

Spojitost a limita funkce

M1030 Matematika pro biology

21. 11. 2024

Spojité funkce

Spojitosť

Spojitosť v bodě

Exkurs: výroky s kvantifikátory

Operace se spojitými funkcemi

Spojitosť na intervalu

Funkce spojitě na uzavřeném intervalu

Limita funkce

Spojité funkce

Spojitost

Funkce je spojitá, pokud

Spojitost

Funkce je spojitá, pokud

- její graf lze nakreslit bez přerušování kontaktu psacího nástroje s podložkou,

Spojitost

Funkce je spojitá, pokud

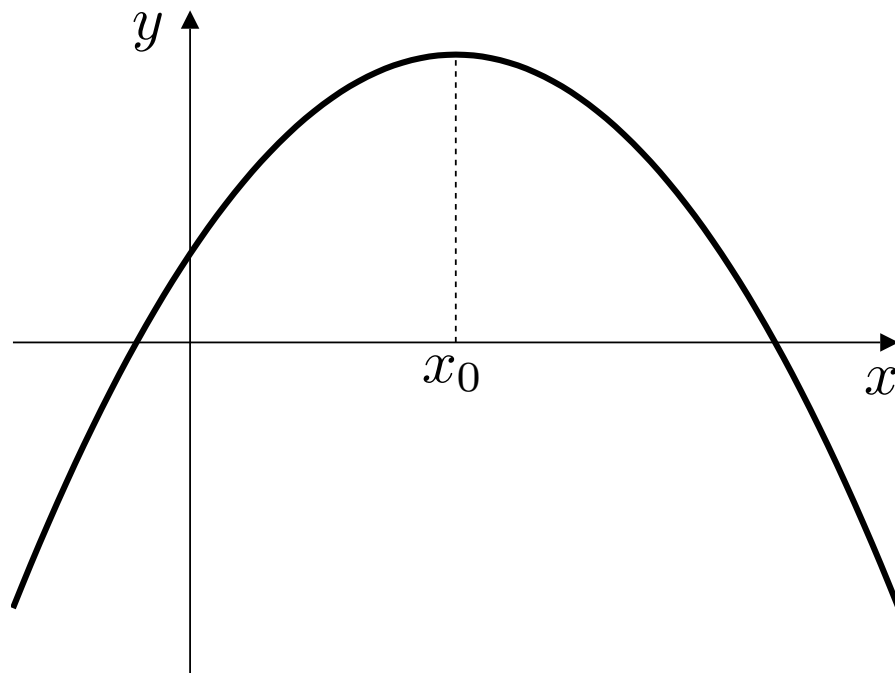
- její graf lze nakreslit bez přerušování kontaktu psacího nástroje s podložkou, tj. její graf je souvislá křivka;

Spojitost

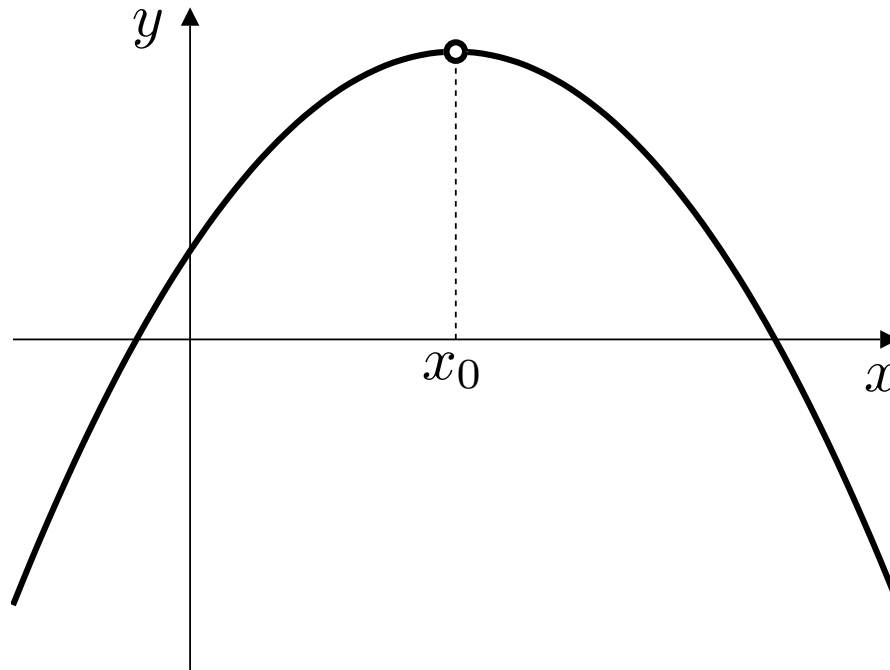
Funkce je spojitá, pokud

- její graf lze nakreslit bez přerušování kontaktu psacího nástroje s podložkou, tj. její graf je souvislá křivka;
- malá změna nezávisle proměnné vyvolá malou změnu závisle proměnné.

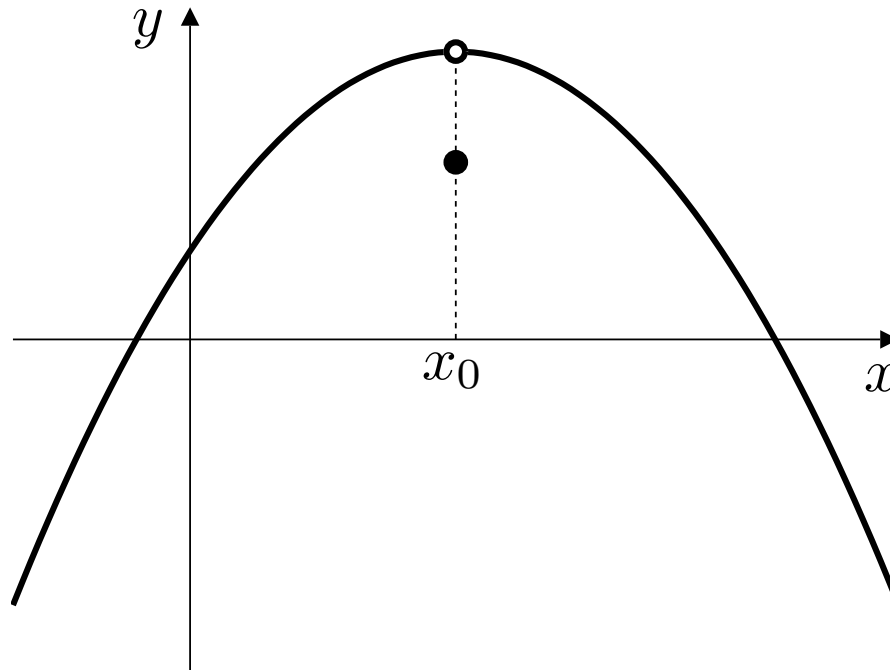
Spojitosť v bodě



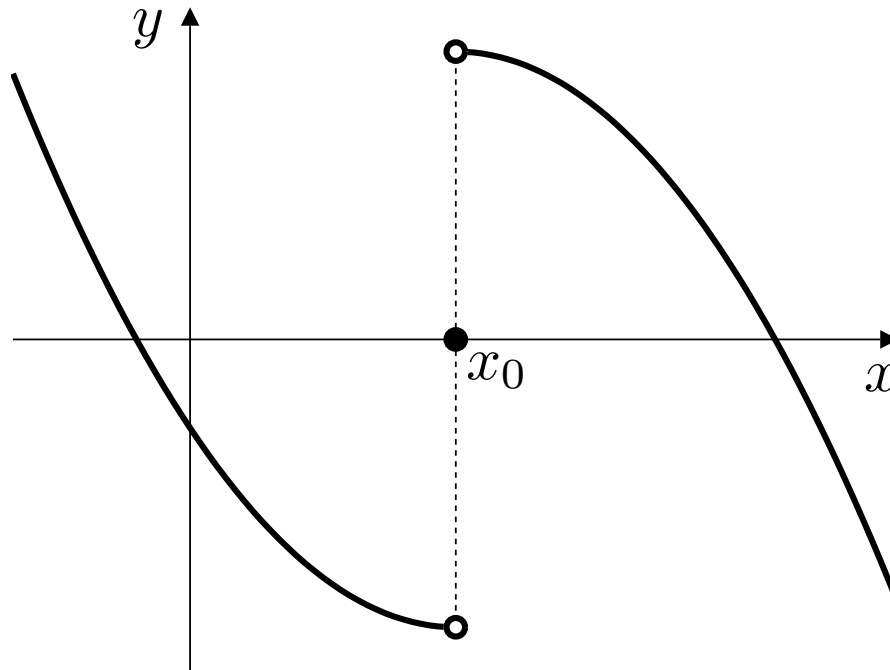
Spojitosť v bodě



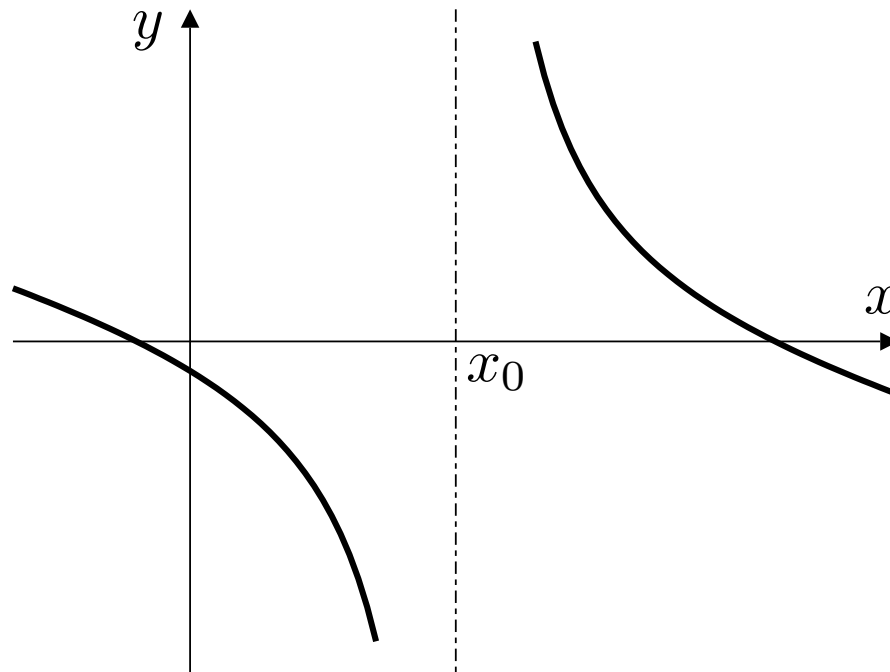
Spojitosť v bodě



Spojitosť v bodě

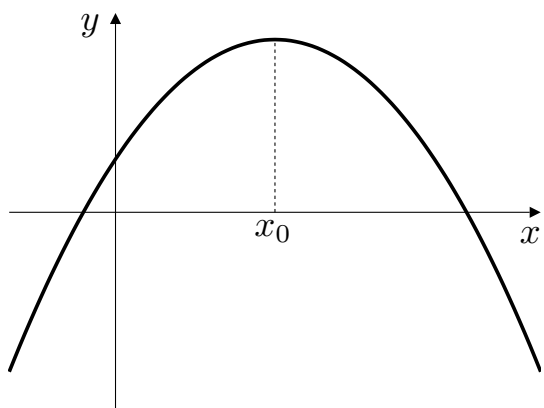


Spojitosť v bodě

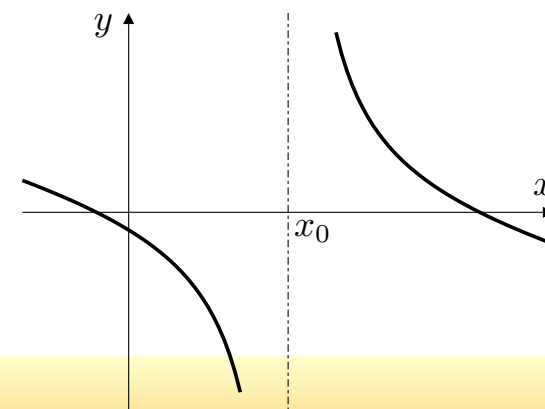
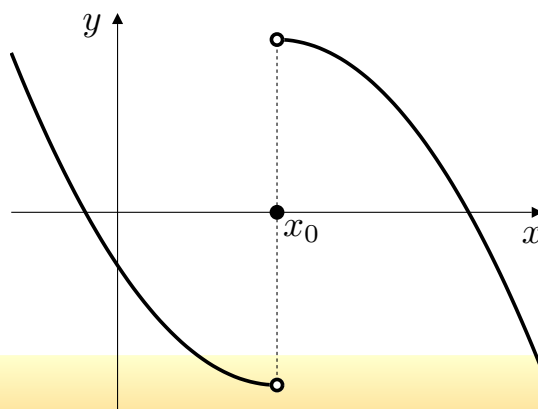
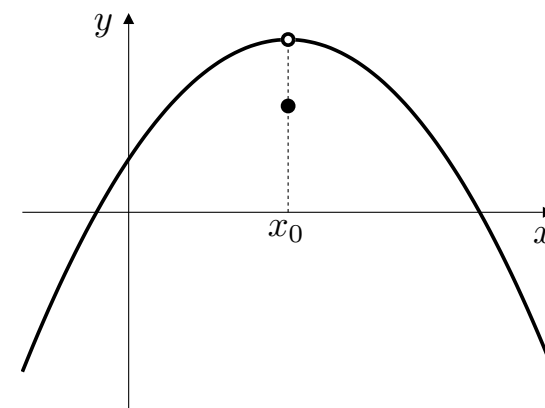
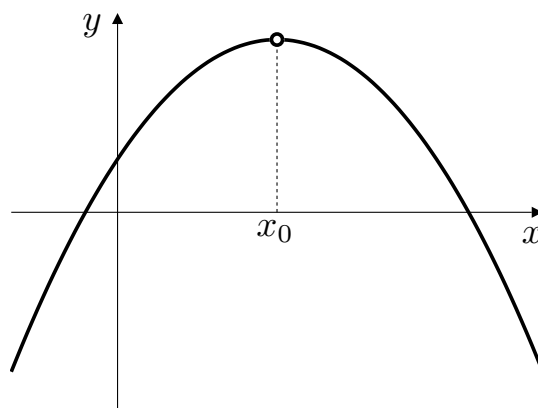


Spojitosť v bodě

Funkce spojitá v bodě x_0

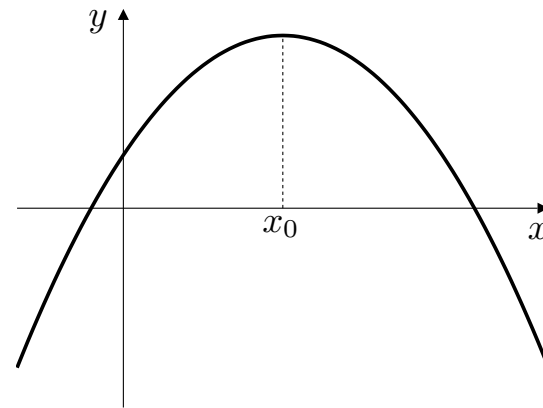


Funkce nespojitá v bodě x_0



Spojitosť v bodě

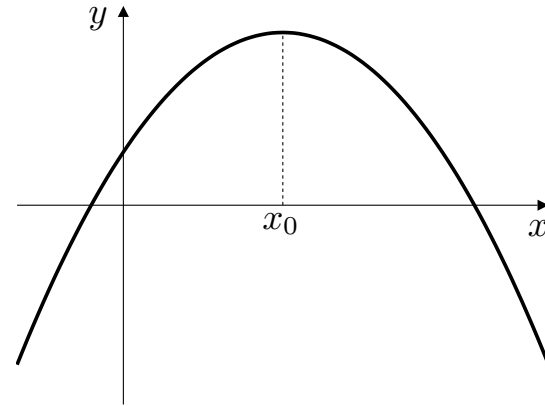
Funkce f je spojitá v bodě x_0 :



Spojitosť v bodě

Funkce f je spojitá v bodě x_0 :

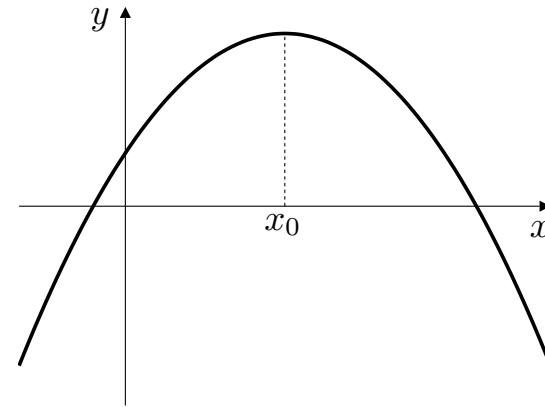
- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.



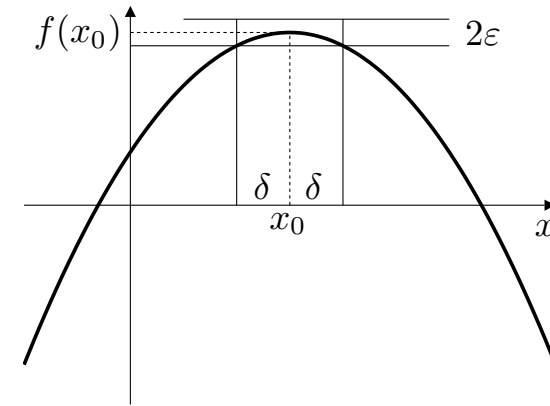
Spojitosť v bodě

Funkce f je spojitá v bodě x_0 :

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.



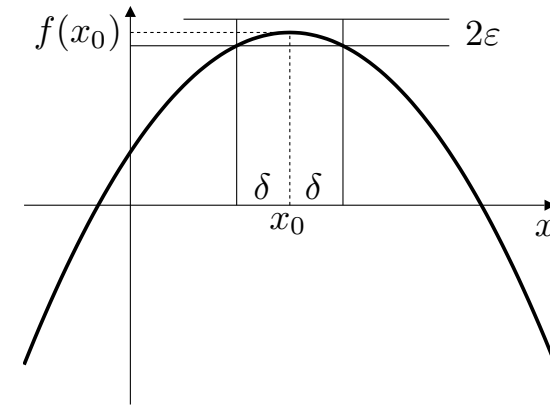
Spojitosť v bodě



Funkce f je spojitá v bodě x_0 :

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε , lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ , tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε .

Spojitosť v bodě

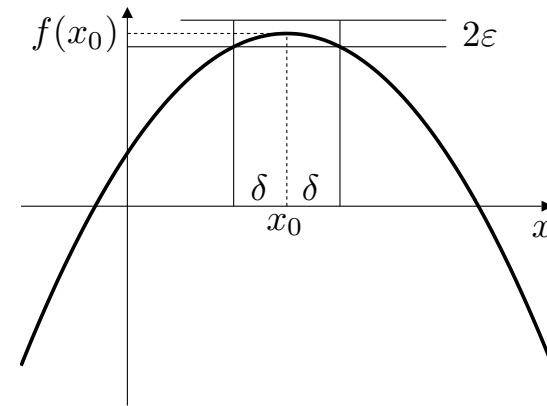


Funkce f je spojitá v bodě x_0 :

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε , lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ , tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε .

$$x \in D(f) \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojítost v bodě

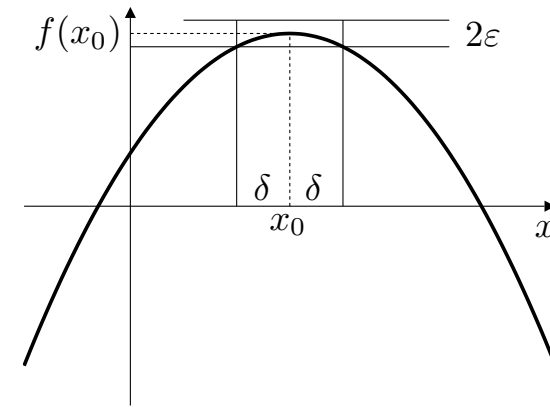


Funkce f je spojitá v bodě x_0 :

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε , lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ , tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε .
- Ke každému kladnému číslu ε

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad x \in D(f) \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitosť v bodě

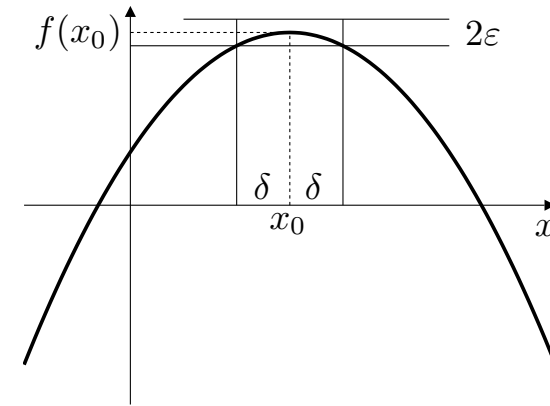


Funkce f je spojitá v bodě x_0 :

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε , lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ , tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε .
- Ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad x \in D(f) \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitosť v bodě

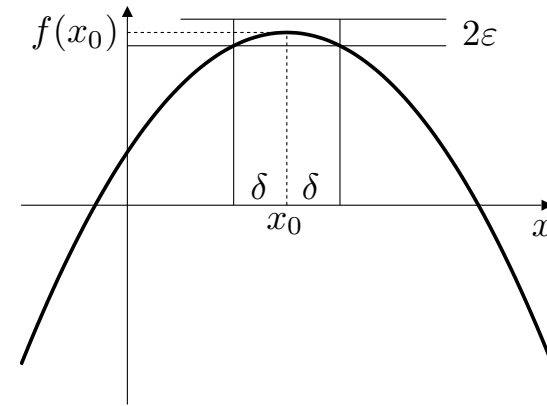


Funkce f je spojitá v bodě x_0 :

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε , lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ , tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε .
- Ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ , že pro jakékoliv $x \in D(f)$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojítost v bodě



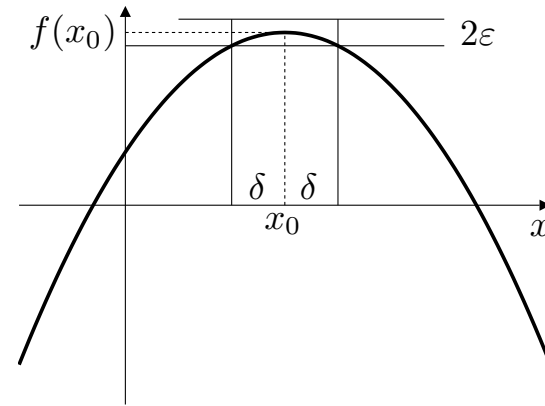
Funkce f je spojitá v bodě x_0 :

- Funkce f je v bodě x_0 definována, $x_0 \in D(f)$.
- Je-li x „blízko“ x_0 pak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$.
- Zvolíme-li „měřítko blízkosti“ ε závisle proměnné ε , lze k němu najít „měřítko blízkosti“ δ nezávisle proměnné takové, že když je x „blízko“ k x_0 „podle měřítka“ δ , tak je $f(x)$ „blízko“ $f(x_0)$ „podle měřítka“ ε .
- Ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ , že pro jakékoliv $x \in D(f)$ z δ -blízkosti x k x_0 nutně vyplývá ε -blízkost $f(x)$ k $f(x_0)$.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojitosť v bodě

Funkce f je spojitá v bodě x_0 :



$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

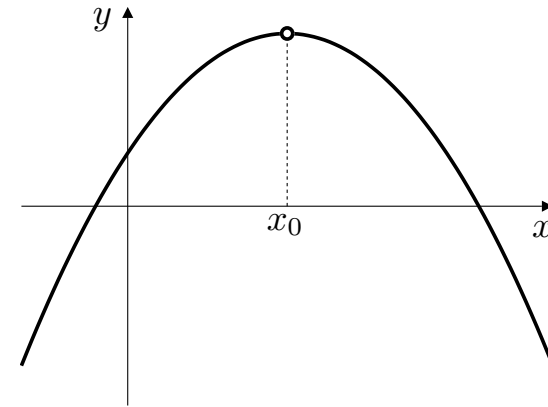
Spojitosť v bodě

Funkce f je nespojitá v bodě x_0 :

Spojitosť v bodě

Funkce f je nespojitá v bodě x_0 :

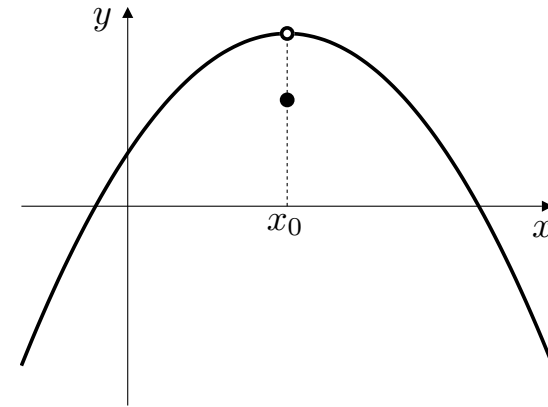
* Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.



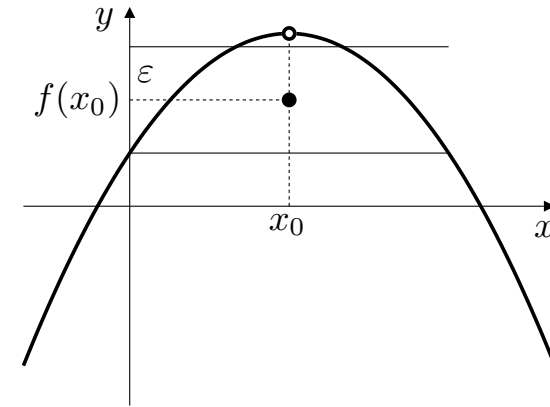
Spojítost v bodě

Funkce f je nespojitá v bodě x_0 :

- * Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
- * Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
 - Přestože x „je blízko“ k x_0 , tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.



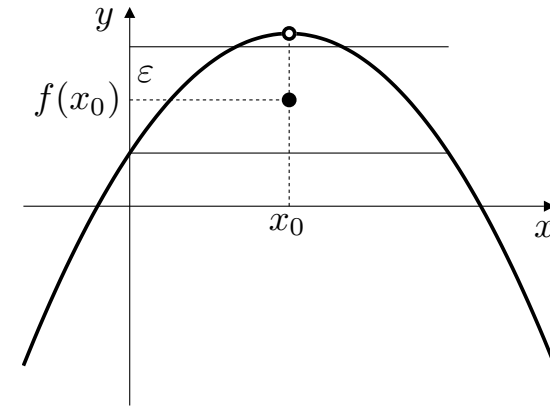
Spojitosť v bodě



Funkce f je nespojitá v bodě x_0 :

- * Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
- * Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
 - Přestože x „je blízko“ k x_0 , tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.
 - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k x_0 „daleko“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.

Spojitosť v bodě

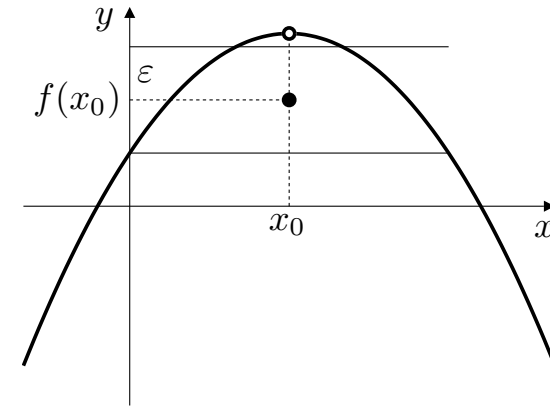


Funkce f je nespojitá v bodě x_0 :

- * Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
- * Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
 - Přestože x „je blízko“ k x_0 , tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.
 - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k x_0 „daleko“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.

$$|x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Spojitosť v bodě



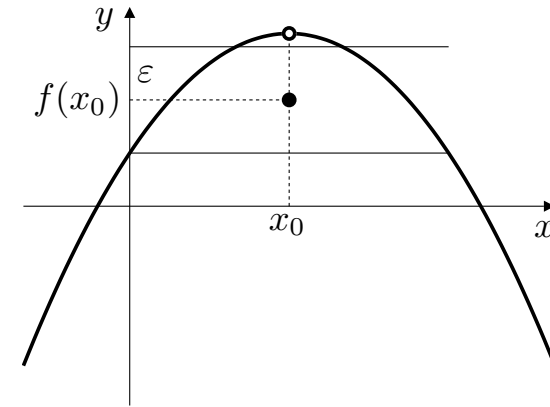
Funkce f je nespojitá v bodě x_0 :

- * Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
- * Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
 - Přestože x „je blízko“ k x_0 , tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.
 - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k x_0 „daleko“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.
 - Existuje takové „měřítko dalekosti“ ε

$$(\exists \varepsilon > 0)$$

$$|x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Spojítost v bodě



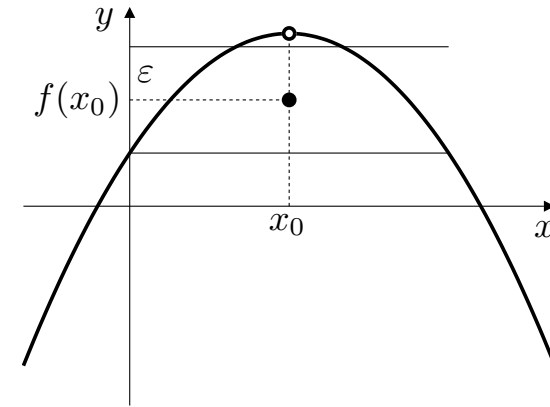
Funkce f je nespojitá v bodě x_0 :

- * Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
- * Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
 - Přestože x „je blízko“ k x_0 , tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.
 - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k x_0 „daleko“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.
 - Existuje takové „měřítko dalekosti“ ε , že pro libovolné „měřítko blízkosti“ δ

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)$$

$$|x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Spojítost v bodě

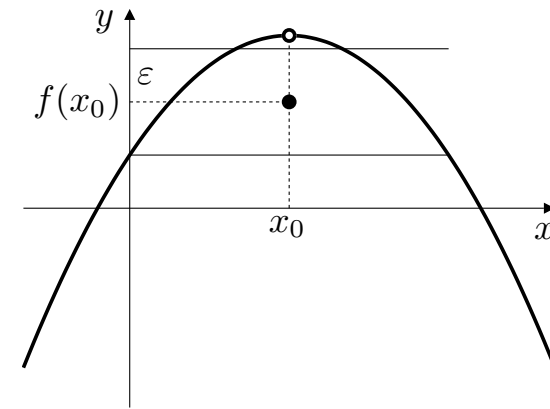


Funkce f je nespojitá v bodě x_0 :

- * Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
- * Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
 - Přestože x „je blízko“ k x_0 , tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.
 - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k x_0 „daleko“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.
 - Existuje takové „měřítko dalekosti“ ε , že pro libovolné „měřítko blízkosti“ δ lze najít hodnoty x nezávisle proměnné

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Spojítost v bodě



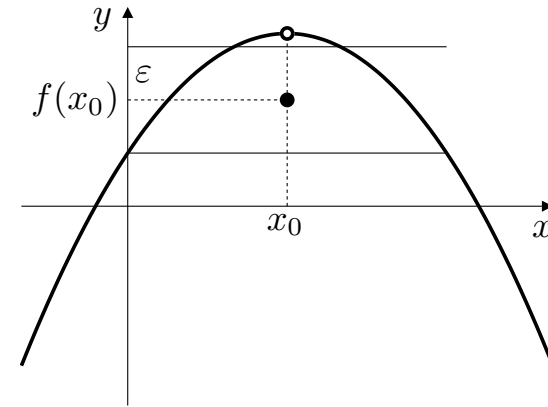
Funkce f je nespojitá v bodě x_0 :

- * Funkce není v x_0 definována; $x_0 \notin D(f)$.
- * Pokud $x_0 \in D(f)$, pak
 - Přestože x „je blízko“ k x_0 , tak $f(x)$ je od $f(x_0)$ „daleko“.
 - Při nějakém „měřítku dalekosti“ jsou funkční hodnoty nějakých nezávisle proměnných libovolně „blízkých“ k x_0 „daleko“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.
 - Existuje takové „měřítko dalekosti“ ε , že pro libovolné „měřítko blízkosti“ δ lze najít hodnoty x nezávisle proměnné „ δ -blízké k x_0 “, jejichž příslušné funkční hodnoty jsou „ ε -vzdálené“ od funkční hodnoty $f(x_0)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Spojitosť v bodě

Funkce f je nespojitá v bodě $x_0 \in D(f)$:



$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$.

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| \geq \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| \geq \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je ohraničená.

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| \geq \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je ohraničená.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| \geq \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Exkurs: výroky s kvantifikátory

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D(f)) |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Funkce f je nespojitá v $x_0 \in D(f)$. (Funkce f není spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

Není pravda, že funkce f je spojitá v $x_0 \in D(f)$.)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| \geq \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je ohraničená.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in D(f)) |x - x_0| \geq \delta \ \& \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkce f je konstantní.

Operace se spojitými funkcemi

Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$. Pak také funkce

$$f + g, f - g, fg$$

jsou spojité v bodě x_0 . Pokud navíc $g(x_0) \neq 0$, pak je také funkce

$$\frac{f}{g}$$

spojitá v bodě x_0 .

Operace se spojitými funkcemi

Nechť funkce f a g jsou spojitě v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$. Pak také funkce

$$f + g, f - g, fg$$

jsou spojitě v bodě x_0 . Pokud navíc $g(x_0) \neq 0$, pak je také funkce

$$\frac{f}{g}$$

spojitá v bodě x_0 .

Nechť funkce g je spojitá v bodě x_0 a $g(x_0) \in D(f)$. Je-li funkce f spojitá v bodě $g(x_0)$, pak je složená funkce $f \circ g$ spojitá v bodě x_0 .

Operace se spojitými funkcemi

Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$. Pak také funkce

$$f + g, f - g, fg$$

jsou spojité v bodě x_0 . Pokud navíc $g(x_0) \neq 0$, pak je také funkce

$$\frac{f}{g}$$

spojitá v bodě x_0 .

Nechť funkce g je spojitá v bodě x_0 a $g(x_0) \in D(f)$. Je-li funkce f spojitá v bodě $g(x_0)$, pak je složená funkce $f \circ g$ spojitá v bodě x_0 .

Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0 . Pokud existuje inverzní funkce f^{-1} , pak je tato funkce spojitá v bodě $f(x_0)$.

Spojitost na intervalu

Funkce f je *spojitá na intervalu* $J \subseteq D(f)$, pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

$$(\forall x_0 \in J)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in J) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Spojítost na intervalu

Funkce f je *spojitá na intervalu* $J \subseteq D(f)$, pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

$$(\forall x_0 \in J)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in J) |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Každá elementární funkce je spojitá na každém intervalu, který je částí jejího definičního oboru.

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Funkce f je ohraničená na intervalu $\langle a, b \rangle$.

$$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle a, b \rangle) |f(x)| < k$$

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Funkce f je ohraničená na intervalu $\langle a, b \rangle$.

$$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle a, b \rangle) |f(x)| < k$$

- Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b \rangle$ své nejmenší a největší hodnoty.

$$(\exists c, d \in \langle a, b \rangle)(\forall x \in \langle a, b \rangle) f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Funkce f je ohraničená na intervalu $\langle a, b \rangle$.

$$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle a, b \rangle) |f(x)| < k$$

- Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b \rangle$ své nejmenší a největší hodnoty.

$$(\exists c, d \in \langle a, b \rangle)(\forall x \in \langle a, b \rangle) f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$



Karl Theodor Wilhelm Weierstraß 1815–1897

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Pokud mají funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$ opačná znaménka, pak uvnitř tohoto intervalu existuje kořen rovnice $f(x) = 0$.

$$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow (\exists c \in (a, b)) f(c) = 0$$

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Pokud mají funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$ opačná znaménka, pak uvnitř tohoto intervalu existuje kořen rovnice $f(x) = 0$.

$$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow (\exists c \in (a, b)) f(c) = 0$$

- Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b \rangle$ všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

$$(\exists c, d \in \langle a, b \rangle)(\forall x \in \langle a, b \rangle) f(c) \leq f(x) \leq f(d) \\ \& (\forall y \in \langle f(c), f(d) \rangle)(\exists \xi \in \langle a, b \rangle) f(\xi) = y$$

Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$. Pak platí:

- Pokud mají funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$ opačná znaménka, pak uvnitř tohoto intervalu existuje kořen rovnice $f(x) = 0$.

$$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow (\exists c \in (a, b)) f(c) = 0$$

- Funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b \rangle$ všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

$$(\exists c, d \in \langle a, b \rangle)(\forall x \in \langle a, b \rangle) f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

$$\& (\forall y \in \langle f(c), f(d) \rangle)(\exists \xi \in \langle a, b \rangle) f(\xi) = y$$



Bernard Bolzano 1781–1848

Spojité funkce

Limita funkce

Představa a pojem limity

Nevlastní limita

Limita v nevlastním bodě

Výpočet limit

Příklady

Limita funkce

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě x_0 limitu a :

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce f má ve vlastním bodě x_0 vlastní limitu a :

Představa a pojem limity

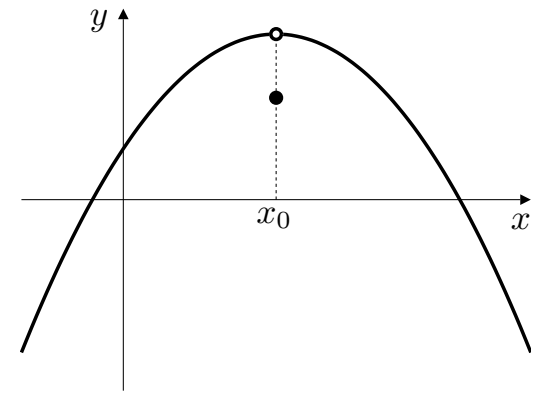
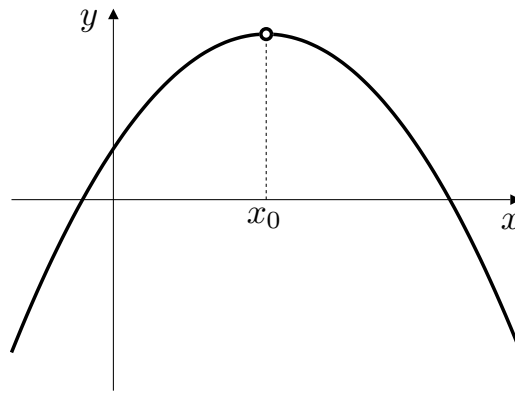
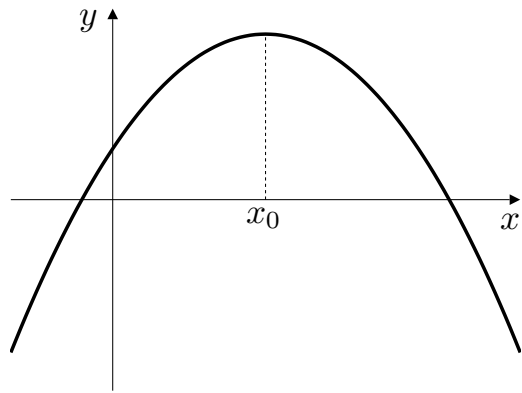
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

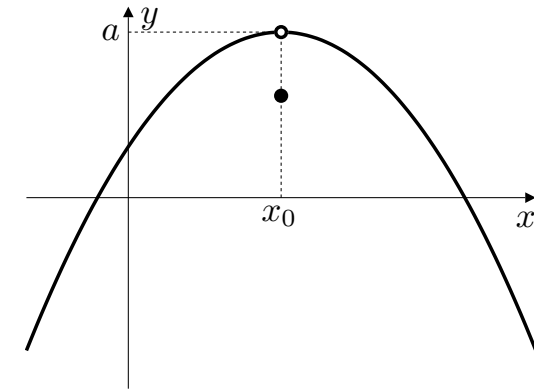
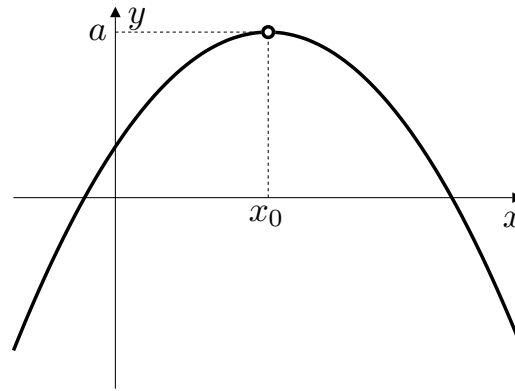
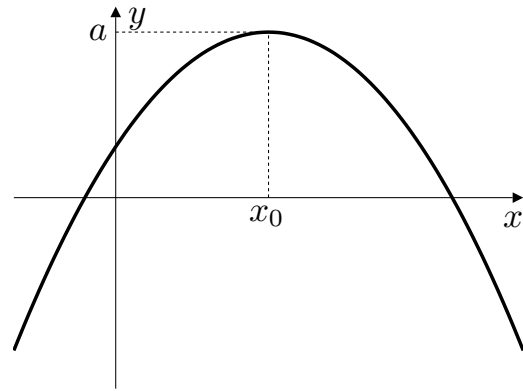
Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

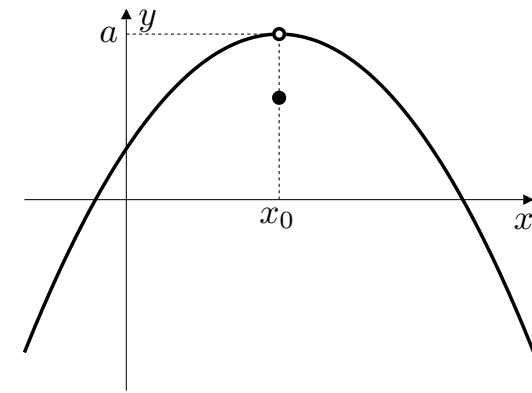
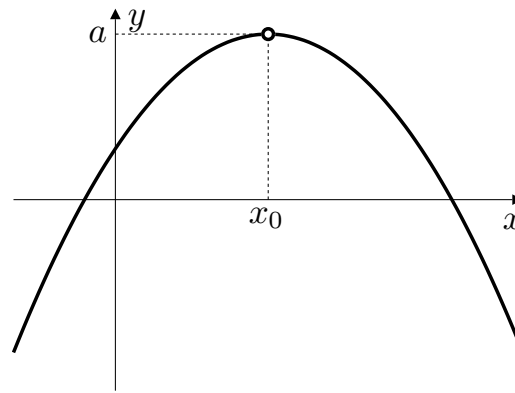
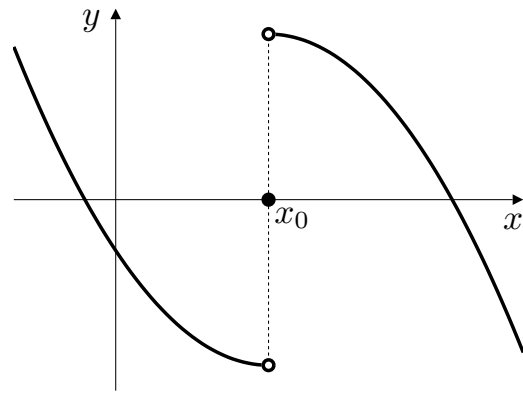


Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k x_0 tak se funkční hodnoty přibližují k a .

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

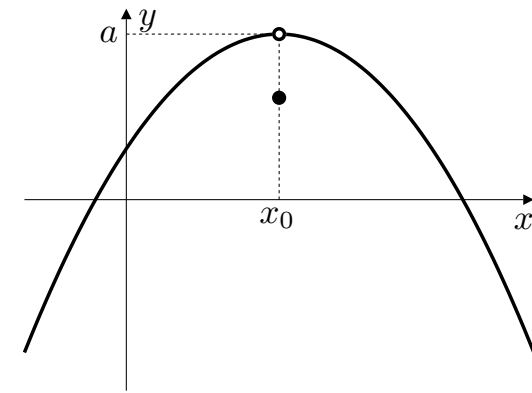
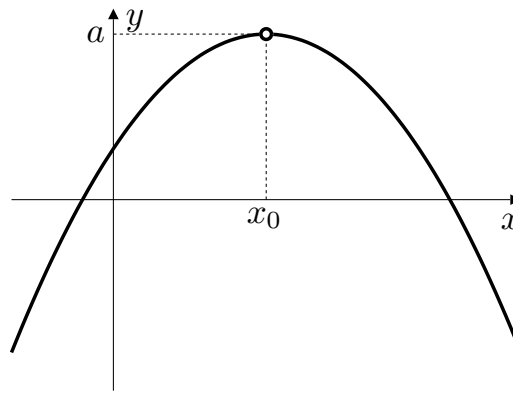
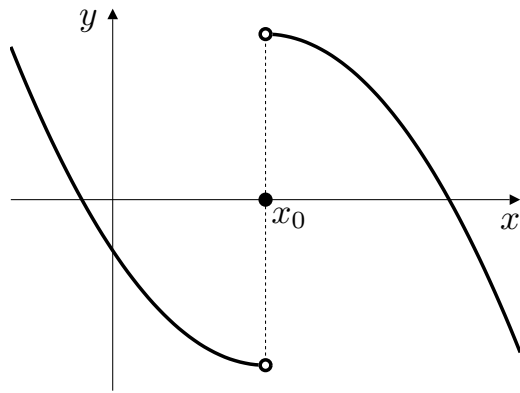


Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k x_0 tak se funkční hodnoty přibližují k a .

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



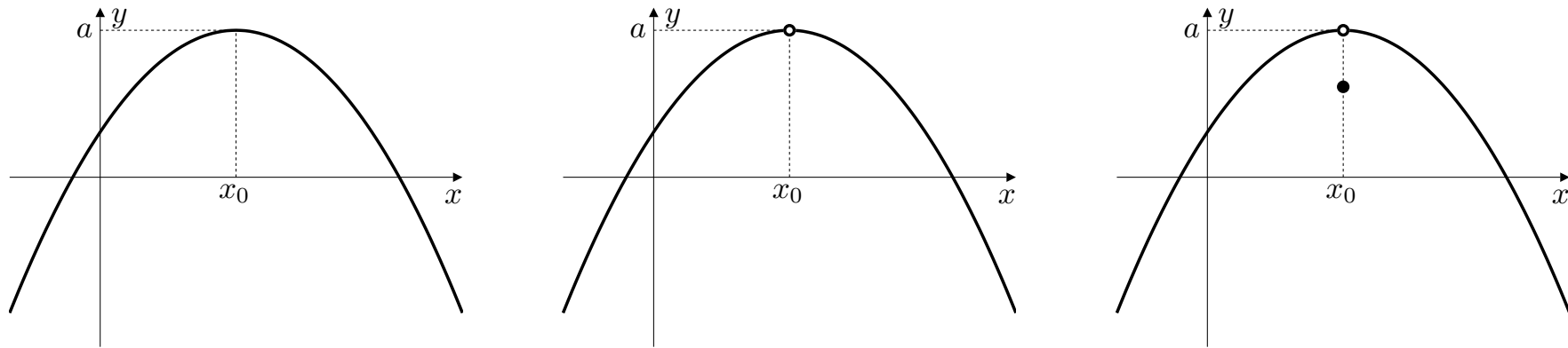
Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k x_0 tak se funkční hodnoty přibližují k a .

Při jakémkoliv přibližování se nezávisle proměnné k hodnotě x_0 (ale nesplynutí s ní) se příslušné hodnoty závisle proměnné nutně přiblíží k hodnotě a .

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



Když se s hodnotami nezávisle proměnné se přibližujeme k x_0 tak se funkční hodnoty přibližují k a .

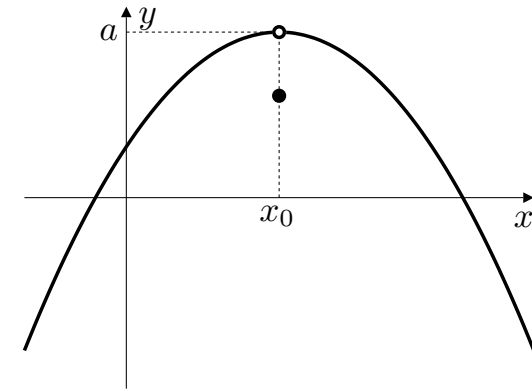
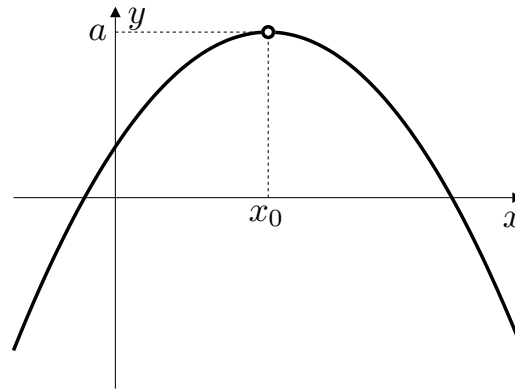
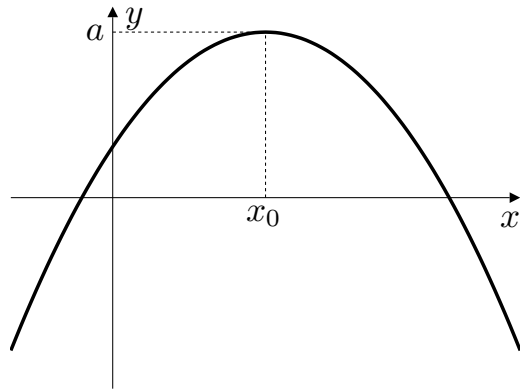
Při jakémkoliv přibližování se nezávisle proměnné k hodnotě x_0 (ale nesplynutí s ní) se příslušné hodnoty závisle proměnné nutně přiblíží k hodnotě a .

$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

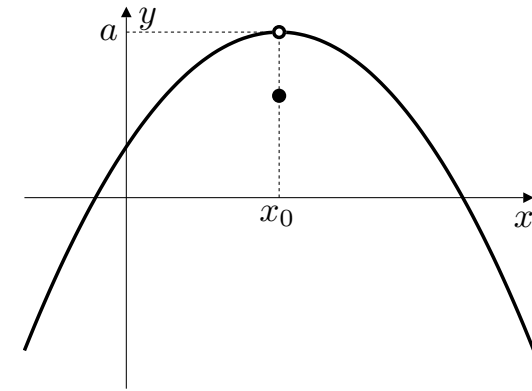
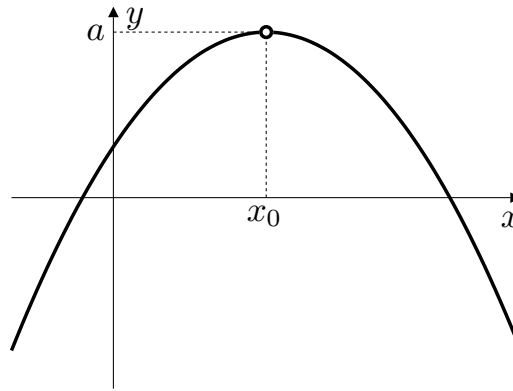
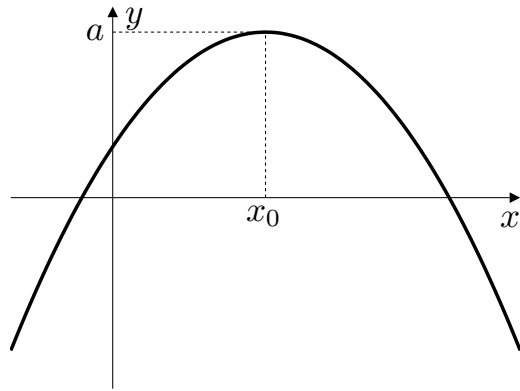


Pokud je funkce f spojitá v x_0 , tak a se rovná funkční hodnotě $f(x_0)$.

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



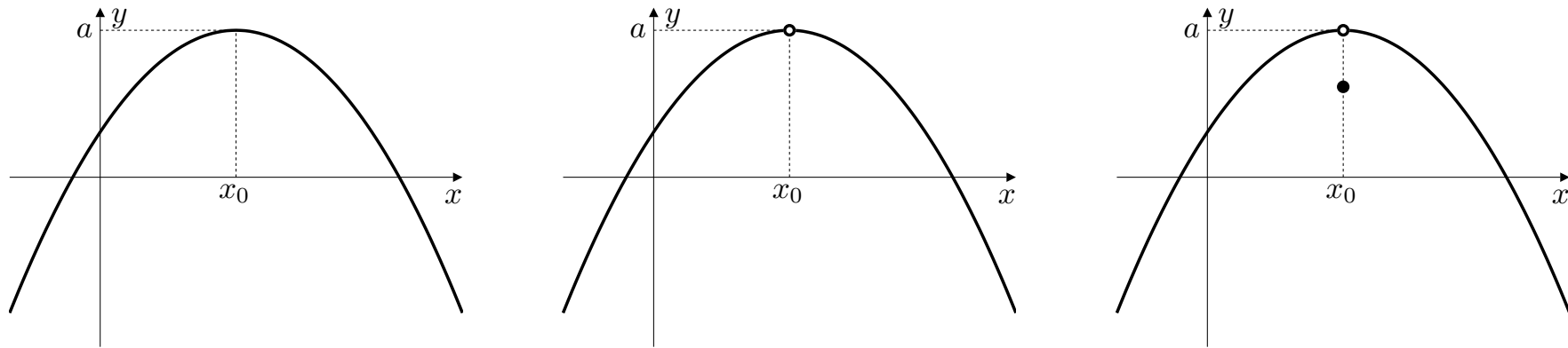
Pokud je funkce f spojitá v x_0 , tak a se rovná funkční hodnotě $f(x_0)$.

Pokud funkce f není spojitá v x_0 , tak a je taková hodnota, že dodefinování nebo změna funkční hodnoty v x_0 splňující rovnost $f(x_0) = a$, změní funkci f na funkci spojitou v x_0 .

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:



Pokud je funkce f spojitá v x_0 , tak a se rovná funkční hodnotě $f(x_0)$.

Pokud funkce f není spojitá v x_0 , tak a je taková hodnota, že dodefinování nebo změna funkční hodnoty v x_0 splňující rovnost $f(x_0) = a$, změní funkci f na funkci spojitou v x_0 .

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

Předpokládáme, že definiční obor funkce f je takový, že posloupnost

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

existuje, tj. že v každém ryzím okolí bodu x_0 jsou hodnoty z definičního oboru funkce f .

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

Předpokládáme, že definiční obor funkce f je takový, že posloupnost

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

existuje, tj. že v každém ryzím okolí bodu x_0 jsou hodnoty z definičního oboru funkce f .
 x_0 je *hromadný bod* definičního oboru.

Představa a pojem limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

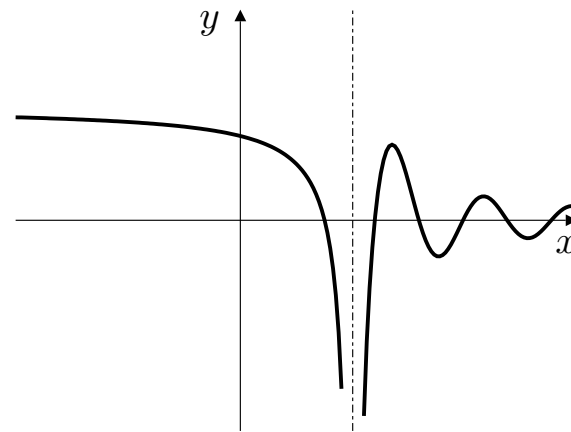
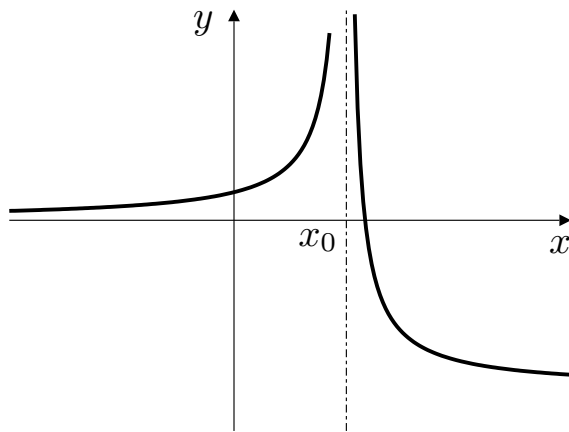
x_0 je *hromadný bod* definičního oboru.

Nevlastní limita

$x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > H$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)) 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < H$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$$

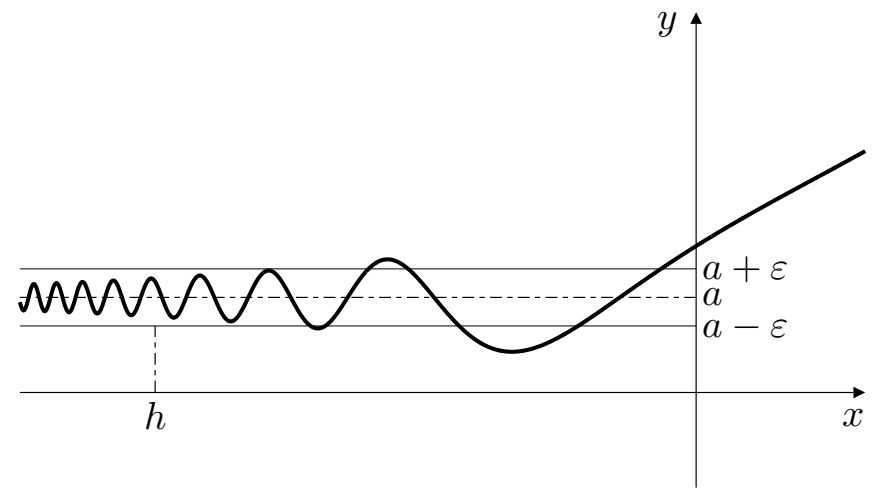
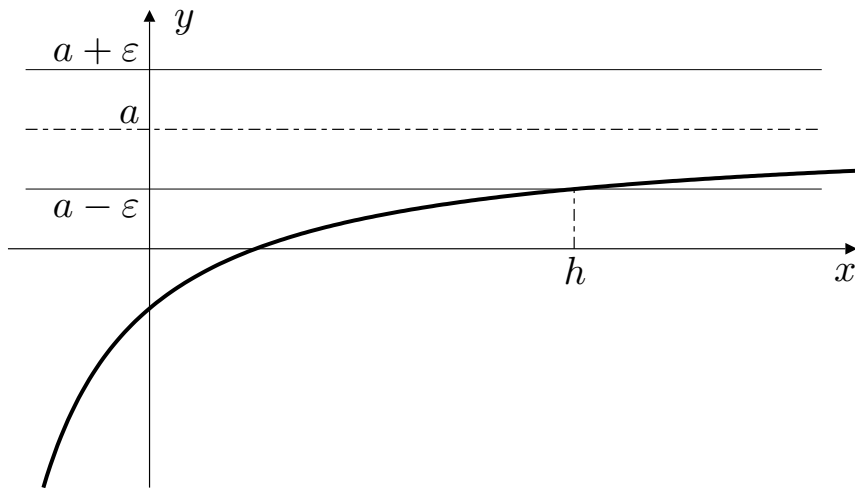


Limita v nevlastním bodě

Vlastní limita v nevlastním bodě:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a: \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f)) \quad x > h \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a: \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f)) \quad x < h \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$



Limita v nevlastním bodě

Nevlastní limita v nevlastním bodě:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f)) x > h \Rightarrow f(x) > H$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f)) x > h \Rightarrow f(x) < H$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f)) x < h \Rightarrow f(x) > H$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty: \quad (\forall H \in \mathbb{R})(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f)) x < h \Rightarrow f(x) < H$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq D(f)) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g , která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g , která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g , která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

Příklad: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g , která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

Příklad: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

$$x \neq 1: \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 1}{x + 1},$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g , která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

Příklad: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

$$x \neq 1: \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 1}{x + 1}, \quad g(x) = \frac{x - 1}{x + 1} \text{ je spojitá v } x_0 = 1$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g , která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

Příklad: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = 0$

$$x \neq 1: \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 1}{x + 1}, \quad g(x) = \frac{x - 1}{x + 1} \text{ je spojitá v } x_0 = 1$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g , která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g , která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

Příklad: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g , která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

Příklad: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g , která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

Příklad: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} = 0, \quad \sin \frac{1}{2}(2n+1)\pi = (-1)^n$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

- f spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- f nespojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$: najdeme funkci g , která má na nějakém ryzím okolí bodu x_0 stejné funkční hodnoty jako funkce $f \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$

$$\left[(\exists \eta)(\exists g)(\forall x \in D(f) \cap D(g)) (0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x)) \& (g \text{ spojitá v } x_0) \right] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g(x_0)$$

- Využití ekvivalence limity funkce a limity posloupnosti

Příklad: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ **neexistuje**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} = 0, \quad \sin \frac{1}{2}(2n+1)\pi = (-1)^n$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \operatorname{sgn}(a_n) \infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \operatorname{sgn}(a_n) (-1)^n \infty$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \operatorname{sgn}(a_n) \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \operatorname{sgn}(a_n) (-1)^n \infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & m > n \\ \frac{a_n}{b_m}, & m = n \\ \operatorname{sgn} \left(\frac{a_n}{b_m} \right) \infty, & m < n \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & m > n \\ \frac{a_n}{b_m}, & m = n \\ \operatorname{sgn} \left(\frac{a_n}{b_m} \right) (-1)^{n+m} \infty, & m < n \end{cases}$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 < a < 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 < a < 1, \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 < a < 1, \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

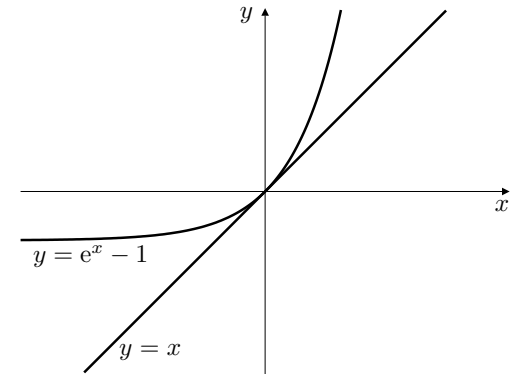
$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

Výpočet limit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

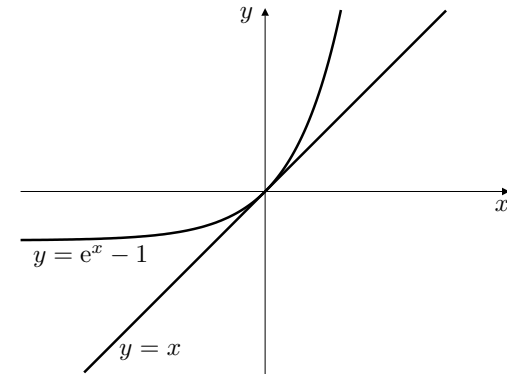


Výpočet limit

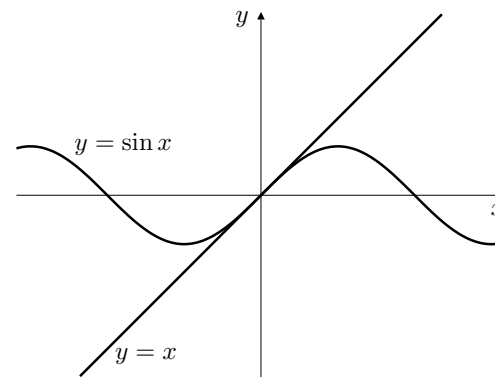
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}^*$$

„Standardní limity:“

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$



- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3}$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{(2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{(2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{(2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = \infty$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{(2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{(2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \text{ neexistuje}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{(2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \text{ neexistuje}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 2}{7 - 4x^3}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 - 2x - 2x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{6 + 4 - 8}{12 - 8 - 3} = 2$$

Funkce je spojitá v bodě $x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x - 1)(x + 1)}{(2x + 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 1}{2x + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \text{ neexistuje}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 2}{7 - 4x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{\frac{7}{x^3} - 4} = \frac{2 - 0 + 0}{0 - 4} = -\frac{1}{2}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} = -1$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sgn}(x) \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = -1 \end{aligned}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sgn}(x) \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = -1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 2x}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-2} - 3^{x+1}}{2^{x-2} + 3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} - 3^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3} = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sgn}(x) \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = -1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cos 5x}{5 \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} \frac{\cos 5x}{5} = \frac{1}{5}$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cos 5x}{5 \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} \frac{\cos 5x}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cos 5x}{5 \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} \frac{\cos 5x}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$