stará pozorování se rozcházela
o (40" - 70") , tedy (8 - 14)krát
převyšovaly chyby pozorovatelů

r. 1821 *opozice Neptunu*
vzhledem k Uranu

r. 1832 výrazné zpomalování
pohybu Uranu, teorie nevyhovovala



A. Danjon: Le centenaire de la découverte de Neptune. Ciel et Terre, **62**
(1946), p. 369 - 383.

Le Verrier: historie 1845 - 1846

- **10. listopad 1845** - poruchy Uranu způsobené Jupiterem a Saturnem neobjasňují nepravidelnosti jeho pohybu
- **1. červen 1846** - vysvětlení → zamítnutí jiných hypotéz, existence vnější planety, její poloha pro 1.1.1847, propočítání poruch při $M_N = (1/10\,000 - 1/4700) M_{S1}$
- **31. srpen 1846** - dráhové elementy nové planety, její hmotnost $M_N = 1/9300 M_S$, poloha - hel. délka, jasnost ≈ 8 mag, disk 3“
extrémně rozsáhlé výpočty, rozvinutí teorie poruch, Jupiter, Saturn, **neznámá planeta, propočítání jejího poruchového vlivu**, určena její poloha z analýzy dráhového pohybu Uranu, postupně narůstající přesnost řešení → 1°

interpretační problém, řešení nerovností pohybu Uranu

přímý problém, propočítání poruchových sil neznámé planety - Neptunu

inverzní problém, určení parametrů Neptunu - hmotnosti, dráh. elem.

Le Verrier - druhá práce

Srovnání pozorovaných a vypočítaných poloh Uranu -
pozorování nejsou v souladu s teorií

** „Soustředil jsem se na seriózní objasnění rozdílů vypočítaných a pozorovaných poloh Uranu způsobených působící neznámou silou...“*

Vyvrácení hypotéz 1 - 3 nepravidelností pohybu Uranu:

1. Velký měsíc Uranu
2. Komety
3. Meziplanetární hmota
- 4. Neznámá planeta**

Hypotéza o existenci rušící planety → zavedení oprav k dráhovým elementům Uranu, započtení vlivu Neptunu - inverzní problém poruch, předběžné výsledky.

*U. J. Le Verrier: Recherches sur les mouvements d'Uranus:.. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **22**, (1846), 907 - 918.

Le Verrier - druhá práce

« *Est-il possible que les inégalités d'Uranus soient dues à l'action d'une planète, située dans l'écliptique, à une distance moyenne double de celle d'Uranus? Et, s'il en est ainsi, où est actuellement située cette planète? Quelle est sa masse? Quels sont les éléments de l'orbite qu'elle parcourt?* »

Le Verrier v *: „ *Je možné, že nerovnosti Uranu by mohly být způsobeny působením neznámé planety nalézající se na ekliptice v přibližně dvojnásobné vzdálenosti od Slunce než Uran. Jestliže ano, kde se planeta aktuálně nachází? Jaká je její hmotnost? Jaké jsou její dráhové elementy?*“

*U. J. Le Verrier: Recherches sur les mouvements d'Uranus:. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **22**, (1846), 907 - 918.

Le Verrier - třetí práce

nová pozorování Uranu, velikost rádius vektoru

- Airy → reakce na **druhou práci** - dopis Le Verrierovi - zahrnutí korekcí v rádius vektoru - již provedeno
- v kvadraturách úhel Uran - Země - Slunce pravý, při pozorováních registrujeme poruchy rádius vektoru Uranu
- rozdíly pozorované a propočítané geocentrické délky jsou vyvolány jak chybami teorie v heliocentrické délce i v délce rádius vektoru
- při pozorování v kvadraturách chyby rádius vektoru se projevují nejvýrazněji

Le Verrier - třetí práce, klíčové problémy:

teorie: zahrnutí poruch v délce i ve velikosti rádius vektoru

II. Keplerův zákon $r^2 \frac{d\theta}{dt} = konst.$

Le Verrier: *Čím jsou vyvolány poruchy velikostí rádius vektorů Uranu ?
Jejich proměnnost není způsobena poruchami známých planet.*

Analýza pomocí dobového vztahu* .

$$\frac{d^2}{dt^2}(r\Delta r) + \frac{\mu}{r^3} r\Delta r + 2 \int \frac{dR}{dt} + r \frac{dR}{dr} = 0$$

r... délka rádius vektoru, R... poruchová funkce, $\mu = n^2 a^3$

Sir George Biddell Airy (1801 - 1892)
královský astronom 1835 - 1881



*G. B. Airy: *Mathematical Tracts on the Lunar and Planetary Theories.*
Cambridge University Press, Cambridge 1842, p. 67.

Le Verrier: Uran - Neptun

Počátek času 1.1.1800 00.00 hod., výchozí - dráhové elementy

Bouvarda pro eliptickou dráhu $a = 19,182\ 729$ au.

$n = 4,284\ 901^\circ$ stř.den.poh. $e = 0,046\ 611$

$i = 0^\circ\ 46'\ 28''$

z pozorování **1781 - 1820**

Le Verrier: **1690 - 1845**

- kombinoval údaje ze starých a nových pozorování (celkem ≈ 300)

- **nutná zjednodušení při zpracování pozorovacích dat**

- postupná redukce velkého počtu rovnic, seskupení pozorování ve zvolených časových intervalech, v závěru výpočtu řešení celkem 26 rovnic pro 12 \rightarrow **8 + 1** neznámých dráhových elementů obou planet, volba 40 různých číselných hodnot - varianty výpočtů

E. A. Grebenikov, J. A. Rjabov: Poiski i otkrytija planet. Nauka, Moskva 1984.

Le Verrier: výpočet Uranu a Neptunu

- nepřesnosti v skutečné délce Uranu
- dráhový sklon hledané planety velmi malý (Uran $- \frac{3}{4}^\circ$), proto zanedbání $i = 0$, pohyb planet v rovině ekliptiky, $R \sim a$
- dráhové elementy Uranu $a, e, \varepsilon, \omega$ (Bouvard) + $\delta a, \delta e, \delta \varepsilon, \delta \omega$,

hledané planety Neptunu $a_1, e_1, \varepsilon_1, \omega_1$

hmotnosti m a m_1

$$n^2 a^3 = G(m_S + m)$$

$$n_1^2 a_1^3 = G(m_0 + m_1)$$

$$m_S \gg m, m_1$$

• předpoklad $\frac{a}{a_1} = \frac{1}{2}$

$$n^2 = 8n_1^2$$

Le Verrier: využití Titiova - Bodeova vztahu

Box 2.1 The Law of Titius-Bode

In 1772, the German astronomer Johann Daniel Dietz, called Titius, showed that it is possible to approximately represent the distances of planets from the Sun by the following empirical relation:

$$a = 0.4 + 0.32^{n-1},$$

where a is the semi-major axis of the orbit expressed in astronomical units (the semi-major axis of the Earth's orbit) and n represents the consecutive integers. At first unnoticed, this relation was later publicized by the German astronomer Johann Elert Bode. Here is how it represents the distances of the planets from the Sun.

	Mercury	Venus	Earth	Mars		Jupiter	Saturn	Uranus	Neptune
n	∞	1	2	3	4	5	6	7	8
a (calc.)	0.40	0.70	1.00	1.60	2.80	5.20	10.0	19.6	38.8
a (real)	0.39	0.72	1.00	1.52	–	5.20	9.55	19.2	30.1

Porovnání Le Verrier → současnost

Table 2.1 Values of principal elements of the orbit of Neptune

Value	Le Verrier	Actual value
Semi-major axis of orbit (a.u.) ^a	36.154	30.0690
Sidereal period of revolution (years)	217.387	163.723
Eccentricity	0.10761	0.008586
Mass (solar masses)	1/9,300	1/19,424
Mass (earth masses)	36	17.14

^aThe astronomical unit (a.u.) is equal to the semi-major axis of the Earth's orbit, i.e. $1.496 \cdot 10^8$ km

Neptun: $a = 30$ au, $T = 164$ roků, $M_N = 1,0 \cdot 10^{26}$ kg

nepřesná velikost velké poloosy a → tudíž i velikosti oběžné doby T

Le Verrier předpokládal rezonanci $3 : 1$, reálná spíše $2 : 1$

a , e nepřesné - příliš slabé poruchové působení, částečně

kompenzováno reálně větší hmotností Neptunu stanovenou po nalezení

Tritonu Lassellem (1799 - 1880) již 10. října 1846

nalezení Neptunu šťastná náhoda ?

Dopis Le Verrier → Galle

À Monsieur J. G. Galle,
Astronome à l'Observatoire Royal de Berlin à Berlin.

Paris, le 18 Septembre 1846.

Monsieur,—J'ai lu avec beaucoup d'intérêt et d'attention la réduction des observations de Roemer, dont vous avez bien voulu m'envoyer un exemplaire. La parfaite lucidité de vos explications, la complète rigueur des résultats que vous nous donnez, sont au niveau de ce que nous devons attendre d'un aussi habile astronome. Plus tard, Monsieur, je vous demanderai la permission de revenir sur plusieurs points qui m'ont intéressé, et en particulier sur les observations de Mercure qui y sont renfermées. Aujourd'hui je voudrais obtenir de l'infatigable observateur qu'il voulait bien consacrer quelques instants à l'examen d'une région du ciel, où il peut rester une Planète à découvrir. C'est la théorie d'Uranus qui m'a conduit à ce résultat. Il va paraître un extrait de mes recherches dans les *Astronomische Nachrichten*. J'aurai donc pu, Monsieur, me dispenser de vous en écrire, si je n'avais eu à remplir le devoir de vous remercier pour l'intéressant ouvrage que vous m'avez adressé.

Vous verrez, Monsieur, que je démontre qu'on ne peut satisfaire aux observations d'Uranus qu'en introduisant l'action d'une nouvelle Planète, jusqu'ici inconnue; et ce qui est remarquable, il n'y a dans l'écliptique qu'une seule position qui puisse être attribuée à cette Planète perturbatrice. Voici les éléments de l'orbite que j'assigne à cet astre :

Demi-grand axe de l'orbite	36.154
Durée de la révolution sidérale	217.387 ans
Excentricité	0.10761
Longitude du Perihelie	284.45'
Longitude moyenne 1 ^{er} Janvier, 1847,	318.47'
Masse	1/9300
Longitude Héliocentrique vraie au 1 ^{er} Jan.	
1847	326.32'
Distance au Soleil	33.06

La position actuelle de cet astre montre que nous sommes actuellement, et que nous serons encore, pendant plusieurs mois, dans des conditions favorables pour le découvrir.

Dopis Le Verrier → Galle

Pane, dnes bych rád vymohl od neúnavného pozorovatele, aby laskavě věnoval několik okamžiků zkoumání určité oblasti oblohy, kde může být nalezena jedna planeta. K tomuto výsledku mne přivedla teorie Uranu.

*Výtah z mých výzkumů vyjde v nejbližší době v **Astronomische Nachrichten**.... Uvidíte, vážený pane, že dokazují, že nelze pozorováním Uranu vyhověti matematicky jinak, než zavedením vlivu nové planety, až dosud neznámé. Zajímavé je, že v ekliptice je pouze jedno místo, na kterém může být tato rušící planeta. Tu jsou elementy dráhy, které jsem přisoudil tomuto tělesu:*

<i>velká poloosa dráhy</i>	<i>36, 154 au.</i>
<i>siderická oběžná doba</i>	<i>217,387 roků</i>
<i>excentricita</i>	<i>0,10761</i>
<i>délka perihélia</i>	<i>284° 45'</i>
<i>střední délka 1. ledna 1847</i>	<i>318° 47'</i>
<i>hmotnost</i>	<i>1/9300</i>
<i>pravá heliocentrická délka 1. ledna 1847</i>	<i>326° 32'</i>
<i>vzdálenost od Slunce</i>	<i>33,06 a.u.</i>

Dopis Le Verrier → Galle

Nynější poloha tělesa ukazuje, že máme a ještě několik měsíců budeme mít příznivé podmínky k jeho objevení.

Mimoto můžeme z velikosti jeho hmotnosti usouditi, že velikost jeho zdánlivého průměru je větší než 3“ . Je to takový průměr, že může být rozlišen v dobrých dalekohledech od neskutečného průměru hvězd, který vzniká následkem různých vad čoček.

Přijměte, vážený pane, ujištění mé velké úcty.

Váš oddaný služebník

U.J. Le Verrier

J. G. Galle 1812 - 1910 + L. H. d'Arrest 1822 - 1875



z dráhových výpočtů Leverriera → souřadnice neznámé
planety $\alpha = 327^{\circ} 27'$ $\delta = - 13^{\circ} 24'$

pozorování „objektu“:

1. rychlý pohyb na pozadí hvězd
2. pozorovaný disk 2“ - 3“
3. mapy K. Bremikera 1804 - 1877

**nalezení Neptunu -
šťastná náhoda ?**

J. G. Galle, H. L. d'Arrest: nalezení Neptunu 23/24. 9. 1846

Adams - $2\ 1/2^\circ$

rozhraní Vodnáře – Kozoroha

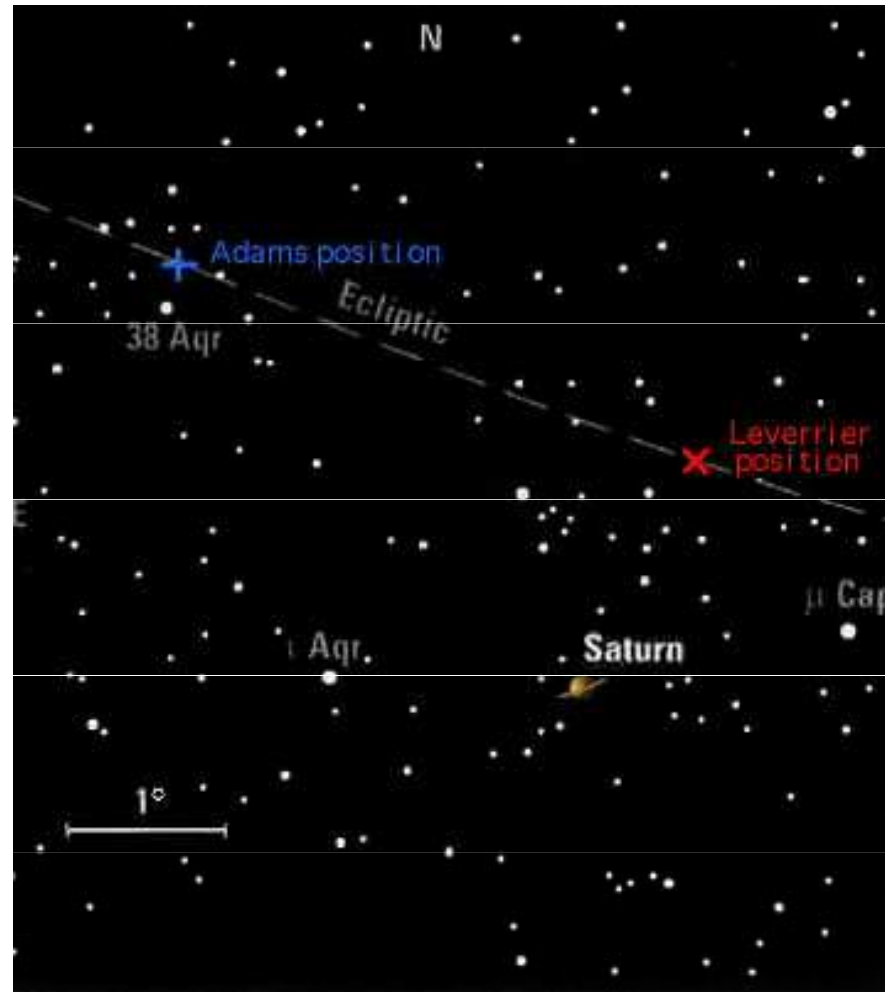


Le Verrier - 1°



A fragment of Bremiker's celestial map on which a German hand (Galle's?) has plotted the position of Neptune predicted by Le Verrier (*Neptun bereibnet*) and the actual position (*Neptun beobachtet*). The position predicted by Adams is also indicated

Nalezení Neptunu



vypočítaná poloha Neptunu **Adams**, **Le Verrier**

Dopis Galleho → Le Verrierovi

Berlin, le 27 Sept. 1846

Monsieur,

La planète, dont vous avez signalé l'existence, réellement existe.
Le même jour, où j'ai reçu votre lettre, je trouvais une étoile de 8^{me} grandeur,
qui n'était pas inscrite dans l'excellente carte Bora XXI (destinée par M.
le D^r Bremiker) de la collection de cartes célestes publiée par l'Académie
Royale de Berlin. L'observation du jour suivant décida que c'était la planète cherchée.
Nous l'avons comparée, M^r Encke en moi, par la grande lunette de Fraunhofer
avec une étoile de 8^{me} grandeur (α) Bessel zone 119. 21^h 50^m 31^s 00 - 13° 30' 9^h 9
et nous avons trouvé :

Temps moy. de Berlin
Sept. 23. 12^h 0^m 14^s 6 Plan. = (α) + 21' 21^s en R
= (α) + 1.36,8 en Déclin.

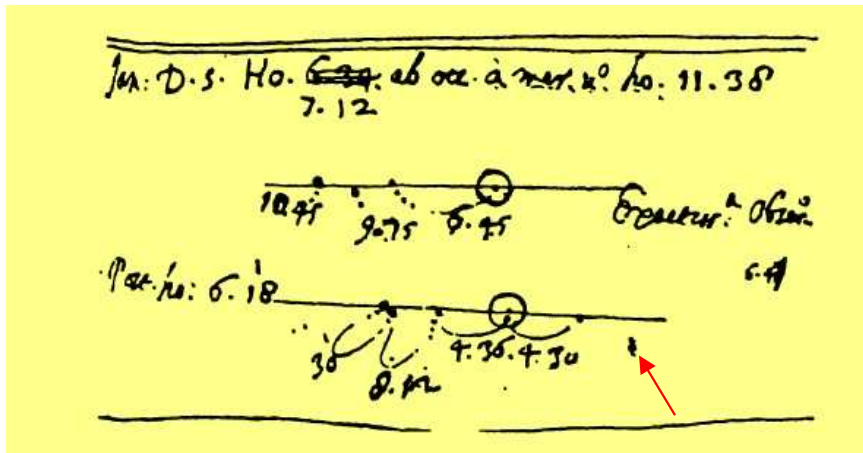
Pane,

„planeta, jejíž polohu jste mi ukázal **skutečně existuje**. V ten den, kdy jsem obdržel Váš dopis, jsem objevil hvězdu 8 mag, nezachycenou na výborné mapě (sestavené dr. Bremikerem) z hvězdného atlasu Berlínské akademie věd. Pozorování prováděná následující noc potvrdila, že jde o hledanou planetu. Já a pan Encke, jsme pozorovali velkým fraunhoferovským refraktorem a určili jsme polohu planety ve vztahu k srovnávací hvězdě...“

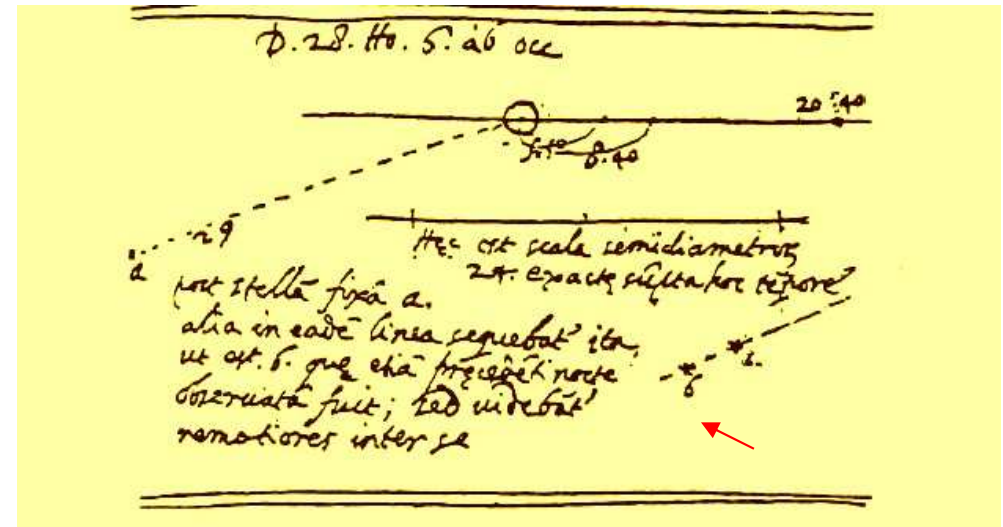
Galileo Galilei 1564 - 1642

předobjevová pozorování Neptunu

pozorovací deník: 28. ledna 1613: „za hvězdou *a* následuje další označená *b*, která byla pozorována rovněž předcházející noci, ale tehdy se zdály být dále od sebe...“



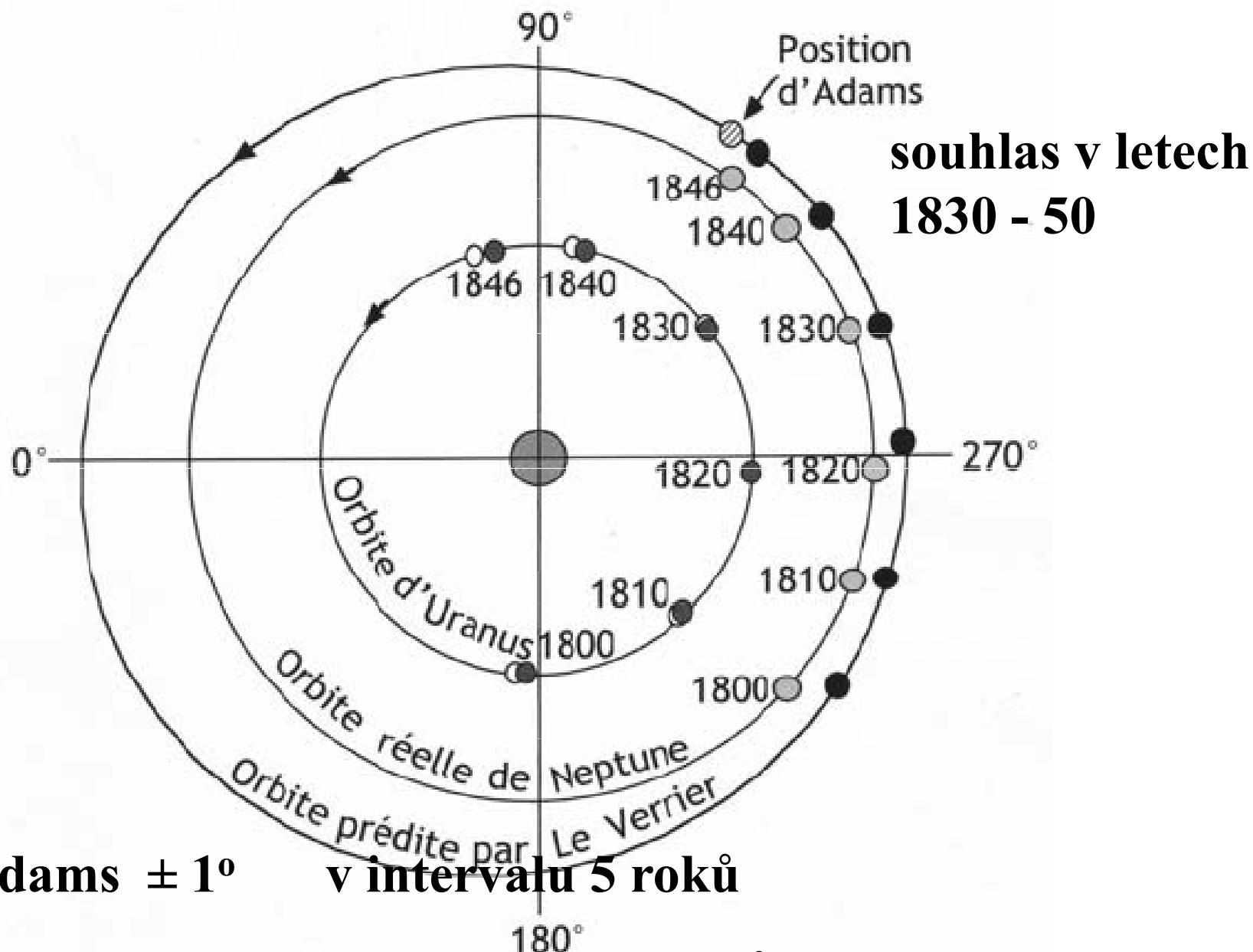
26.1.1613 pozorovací deník



28.1.1613 pozorovací deník

Ch. Kowal, O, Drake: Galileo's observations of Neptune. Nature **287** (1980), p. 311 - 313.

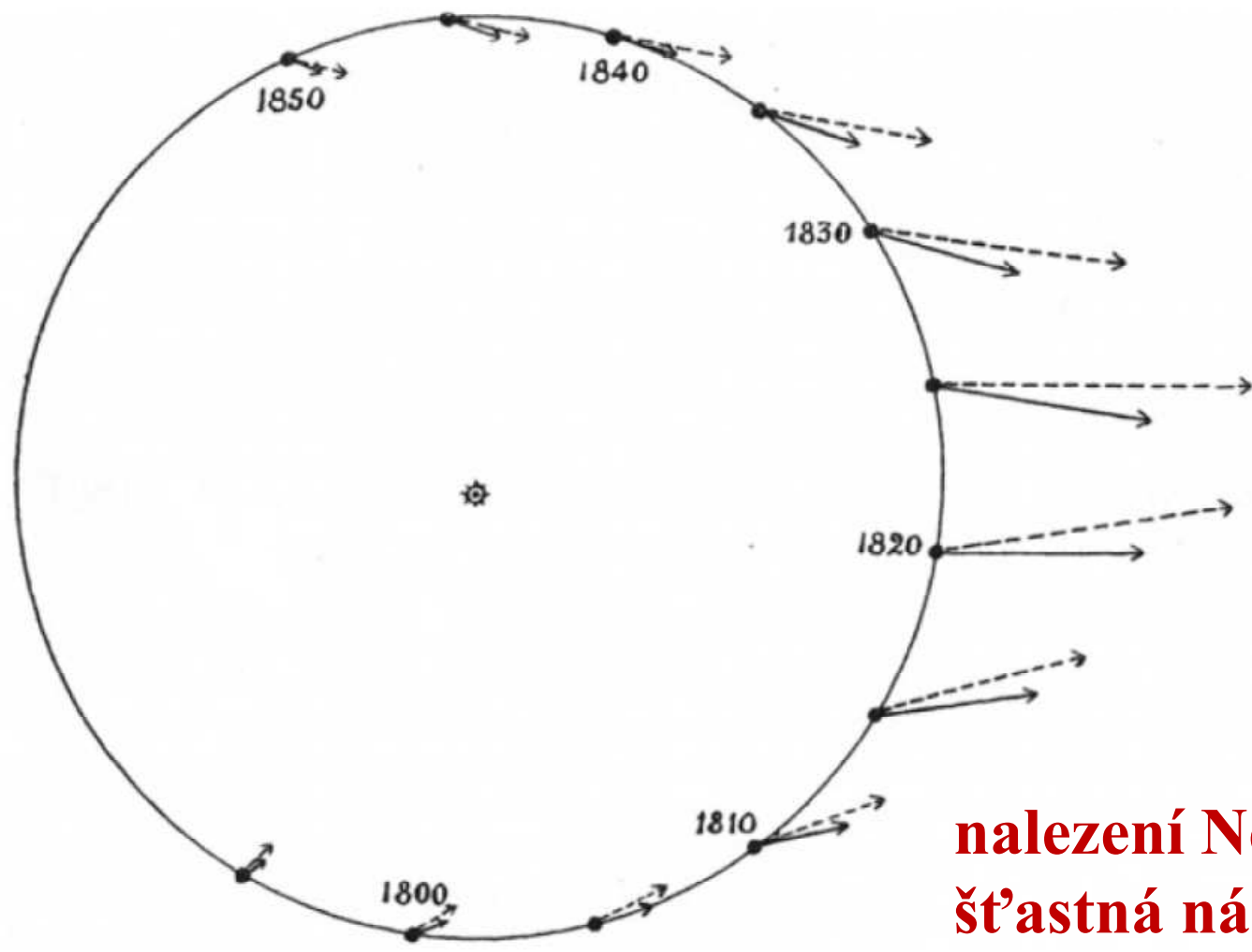
Porovnání výpočtů Adams x Le Verrier



přesnost: Adams $\pm 1^\circ$ v intervalu 5 roků

Le Verrier $\pm 1^\circ$ v intervalu 12 roků

Poruchové působení Neptunu na Uran

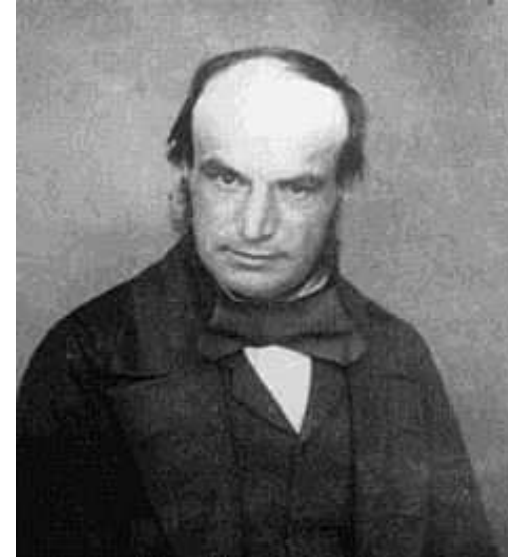


**nalezení Neptunu –
šťastná náhoda ?**

Fig. 2.14 Comparison of the perturbing force exerted on Uranus by Neptune at different epochs (full arrows) and by the hypothetical planet of Le Verrier (dashed arrows). One sees that the direction of the perturbing force exerted by the hypothetical planet is not in line with Uranus (the discovery of Neptune with Uranus is too late by 1½ years). However, the intensity of the perturbing force is too large

směry a velikosti poruchových sil Le Verrierem vypočítaných - - - - -
blízké reálným - - - - - do roku 1800 nevýrazné

Le Verrier x John Couch Adams 1819 - 1892



Orbital Elements	LeVerrier	Adams	Neptune
Semi-major Axis (A.U.)	36.15	37.25	30.07
Eccentricity	0.1076	0.1206	0.0086
Longitude of Perihelion	284° 45'	299° 11'	44°
Mass of sun/Mass of Neptune	9300	6666	19300
True Longitude (at time of discovery)	326° 0'	329° 27'	326° 57'

C - O, Le Verrier a J. C. Adams

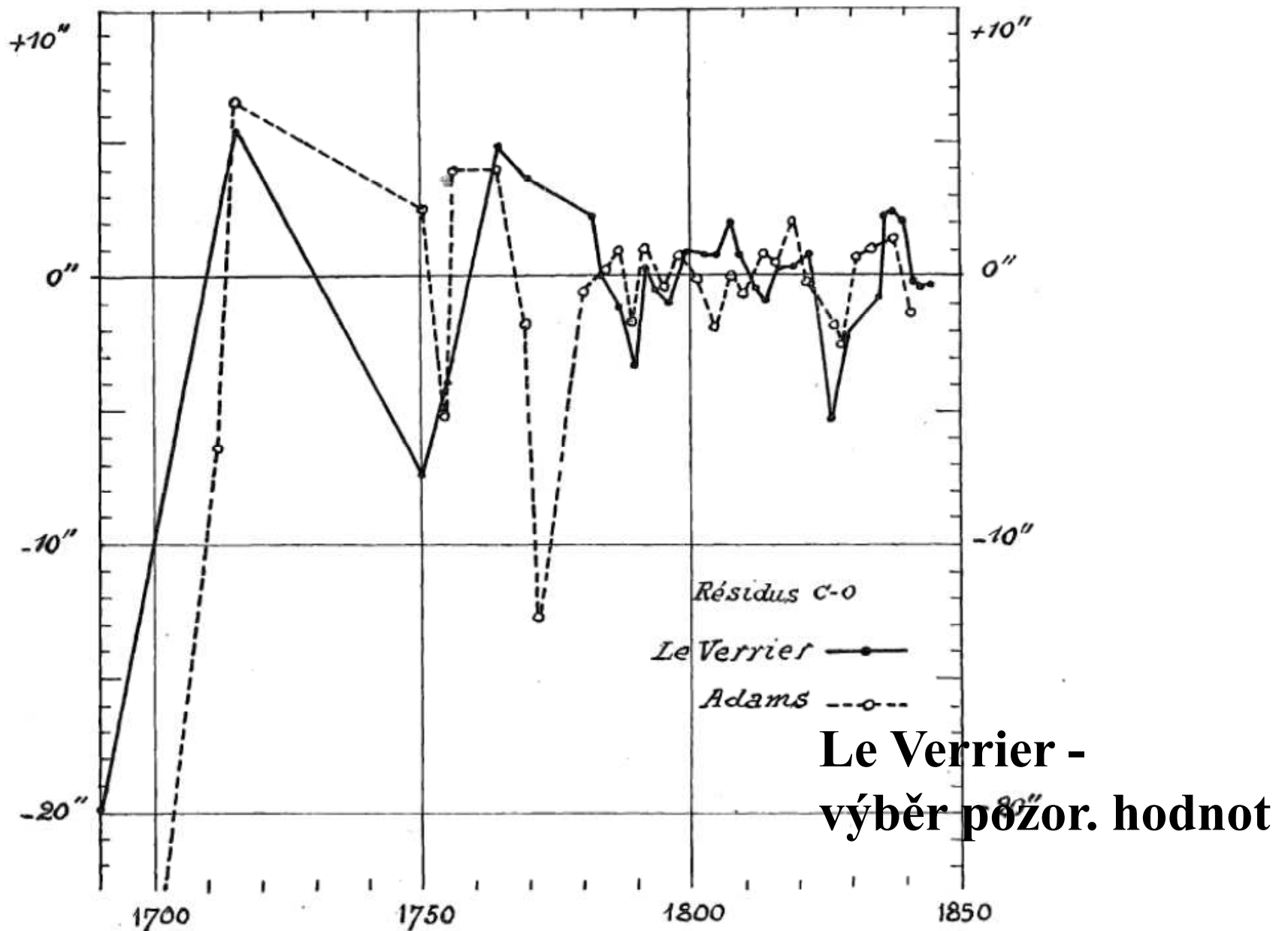


FIG. 2. — Ecart entre les longitudes calculées et les longitudes observées d'Uranus, compte tenu des perturbations causées par la planète troublante hypothétique.

Le Verrier - 1846

rukopis - poruchové působení Saturnu a Jupiteru na Uran

(4)

Lalandier

Première Partie

Les Perturbations du mouvement elliptique
d'Uranus, dues aux actions de Saturne
et de Jupiter.

2. Pour établir, avec précision, les théories d'une
planète, dont le mouvement est déjà approximativement
connu, il faut, premièrement, en se basant sur les
lois de la gravitation universelle, et en tenant
compte de l'influence de toutes les masses, rechercher
avec soin la forme des expressions analytiques,
propres à représenter à une époque quelconque le
comportement de l'astre. Il faut, en second lieu, ~~se~~
~~baser~~ sur les lois de la gravitation disposer d'une série
~~exacte et nombreuse~~ d'observations, exactes et
nombreuses, réparties sur un intervalle de temps
considérable. Ces deux premières parties de la question
sont indépendantes l'une de l'autre. Il reste
ensuite à les rapprocher, à conclure de observations
les valeurs précises des constantes qui sont
restées indéterminées dans les formules, et qu'on
a pu réduire au plus petit nombre possible.