Základy zpracování geologických dat

testování statistických hypotéz

R. Čopjaková

Testování odlehlých hodnot

- Je některá hodnota souboru odlehlá? (Mám ji ze souboru vyřadit a nepracovat s ní při výpočtu dalších parametrů).

- Např. přítomnost náhodné chyby v analýzách, nebo přítomnost prvku ve výběrovém souboru, který nepochází ze studovaného základního souboru.

- Pro použití v analytické praxi k vyloučení odlehlých výsledků za předpokladu normality výběru je nejvhodnější **Grubbsův test** (parametrický)

- Dále se používá **Dean-Dixonův test** (neparametrický) - univerzální, nejen pro výběry s normálním rozdělením pravděpodobností, nebo neznám-li charakter rozdělení

Grubbsův test

- Při tomto testu se výsledky seřadí podle velikosti tak, že $x_1 < x_2 \ldots < x_n$, testujeme nejmenší i nevětší hodnotu

- Stanovení nulové hypotézy – Ho: hodnota x_1 není odlehlá
  Ho: hodnota x_n není odlehlá

- Výpočet testovacího kritéria:
  pro dolní odlehlou hodnotu

$$T_1 = \frac{\overline{x} - x_1}{S_n}$$

  pro horní odlehlou hodnotu

$$T_n = \frac{x_n - \overline{x}}{S_n}$$

kde Sn je definováno

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

n je počet měření (do četnosti 100)

Grubbsův test

- Stanovení kritické hodnoty Grubbsova rozdělení ze statistických tabulek Tk (α;n)

- Hodnota T_n a T_1 se porovná s kritickou hodnotou Grubbsova rozdělení T_k (α;n)

	T_α	
n	α = 0,05	α = 0,01
3	1,412	1,416
4	1,689	1,723
5	1,869	1,955
6	1,996	2,130
7	2,093	2,265
8	2,172	2,374
9	2,237	2,464
10	2,294	2,540

- Je-li T_1 nebo $T_n \leq$ Tk, přijmeme nulovou hypotézu Ho, hodnota není odlehlá
- Je-li T_1 nebo $T_n >$Tk, zamítneme nulovou hypotézu Ho, testovanou hodnotu považujeme za odlehlou a hodnotu vyloučíme ze souboru dat.

Dean-Dixonův test

- Při tomto testu se výsledky seřadí podle velikosti tak, že $x_1 < x_2 \ldots < x_n$, testujeme nejmenší i nevětší hodnotu
- Stanovení nulové hypotézy – Ho: hodnota x_1 není odlehlá
  Ho: hodnota x_n není odlehlá
- Výpočet testovacího kritéria:
  pro dolní odlehlou hodnotu

$$Q_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{R}$$

  pro horní odlehlou hodnotu

$$Q_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{R}$$

kde R je variační rozpětí souboru dat

- Použití testu do četnosti souboru $n \leq 30$

Dean-Dixonův test

	Q_α	
n	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$
3	0,941	0,988
4	0,765	0,889
5	0,642	0,760
6	0,560	0,698
7	0,507	0,637
8	0,468	0,590
9	0,437	0,555
10	0,412	0,527

- Stanovení kritické hodnoty Dean-Dixonova rozdělení ze statistických tabulek Qk (α;n)
- Hodnota Q_n a Q_1 se porovná s kritickou hodnotou Dean-Dixonova rozdělení Q_k (α;n)
- Je-li Q_1 nebo $Q_n \leq$ Qk, přijmeme nulovou hypotézu Ho, hodnota není odlehlá
- Je-li Q_1 nebo $Q_n >$ Qk, zamítneme nulovou hypotézu Ho, testovanou hodnotu považujeme za odlehlou a hodnotu vyloučíme ze souboru dat.

Příklad testování odlehlých hodnot; Dean-Dixonův test

- Máme soubor 10 měření. Ověřte, zda je některá hodnota odlehlá:
  2,1 2,9 3,1 3,3 3,3 3,4 3,5 3,5 3,6 3,9
- Ho – hodnota 2,1 není odlehlá
- Spočtení testovacího kritéria

$$Q_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{R}$$

- Q1 = (2,9-2,1)/(3,9-2,1) = 0,8/1,8 = 0,444
- Qk (α;n) = Qk (0,05;10) = 0,412
- 0,444 > 0,412 tedy Q1 > Qk, nulovou hypotézu zamítáme, hodnotu považujeme za odlehlou a ze souboru ji vyloučíme

- testujeme dále pro nový soubor dat po odstranění odlehlé hodnoty
- 2,9 3,1 3,3 3,3 3,4 3,5 3,5 3,6 3,9
- Ho – hodnota 2,9 není odlehlá
- Spočtení testovacího kritéria

- Q1 = (3,1-2,9)/(3,9-2,9) = 0,2/1 = 0,2
- Qk (α;n) = Qk (0,05;9) = 0,437
- 0,2 ≤ 0,437 tedy Q1 ≤ Qk, nulovou hypotézu přijmeme, hodnotu nepovažujeme za odlehlou

- testujeme dále zda je v souboru dat horní odlehlá hodnota
- 2,9 3,1 3,3 3,3 3,4 3,5 3,5 3,6 3,9
- Ho – hodnota 3,9 není odlehlá
- Spočtení testovacího kritéria

$$Q_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{R}$$

- Qn = (3,9-3,6)/(3,9-2,9) = 0,3/1 = 0,3
- Qk (α;n) = Qk (0,05;9) = 0,437
- 0,3 ≤ 0,437 tedy Qn ≤ Qk, nulovou hypotézu přijmeme, hodnotu nepovažujeme za odlehlou

Studentův t-test

- Předpoklad normality výběrových souborů
- **Studentův t-test** - často používaná metoda testování statistických hypotéz. V závislosti na situaci, kdy se používá, rozlišujeme 4 typy Studentova t-testu:
- **jednovýběrový t-test**, který slouží k porovnání střední hodnoty výběrového souboru s konstantou (H_0: $x = \mu_0$)

  jednovýběrový t-test o střední hodnotě
- **dvouvýběrový t-test**, který slouží k porovnání středních hodnot dvou výběrových souborů (H_0: $\mu_1 - \mu_2$ = *konstanta; nejčastěji 0*);
  - **dvouvýběrový t-test párový – rozsahy obou výběrů jsou stejné** N1=N2; Opakované přeměřování stejných vzorků; Závislost mezi náhodnou veličinou X a Y

    párový t-test shodnosti výsledků
  - **dvouvýběrový t-test nepárový – rozsah výběrů nemusí být stejný** N1 nemusí být rovno N2; Proměřování dvou sad různých vzorků; Nezávislost mezi náhodnou veličinou X a Y

    a) *t-test shodnosti výsledků při rovnosti rozptylů* $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

    b) *t-test shodnosti výsledků při nerovnosti rozptylů* $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Jednovýběrový Studentův t-test o střední hodnotě

Testování přítomnosti soustavné (systematické) chyby - Test správnosti výsledků

- slouží k porovnání střední hodnoty výběrového souboru s konstantou (H_0: $x = \mu$)
- Pracujeme s ***jedním výběrovým souborem***
- Aritmetický průměr výsledků série měření (výběrového souboru) je *správný*, pokud jeho rozdíl od skutečné hodnoty μ s určitou pravděpodobností (na zvolené hladině významnosti α) není statisticky významný.
- Skutečnou hodnotu μ obvykle neznáme a tedy ji nahrazujeme konvenčně správnou hodnotou (tzv. "analytické standardy",) nebo analýzou vzorku se známou koncentrací stanovované složky.

- Oboustranný test: srovnání střední hodnoty naměřených hodnot s deklarovanou hodnotou (hodnotou standardu) – test přítomnosti soustavné chyby
- Jednostranný test: srovnání, zda střední hodnota naměřených dat je menší (větší) deklarované hodnotě – např. test, zda koncentrace dané látky (např. v půdě) nepřekračují zákonem stanovenou normu.

Jednovýběrový Studentův t-test o střední hodnotě

- Formulujeme nulovou hypotézu

  oboustranný test $H_0: \bar{x} = \mu$, $H_A: \bar{x} \neq \mu$ **jednostranný test** Ho: $\bar{x} = \mu$, $H_A: \bar{x} < \mu$ ($\bar{x} > \mu$)

- Spočteme testovací kritérium

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{|\bar{x} - \mu|}{s}\sqrt{n}$$

S – je odhad směrodatné odchylky výběru

- Testovací kritérium má Studentovo rozdělení s stupni volnosti $\nu = n-1$
- Kritickou hodnotu stanovíme jako příslušný kvantil Studentova rozdělení pro n-1 stupnů volnosti

  pro oboustrannou variantu testu $T_k(1-\alpha/2;n-1)$

  pro jednostrannou variantu testu $T_k(1-\alpha;n-1)$

- t srovnám s T_k: pokud $t \leq T_k$, pak Ho – přijímám, rozdíl $|\bar{x} - \mu|$ je způsoben pouze náhodnými chybami a zjištěný výsledek je správný. V opačném případě je výsledek zatížen soustavnou chybou.

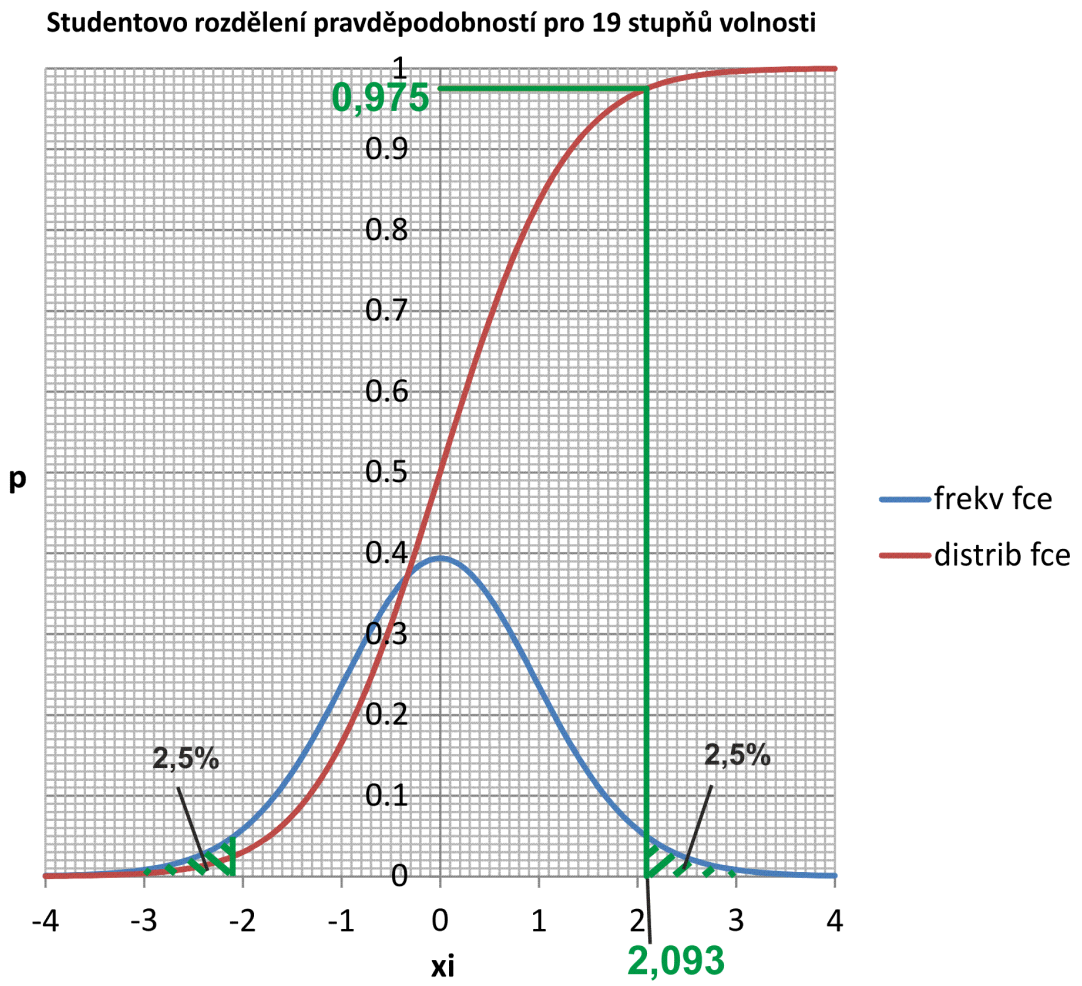
Stanovení kritické hodnoty (oboustranná varianta testu)

Grafické znázornění kritické hodnoty

Stanovení kritické hodnoty

a) pomocí funkcí v excelu T.INV

b) ze statistických tabulek



kritickou hodnotu v případě oboustranného testu stanovím jako hodnotu kvantilu $(1-\alpha/2)$ studentova rozdělení pro příslušný stupeň volnosti
pro hladinu významnosti 0,05 - tedy kvantil $_{0,975}$
Tk (kritická hodnota) hodnota kvantilu $_{0,975}$ pro ν=19 je 2,093

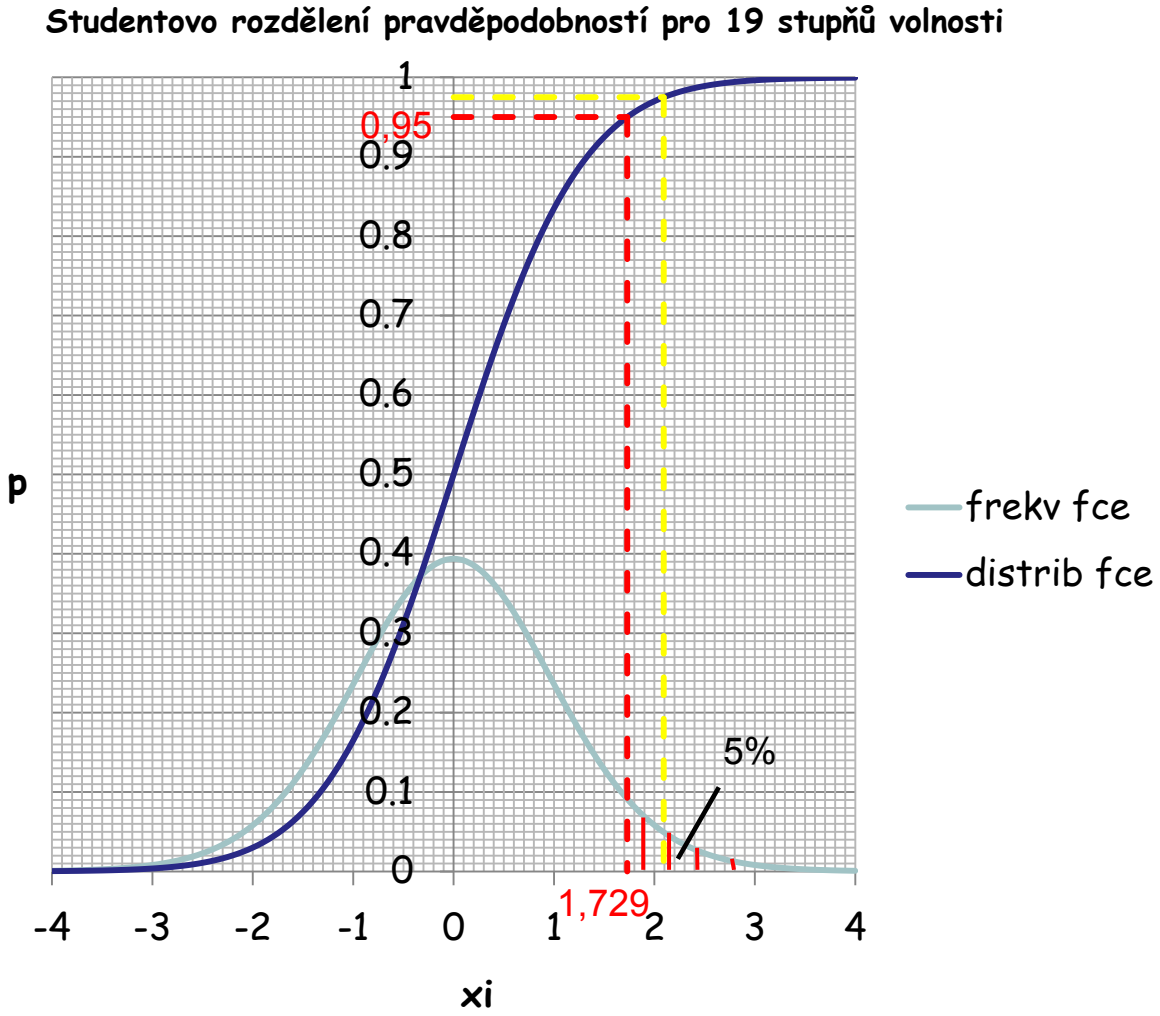
Stanovení kritické hodnoty (jednostranná varianta testu)

Grafické znázornění kritické hodnoty

Stanovení kritické hodnoty

a) pomocí funkcí v excelu T.INV

b) ze statistických tabulek



Stanovení kritické hodnoty u jednostranné varianty testu ze studentova rozdělení pro $\alpha = 5\%$. Tedy jako hodnotu kvantilu pro $(1-\alpha; \nu)$. Kritická hodnota Tk pro p(0,95) a stupně volnosti 19 je 1,729.

Kritickou hodnotu zjistím a) v Excelu

Novější verze MS Office

- T.INV (0.975;19) = 2,093 – stanovím hodnotu kvantilu pro pravděpodobnost 0,975 (tedy 1-α/2) pro daný počet stupňů volnosti
- T.INV.2T (0.05;19) = 2,093 - zadám hladinu významnosti s níž testuji a počet stupňů volnosti (samo si rozdělí α na dvě poloviny a dopočte 1-α/2)

pouze pro oboustranné varianty testů => problém při jednostranné variantě textu (nutno zadat dvojnásobnou α)

Starší verze MS Office –jen jeden typ funkce TINV

- TINV (0.05;19) = 2,093 - zadám hladinu významnosti s níž testuji a počet stupňů volnosti (analogicky pracuje jako T.INV.2T)

Kritickou hodnotu zjistím b) ze statistických tabulek

pro hladinu významnosti 0,05 – tedy hodnotu kvantilu (1-0,05/2)
a počet stupňů volnosti 19 (rozsah souboru = 20 měření)

Kvantily $t_{1-\alpha/2}$ Studentova t rozdělení pro dané stupně volnosti (ν = n-1)

St. volnosti	0,80	0,90	0,95	0,975	0,9875	0,995
1	1,376	3,078	6,314	12,706	25,452	63,657
2	1,061	1,886	2,920	4,303	6,205	9,925
3	0,978	1,638	2,353	3,182	4,176	5,841
4	0,941	1,533	2,132	2,776	3,495	4,604
5	0,920	1,476	2,015	2,571	3,163	4,032
6	0,906	1,440	1,943	2,447	2,969	3,707
7	0,896	1,415	1,895	2,365	2,841	3,499
8	0,889	1,397	1,860	2,306	2,752	3,355
9	0,883	1,383	1,833	2,262	2,685	3,250
10	0,879	1,372	1,812	2,228	2,634	3,169
11	0,876	1,363	1,796	2,201	2,593	3,106
12	0,873	1,356	1,782	2,179	2,560	3,055
13	0,870	1,350	1,771	2,160	2,533	3,012
14	0,868	1,345	1,761	2,145	2,510	2,977
15	0,866	1,341	1,753	2,131	2,490	2,947
16	0,865	1,337	1,746	2,120	2,473	2,921
17	0,863	1,333	1,740	2,110	2,458	2,898
18	0,862	1,330	1,734	2,101	2,445	2,878
19	0,861	1,328	1,729	2,093	2,433	2,861
20	0,860	1,325	1,725	2,086	2,423	2,845
∞	0,8416	1,2816	1,6448	1,9600	2,2414	2,5758

Jednovýběrový Studentův t-test o střední hodnotě

Reálný příklad

Proběhlo testování analytických laboratoří. Máme chemicky homogenní sklo s deklarovaným chemickým složením, v laboratoři provedeme 20 analýz na různých místech tohoto skla a spočteme průměrné koncentrace jednotlivých oxidů.

Deklarovaný obsah Al_2O_3 ve skle je **13,52 hm.%**

Výsledky laboratoře poskytly **průměrný obsah Al_2O_3 ve skle 13,31 hm.% a Sx 0,12**
Otázka je: liší se tato hodnota statisticky významně od hodnoty deklarované? Pracuje naše laboratoř dobře? Pracujeme při **hladině významnosti** $\alpha = 0{,}05$.

oboustranný test:

H_0 = naměřený obsah Al_2O_3 se významně neliší od deklarovaného obsahu; $\overline{X} = \mu$

H_A = naměřený obsah se významně liší od deklarovaného; $\overline{X} \neq \mu$

Spočteme testovací kritérium $t = \dfrac{|\overline{x} - \mu|}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}}$ = 7,83

Testovací kritérium má Studentovo rozdělení se stupni volnosti ν= n-1

Kritická hodnota - stanovíme jako příslušný kvantil Studentova rozdělení pro n-1 stupnů volnosti (fce T.INV) $T_k(1-\alpha/2;n-1) = t_k(0{,}975; 19) = 2{,}09$

t srovnám s T_k: pokud 7,83 > 2,09; pak Ho - nulovou hypotézu zamítám
Výsledek je zatížen soustavnou chybou – koncentrace Al_2O_3 stanovené v laboratoři nejsou správné.

Děkuji za pozornost