Reálné funkce

M1030 Matematika pro biology

7. 11. 2024

Definice a základní vlastnosti

Reálná čísla

Množina $\mathbb{R}$, aritmetické operace $+$, $\cdot$, relace $<$

Reálná čísla

Množina $\mathbb{R}$, aritmetické operace $+$, $\cdot$, relace $<$

$(x+y)+z = x+(y+z)$ $x+y = y+z$ $(\exists 0)(\forall x)\ x+0 = x$ $(\forall x)(\exists -x)\ x+(-x) = 0$	$\mathbb{R}$ s operací $+$ je abelovská grupa
$(xy)z = x(yz)$ $xy = yz$ $(\exists 1 \neq 0)(\forall x)\ 1x = x$ $(\forall x \neq 0)(\exists x^{-1})\ x^{-1}x = 1$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ s operací $\cdot$ je abelovská grupa
$x(y+z) = xy+xz$	distributivita
$x<y$ a $y<z \ \Rightarrow x<z$ $x<y$ nebo $y<x$ nebo $x=y$	lineární uspořádání
$x<y \ \Rightarrow x+z<y+z$ $x<y$ a $0<z \ \Rightarrow \ xz<yz$	operace $+$ a $\cdot$ jsou slučitelné s uspořádáním
množina $\mathbb{R}$ tvoří kontinuum, „nejsou v ní díry“, jedno-jednoznačným obrazem $\mathbb{R}$ je přímka	

Podmnožiny $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ přirozená čísla
- $\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ celá čísla
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} :\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$ racionální čísla
- $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ iracionální čísla

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Reálná čísla

Množina $\mathbb{R}$, aritmetické operace $+$, $\cdot$, relace $<$

Rozšířená množina reálných čísel: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) - \infty < x < \infty$

Reálná čísla

Množina $\mathbb{R}$, aritmetické operace $+$, $\cdot$, relace $<$

Rozšířená množina reálných čísel: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) - \infty < x < \infty$

Intervaly v $\mathbb{R}^*$:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$
- $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$
- $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$
- $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

Reálná čísla

Množina $\mathbb{R}$, aritmetické operace $+$, $\cdot$, relace $<$

Rozšířená množina reálných čísel: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) - \infty < x < \infty$

Intervaly v $\mathbb{R}^*$:

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : \; a < x < b\}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$
- $\langle a,b) = \{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x < b\}$, $a \in \mathbb{R}, \; b \in \mathbb{R}^*$
- $(a,b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : \; a < x \leq b\}$, $a \in \mathbb{R}^*, \; b \in \mathbb{R}$
- $\langle a,b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x \leq b\}$, $a \in \mathbb{R}, \; b \in \mathbb{R}$

Okolí bodů z $\mathbb{R}^*$:

- Symetrické ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} : \; a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$
- Ryzí symetrické ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} : \; a - \varepsilon < x < a + \varepsilon, \; x \neq a\}$
- Levé ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} : \; a - \varepsilon \leq x\}$
- Pravé ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} : \; x \leq a + \varepsilon\}$
- Ryzí levé ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} : \; a - \varepsilon < x\}$
- Ryzí pravé ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} : \; x < a + \varepsilon\}$
- h-okolí bodu ∞ $\{x \in \mathbb{R} : \; h < x\}$
- h-okolí bodu $-\infty$ $\{x \in \mathbb{R} : \; x < h\}$

Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

týden č.	0	1	2	3	4	5	6
počet	5	34	177	402	483	497	499

Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla y nějakému reálnému číslu x

$$x \mapsto y, \quad x \overset{f}{\mapsto} y, \quad y = f(x)$$

x – nezávisle proměnná, argument funkce
y – závisle proměnná, funkční hodnota

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

týden č.	0	1	2	3	4	5	6
počet	5	34	177	402	483	497	499

Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla y nějakému reálnému číslu x

$$x \mapsto y, \quad x \overset{f}{\mapsto} y, \quad y = f(x)$$

x – nezávisle proměnná, argument funkce
y – závisle proměnná, funkční hodnota

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	34	177	402	483	497	499

Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla y nějakému reálnému číslu x

$$x \mapsto y, \quad x \overset{f}{\mapsto} y, \quad y = f(x)$$

x – nezávisle proměnná, argument funkce
y – závisle proměnná, funkční hodnota

definiční obor funkce f – množina $D(f)$, z níž lze vybrat hodnoty argumentu
obor hodnot funkce f – množina $H(f)$ funkčních hodnot,

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f))y = f(x)\}$$

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	34	177	402	483	497	499

Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla y nějakému reálnému číslu x

$$x \mapsto y, \quad x \overset{f}{\mapsto} y, \quad y = f(x)$$

x – nezávisle proměnná, argument funkce
y – závisle proměnná, funkční hodnota

definiční obor funkce f – množina $D(f)$, z níž lze vybrat hodnoty argumentu
obor hodnot funkce f – množina $H(f)$ funkčních hodnot,

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f)) y = f(x)\}$$

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	34	177	402	483	497	499

$D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $H(f) = \{5, 34, 177, 402, 483, 497, 499\}$

Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla y nějakému reálnému číslu x

$$x \mapsto y, \quad x \stackrel{f}{\mapsto} y, \quad y = f(x)$$

x – nezávisle proměnná, argument funkce
y – závisle proměnná, funkční hodnota

definiční obor funkce f – množina $D(f)$, z níž lze vybrat hodnoty argumentu
obor hodnot funkce f – množina $H(f)$ funkčních hodnot,

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f)) y = f(x)\}$$

Zadávání funkce: tabulkou

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	34	177	402	483	497	499

$D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \; H(f) = \{5, 34, 177, 402, 483, 497, 499\}$

Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla y nějakému reálnému číslu x

$$x \mapsto y, \quad x \overset{f}{\mapsto} y, \quad y = f(x)$$

x – nezávisle proměnná, argument funkce
y – závisle proměnná, funkční hodnota

definiční obor funkce f – množina $D(f)$, z níž lze vybrat hodnoty argumentu
obor hodnot funkce f – množina $H(f)$ funkčních hodnot,

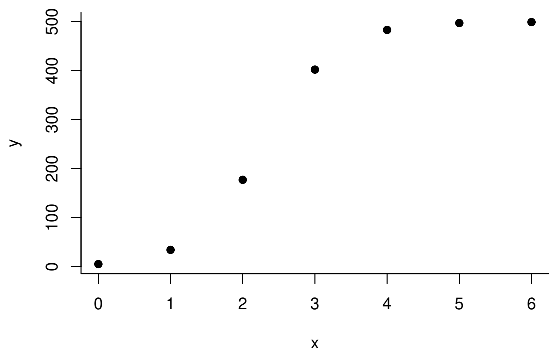
$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f)) y = f(x)\}$$

Zadávání funkce: tabulkou, grafem

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	34	177	402	483	497	499

$D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $H(f) = \{5, 34, 177, 402, 483, 497, 499\}$



Pojem funkce

Reálná funkce jedné reálné proměnné:

přiřazení určitého reálného čísla y nějakému reálnému číslu x

$$x \mapsto y, \quad x \overset{f}{\mapsto} y, \quad y = f(x)$$

x – nezávisle proměnná, argument funkce

y – závisle proměnná, funkční hodnota

definiční obor funkce f – množina $D(f)$, z níž lze vybrat hodnoty argumentu

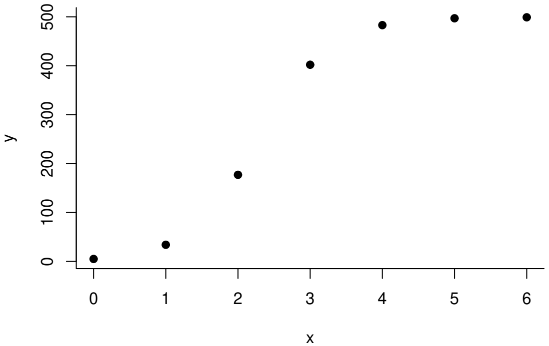
obor hodnot funkce f – množina $H(f)$ funkčních hodnot,

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D(f)) y = f(x)\}$$

Zadávání funkce: tabulkou, grafem, obecným předpisem

Motivace: Pozorování počtu octomilek v týdenních intervalech:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	34	177	402	483	497	499



$D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $H(f) = \{5, 34, 177, 402, 483, 497, 499\}$

$$y = f(x) = \frac{500}{1 + 99 \cdot 0{,}1353^x}$$

Ohraničenost:

f je *ohraničená shora*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, f(x) \leq h$
f je *ohraničená zdola*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, h \leq f(x)$
f je *ohraničená*, pokud $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f))\, h_1 \leq f(x) \leq h_2$

Ohraničenost:

f je *ohraničená shora*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, f(x) \leq h$
f je *ohraničená zdola*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, h \leq f(x)$
f je *ohraničená*, pokud $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f))\, h_1 \leq f(x) \leq h_2$

Periodičnost:

f je *periodická s periodou* $p > 0$ (je p-*periodická*, *má periodu* p), pokud

$$x \in D(f) \ \Rightarrow \ x + p \in D(f) \text{ a } f(x+p) = f(x)$$

Ohraničenost:

f je *ohraničená shora*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, f(x) \leq h$
f je *ohraničená zdola*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, h \leq f(x)$
f je *ohraničená*, pokud $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f))\, h_1 \leq f(x) \leq h_2$

Periodičnost:

f je *periodická s periodou* $p > 0$ (je p*-periodická*, *má periodu* p), pokud

$$x \in D(f) \;\Rightarrow\; x + p \in D(f) \text{ a } f(x+p) = f(x)$$

Platí: Je-li f p-periodická a $k \in \mathbb{N}$, pak je f také kp-periodická

Ohraničenost:

f je *ohraničená shora*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, f(x) \leq h$
f je *ohraničená zdola*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, h \leq f(x)$
f je *ohraničená*, pokud $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f))\, h_1 \leq f(x) \leq h_2$

Periodičnost:

f je *periodická s periodou* $p > 0$ (je p-*periodická*, *má periodu* p), pokud

$$x \in D(f) \;\Rightarrow\; x + p \in D(f) \text{ a } f(x+p) = f(x)$$

Platí: Je-li f p-periodická a $k \in \mathbb{N}$, pak je f také kp-periodická

$$x \in D(f) \Rightarrow x + p \in D(f) \Rightarrow x + 2p = (x+p) + p \in D(f) \Rightarrow \cdots$$
$$f(x+2p) = f\big((x+p)+p\big) = f(x+p) = f(x), \ldots$$

Ohraničenost:

f je *ohraničená shora*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, f(x) \leq h$
f je *ohraničená zdola*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, h \leq f(x)$
f je *ohraničená*, pokud $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f))\, h_1 \leq f(x) \leq h_2$

Periodičnost:

f je *periodická s periodou* $p > 0$ (je p-*periodická*, *má periodu* p), pokud

$$x \in D(f) \;\Rightarrow\; x + p \in D(f) \text{ a } f(x+p) = f(x)$$

Parita:

f je *lichá*, pokud $x \in D(f) \;\Rightarrow\; -x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$
f je *sudá*, pokud $x \in D(f) \;\Rightarrow\; -x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$

Jednoduché vlastnosti funkcí

Ohraničenost:

f je *ohraničená shora*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, f(x) \leq h$
f je *ohraničená zdola*, pokud $(\exists h)(\forall x \in D(f))\, h \leq f(x)$
f je *ohraničená*, pokud $(\exists h_1, h_2)(\forall x \in D(f))\, h_1 \leq f(x) \leq h_2$

Periodičnost:

f je *periodická s periodou* $p > 0$ (je p-*periodická*, *má periodu* p), pokud

$$x \in D(f) \;\Rightarrow\; x + p \in D(f) \text{ a } f(x+p) = f(x)$$

Parita:

f je *lichá*, pokud $x \in D(f) \;\Rightarrow\; -x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$
f je *sudá*, pokud $x \in D(f) \;\Rightarrow\; -x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$

Monotonnost:

f je *rostoucí*, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D(f))\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$
f je *klesající*, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D(f))\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$
f je *nerostoucí*, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D(f))\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$
f je *neklesající*, pokud $(\forall x_1, x_2 \in D(f))\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$

Monotonnost:

f je *rostoucí na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$
f je *klesající na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$
f je *nerostoucí na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$
f je *neklesající na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$

Monotonnost:

f je *rostoucí na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)$
f je *klesající na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2)$
f je *nerostoucí na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \geq f(x_2)$
f je *neklesající na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \leq f(x_2)$

f je *rostoucí v bodě* $x_0 \in D(f)$, pokud
$(\exists \varepsilon > 0) f(x) < f(x_0)$ pro $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ a $f(x_0) < f(x)$ pro $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$
f je *klesající v bodě* $x_0 \in D(f)$, pokud
$(\exists \varepsilon > 0) f(x) > f(x_0)$ pro $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ a $f(x_0) < f(x)$ pro $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$

Jednoduché vlastnosti funkcí

Monotonnost:

f je *rostoucí na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$
f je *klesající na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$
f je *nerostoucí na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J)\, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$
f je *neklesající na intervalu* J, pokud $(\forall x_1, x_2 \in J) x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$

f je *rostoucí v bodě* $x_0 \in D(f)$, pokud

$(\exists \varepsilon > 0) f(x) < f(x_0)$ pro $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ a $f(x_0) < f(x)$ pro $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$

f je *klesající v bodě* $x_0 \in D(f)$, pokud

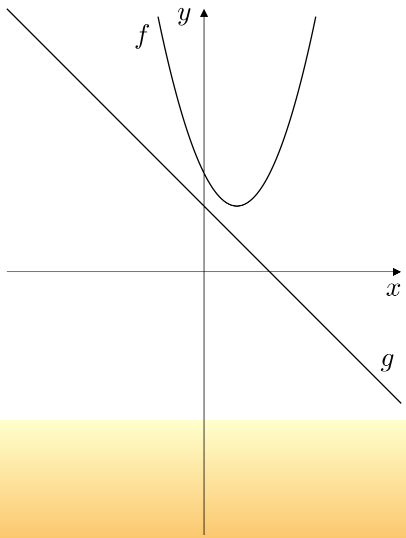
$(\exists \varepsilon > 0) f(x) > f(x_0)$ pro $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ a $f(x_0) < f(x)$ pro $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$

Platí: Funkce f je rostoucí (klesající) v každém bodě intervalu J právě tehdy, když je rostoucí (klesající) na intervalu J.

Operace s funkcemi

Aritmetické operace: f, g funkce takové, že $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

Příklad: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 2 - x$, $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$



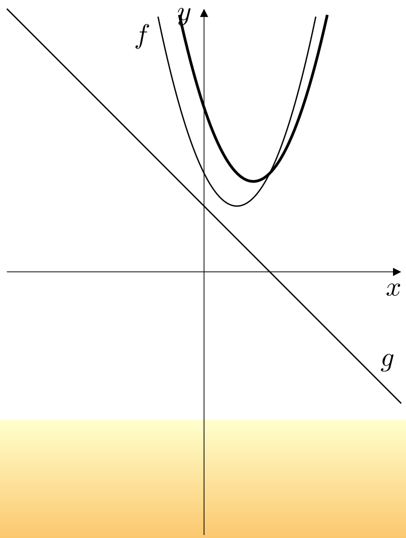
Aritmetické operace: f, g funkce takové, že $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$D(f+g) = D(f) \cap D(g)$$

Příklad: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 2 - x$, $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$

$(f+g)(x) = x^2 - 3x + 5$



Operace s funkcemi

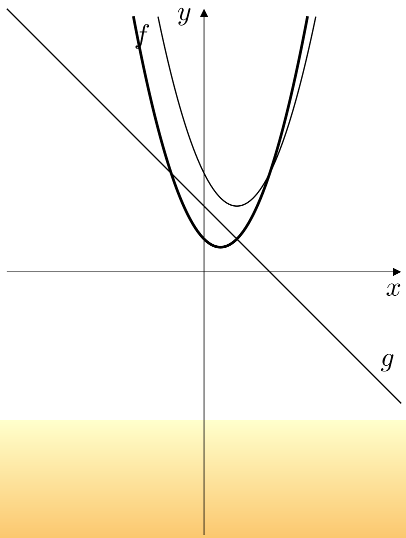
Aritmetické operace: f, g funkce takové, že $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$D(f-g) = D(f+g) = D(f) \cap D(g)$$

Příklad: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 2 - x$, $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$

$(f-g)(x) = x^2 - x + 1$



Operace s funkcemi

Aritmetické operace: f, g funkce takové, že $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

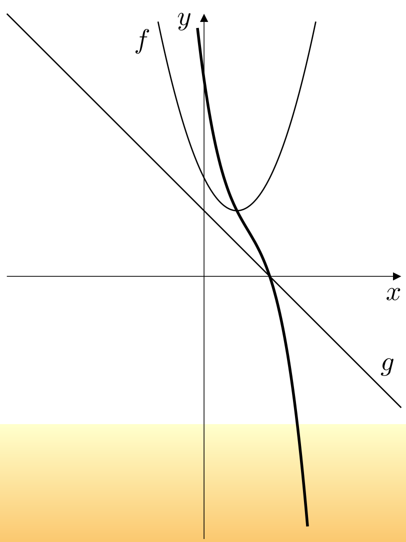
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$D(f \cdot g) = D(f-g) = D(f+g) = D(f) \cap D(g)$$

Příklad: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 2 - x$, $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$

$(f \cdot g)(x) = -x^3 + 4x^2 - 7x + 6$



Operace s funkcemi

Aritmetické operace: f, g funkce takové, že $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \qquad (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

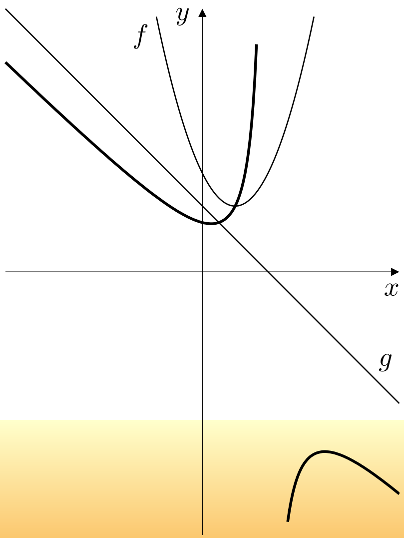
$$D(f \cdot g) = D(f-g) = D(f+g) = D(f) \cap D(g),$$

$$D(f/g) = D(f) \cap D(g) \setminus \{x \in D(g) : \; g(x) = 0\}$$

Příklad: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 2 - x$, $D(f) = D(g) = (-\infty, \infty)$

$$(f/g)(x) = \frac{3}{2-x} - x,$$

$$D(f/g) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$



Operace s funkcemi

Skládání funkcí: f, g funkce takové, že $H(g) \subseteq D(f)$

Operace s funkcemi

Skládání funkcí: f, g funkce takové, že $H(g) \subseteq D(f)$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & z \arrow[r, "f"] & y \end{tikzcd}$$

$f \circ g$ „f po g“

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big), \qquad D(f \circ g) = \{x : g(x) \in D(f)\}$$

Operace s funkcemi

Skládání funkcí: f, g funkce takové, že $H(g) \subseteq D(f)$

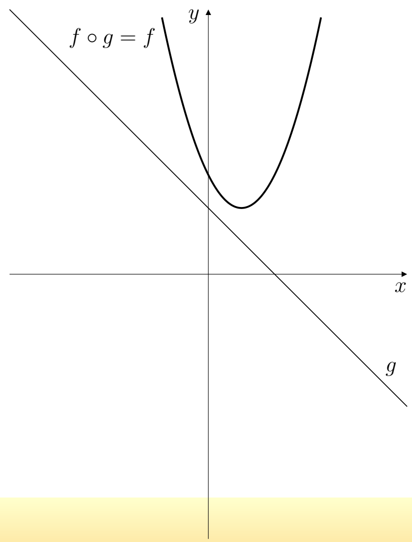
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & z \arrow[r, "f"] & y \end{tikzcd}$$

„f po g“

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big), \qquad D(f \circ g) = \{x : g(x) \in D(f)\}$$

Příklad: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 2 - x$, $H(g) = (-\infty, \infty) = D(f)$

$$(f \circ g)(x) = (2 - x)^2 - 2(2 - x) + 3 = x^2 - 2x + 3$$



Operace s funkcemi

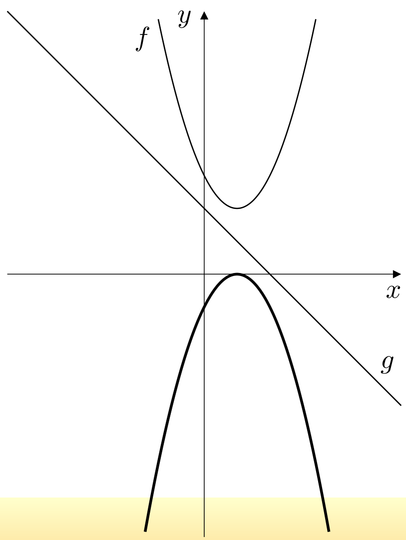
Skládání funkcí: f, g funkce takové, že $H(g) \subseteq D(f)$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & z \arrow[r, "f"] & y \end{tikzcd} \qquad f \circ g(x) = f\big(g(x)\big), \qquad D(f \circ g) = \{x : g(x) \in D(f)\}$$

$f \circ g$ „f po g“

Příklad: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 2 - x$, $H(f) = (2, \infty) \subseteq (-\infty, \infty) = D(g)$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= 2 - (x^2 - 2x + 3) = \\ &= -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2\end{aligned}$$



Operace s funkcemi

Terminologická poznámka:

Funkce f je *prostá*, pokud libovolným dvěma různým hodnotám nezávisle proměnné odpovídají různé funkční hodnoty, tj.

$$\big(\forall x_1, x_2 \in D(f)\big)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Terminologická poznámka:

Funkce f je *prostá*, pokud libovolným dvěma různým hodnotám nezávisle proměnné odpovídají různé funkční hodnoty, tj.

$$\big(\forall x_1, x_2 \in D(f)\big)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funkce f je *prostá na intervalu* J, pokud

$$(\forall x_1, x_2 \in J)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Terminologická poznámka:

Funkce f je *prostá*, pokud libovolným dvěma různým hodnotám nezávisle proměnné odpovídají různé funkční hodnoty, tj.

$$\big(\forall x_1, x_2 \in D(f)\big)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funkce f je *prostá na intervalu* J, pokud

$$(\forall x_1, x_2 \in J)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Platí: Je-li funkce f rostoucí (resp. klesající) na intervalu J, pak je na tomto intervalu prostá.
Obrácené tvrzení neplatí.

Inverzní funkce: f prostá funkce

Operace s funkcemi

Inverzní funkce: f prostá funkce

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$y = f(x) \quad \to \text{ „vyřešení rovnice“ } \to \quad x = f^{-1}(y)$$

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

Operace s funkcemi

Inverzní funkce: f prostá funkce

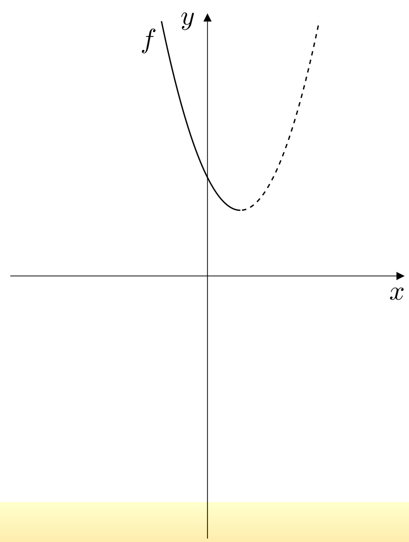
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad \text{„vyřešení rovnice“} \quad \rightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

Příklad: Najděte funkci inverzní k funkci f definované na intervalu $(-\infty, 1\rangle$ předpisem

$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$



Operace s funkcemi

Inverzní funkce: f prostá funkce

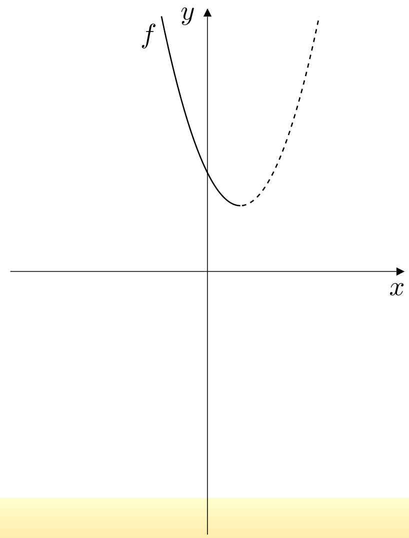
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad \text{„vyřešení rovnice“} \quad \rightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

Příklad: Najděte funkci inverzní k funkci f definované na intervalu $(-\infty, 1\rangle$ předpisem

$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$



$$x^2 - 2x + 3 = y, \ \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3-y)}}{2} = 1 \pm \sqrt{y-2}$$

Pro $x = 0$ je $y = f(0) = 3$, vyhovuje pouze znaménko $-$.
Tedy $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y-2}$

Inverzní funkce: f prostá funkce

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad \text{„vyřešení rovnice“} \quad \rightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f)$$

Příklad: Najděte funkci inverzní k funkci f definované na intervalu $(-\infty, 1\rangle$ předpisem

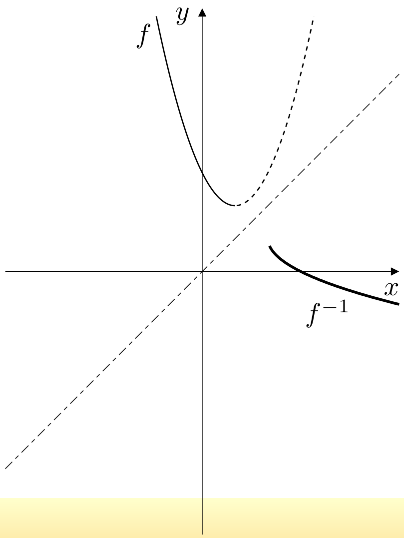
$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

$$x^2 - 2x + 3 = y, \ \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3-y)}}{2} = 1 \pm \sqrt{y-2}$$

Pro $x = 0$ je $y = f(0) = 3$, vyhovuje pouze znaménko $-$.
Tedy $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y-2}$

Obvykle se nezávisle proměnná označuje symbolem x,

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-2}.$$



Elementární funkce

Polynomy

Polynom stupně n je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

Polynomy

Polynom stupně n je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$D(P) = \mathbb{R}$
$H(P) = \mathbb{R}$ nebo $H(P) = (-\infty, \omega\rangle$ nebo $H(P) = \langle\alpha, \infty)$ nebo $H(P) = \{\gamma\}$.

Polynomy

Polynom stupně n je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$D(P) = \mathbb{R}$

Speciální případy:

Polynomy

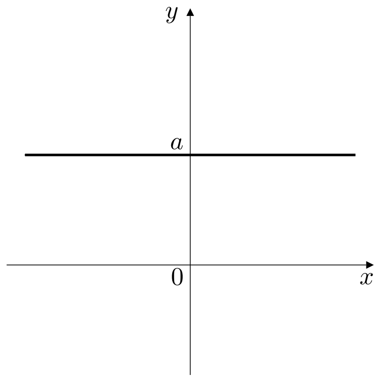
Polynom stupně n je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$D(P) = \mathbb{R}$

Speciální případy:

- $n = 0$: $y = P_0(x) = a$ – *konstantní funkce*
  $H(P_0) = \{a\}$
  ohraničená, periodická s libovolnou periodou, sudá, nerostoucí, neklesající



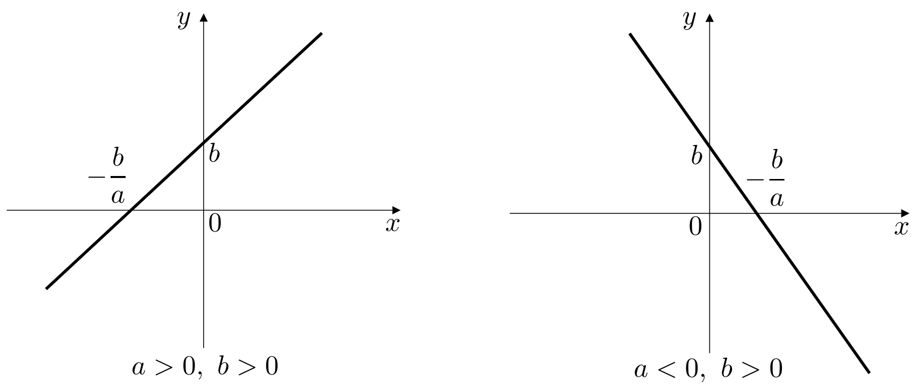
Polynom stupně n je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$D(P) = \mathbb{R}$

Speciální případy:

- $n = 1$: $y = P_1(x) = ax + b$ – *lineární funkce*
  $H(P_1) = (-\infty, \infty)$
  $b = 0 \Rightarrow$ lichá; $a > 0 \Rightarrow$ rostoucí, $a < 0 \Rightarrow$ klesající



Polynom stupně n je funkce daná předpisem

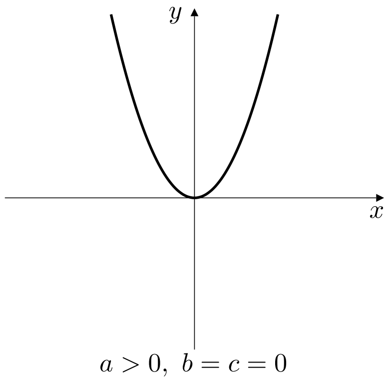
$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

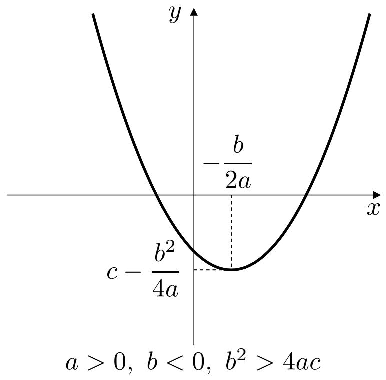
$D(P) = \mathbb{R}$

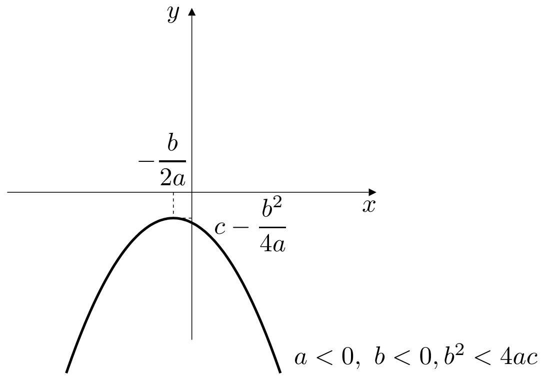
Speciální případy:

- $n = 2$: $y = P_2(x) = ax^2 + bx + c$ – *kvadratická funkce*
  $b = c = 0 \Rightarrow$ sudá

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$







Polynomy

Polynom stupně n je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$D(P) = \mathbb{R}$

Speciální případy:

- $n = 2$: $y = P_2(x) = ax^2 + bx + c$ – *kvadratická funkce*
  $b = c = 0 \Rightarrow$ sudá
  $$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
  $a > 0 \Rightarrow$
  $$H(P_2) = \left\langle \frac{4ac - b^2}{4a}, \infty \right), \text{ klesající na } \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right\rangle, \text{ rostoucí na } \left\langle -\frac{b}{2a}, \infty \right)$$
  $a < 0 \Rightarrow$
  $$H(P_2) = \left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right\rangle, \text{ rostoucí na } \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right\rangle, \text{ klesající na } \left\langle -\frac{b}{2a}, \infty \right)$$

Polynomy

Polynom stupně n je funkce daná předpisem

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0$$

$D(P) = \mathbb{R}$

kořen polynomu: takové číslo x_0, že $P(x_0) = 0$.

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

Platí: Je-li funkce R neryze lomená, pak ji lze vyjádřit jako součet polynomu a funkce ryze lomené.

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

Platí: Je-li funkce R neryze lomená, pak ji lze vyjádřit jako součet polynomu a funkce ryze lomené.

Příklad: $R(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

Platí: Je-li funkce R neryze lomená, pak ji lze vyjádřit jako součet polynomu a funkce ryze lomené.

Příklad: $R(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$

$$\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^3 - x + x + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x + 1) + x}{x^2 - 1} = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$$

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi$ je kořenem polynomu $Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

- *Lineární lomená funkce* $y = R(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $a \neq 0 \neq c$
  $D(R) = \left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}, \infty\right)$, $H(R) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

- *Lineární lomená funkce* $y = R(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $a \neq 0 \neq c$
  $D(R) = \left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}, \infty\right)$, $H(R) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c}\frac{x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{a}{c}\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

Lomené funkce

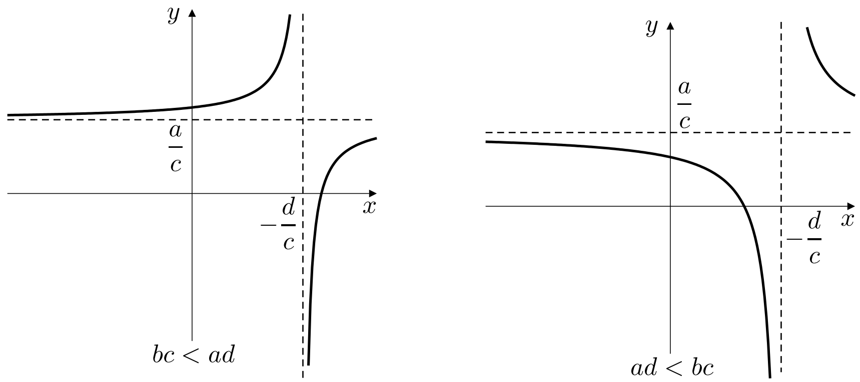
Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

- *Lineární lomená funkce* $y = R(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c(cx+d)}$, $a \neq 0 \neq c$, $bc - ad \neq 0$
  $D(R) = \left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}, \infty\right)$, $H(R) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$

$a, b, c > 0, \; d < 0$



Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi \text{ je kořenem polynomu } Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

- *Lineární lomená funkce* $y = R(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c(cx+d)}$, $a \neq 0 \neq c$, $bc - ad \neq 0$
  $D(R) = \left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}, \infty\right)$, $H(R) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$
  $bc < ad \;\Rightarrow$ klesající na intervalu $\left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right)$ a na intervalu $\left(-\dfrac{d}{c}, \infty\right)$
  $bc > ad \;\Rightarrow$ rostoucí na intervalu $\left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right)$ a na intervalu $\left(-\dfrac{d}{c}, \infty\right)$

Lomené funkce

Lomená funkce je funkce daná předpisem

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{kde } P \text{ a } Q \text{ jsou polynomy}$$

$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{\xi : \xi$ je kořenem polynomu $Q\}$
Je-li stupeň polynomu Q větší než stupeň polynomu P, funkce se nazývá *ryze lomená*.

Polynomy a lomené funkce se nazývají *racionální funkce*

Polynom – *racionální funkce celistvá*
Lomená funkce – *racionální funkce lomená*