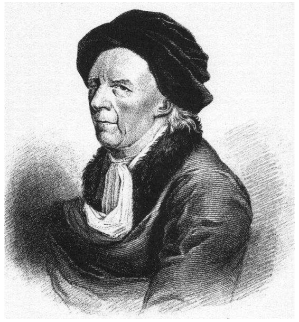
Lineární algebra

M1030 Matematika pro biology

24. 10. 2024

Základní pojmy

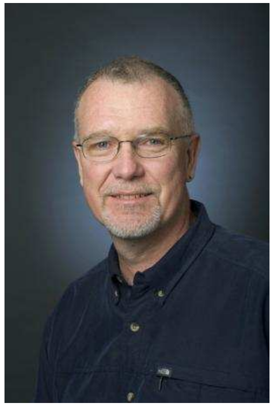
Motivace



- Eulerův model růstu populace: $x(t+1) = rx(t)$

  $x(t)$ ... velikost populace v čase t
  r ... růstový koeficient ($r = 1 + b - d$, b porodnost, d úmrtnost)

- Caswellův model růstu populace strukturované podle plodnosti:



$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sigma_1(1-\gamma)\,x(t) + f\,y(t) \\ y(t+1) &= \sigma_1\gamma\,x(t) + \sigma_2\,y(t) \end{aligned}$$

  $x(t)$ ... množství juvenilních jedinců
  $y(t)$ ... množství plodných jedinců
  f ... očekávané (průměrné) množství potomků plodného jedince za jednotku času
  γ ... P(juvenilní jedinec během časové jednotky dospěje)
  σ_1 ... P(juvenilní jedinec přežije časovou jednotku)
  σ_1 ... P(plodný jedinec přežije časovou jednotku)

Motivace

- Eulerův model růstu populace: $x(t+1) = rx(t)$

- Caswellův model růstu populace strukturované podle plodnosti:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sigma_1(1-\gamma)\,x(t) + \ f\,y(t) \\ y(t+1) &= \qquad\quad \sigma_1\gamma\,x(t) + \sigma_2\,y(t) \end{aligned}$$

Označení: $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\mathsf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & f \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}$

Motivace

- Eulerův model růstu populace: $x(t+1) = rx(t)$

- Caswellův model růstu populace strukturované podle plodnosti: $\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{R}\boldsymbol{x}(t)$

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= \sigma_1(1-\gamma)\,x(t) + \ \ f\,y(t)\\
y(t+1) &= \qquad\quad \sigma_1\gamma\,x(t) + \sigma_2\,y(t)
\end{aligned}
$$

Označení: $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\mathsf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & f \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}$

Matice typu (m,n) ... tabulka čísel o m řádcích a n sloupcích

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Matice typu (m,n) ... tabulka čísel o m řádcích a n sloupcích

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Příklady:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}1415927 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & f \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad C = (7)$$

A je matice typu $(2,3)$, B a R jsou matice typu $(2,2)$, C je matice typu $(1,1)$.

Matice a vektory

Matice typu (m, n) ... tabulka čísel o m řádcích a n sloupcích

$$
\mathsf{A} = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n}
\end{pmatrix}
$$

Příklady:

$$
\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}1415927 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_1(1-\gamma) & f \\ \sigma_1\gamma & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{C} = (7)
$$

A je matice typu $(2, 3)$, B a R jsou matice typu $(2, 2)$, C je matice typu $(1, 1)$.

Číslo lze považovat za speciální případ matice, matice jsou zobecněním čísel.

Matice a vektory

Matice typu (m, n) ... tabulka čísel o m řádcích a n sloupcích

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

m*-rozměrný sloupcový vektor* je matice typu $(m, 1)$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$

Matice a vektory

Matice typu (m, n) ... tabulka čísel o m řádcích a n sloupcích

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

m*-rozměrný sloupcový vektor* je matice typu $(m, 1)$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$

n*-rozměrný řádkový věktor* je matice typu $(1, n)$,

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \ldots & w_n \end{pmatrix} = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n)$$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}1415927 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \ldots$$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3{,}1415927 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \dots$$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3{,}1415927 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *diagonální*, pokud $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$
  (je současně horní i dolní trojúhelníková)

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *diagonální*, pokud $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$
  (je současně horní i dolní trojúhelníková)

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}1415927 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *diagonální*, pokud $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$
  (je současně horní i dolní trojúhelníková)
- *symetrická*, pokud je čtvercová a $(\forall i, j) a_{ij} = a_{ji}$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *diagonální*, pokud $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$
  (je současně horní i dolní trojúhelníková)
- *symetrická*, pokud je čtvercová a $(\forall i, j) a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3{,}1415927 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *diagonální*, pokud $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$
  (je současně horní i dolní trojúhelníková)
- *symetrická*, pokud je čtvercová a $(\forall i, j) a_{ij} = a_{ji}$
- *nulová*, pokud $(\forall i, j) a_{ij} = 0$, $\quad \mathsf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

„Klasifikace“ matic

Řekneme, že matice A typu m, n je

- *čtvercová* řádu n, pokud $m = n$
- *horní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *dolní trojúhelníková*, pokud $(\forall i, j) i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- *diagonální*, pokud $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$
  (je současně horní i dolní trojúhelníková)
- *symetrická*, pokud je čtvercová a $(\forall i, j) a_{ij} = a_{ji}$
- *nulová*, pokud $(\forall i, j) a_{ij} = 0$, $\quad \mathsf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- *jednotková*, pokud $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad \mathsf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; A $\mapsto$ B)

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; A $\mapsto$ B)

- *Transpozice matice*: $\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}' = \mathsf{B}$
  Matice B je typu (n, m), $b_{ij} = a_{ji}$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; A $\mapsto$ B)

- *Transpozice matice*: $\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}' = \mathsf{B}$
  Matice B je typu (n, m), $b_{ij} = a_{ji}$

Příklady:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}14 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3{,}14 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; A $\mapsto$ B)

- *Transpozice matice*: $\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{A}' = \mathsf{B}$
  Matice B je typu (n, m), $b_{ij} = a_{ji}$

Platí: čtvercová matice A je symetrická $\Leftrightarrow$ $\mathsf{A} = \mathsf{A}^\mathsf{T}$.

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; A $\mapsto$ B)

- *Transpozice matice*: $\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}' = \mathsf{B}$
  Matice B je typu (n, m), $b_{ij} = a_{ji}$

Platí: čtvercová matice A je symetrická $\Leftrightarrow$ $\mathsf{A} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$.

- *Opačná matice*: $-\mathsf{A} = \mathsf{B}$
  Matice B je téhož typu (m, n), $b_{ij} = -a_{ij}$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; A $\mapsto$ B)

- *Transpozice matice*: $\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}' = \mathsf{B}$
  Matice B je typu (n, m), $b_{ij} = a_{ji}$

Platí: čtvercová matice A je symetrická $\Leftrightarrow$ $\mathsf{A} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$.

- *Opačná matice*: $-\mathsf{A} = \mathsf{B}$
  Matice B je téhož typu (m, n), $b_{ij} = -a_{ij}$

Příklad:

$$-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}14 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -3{,}14 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

1. unární operace (matice $\mapsto$ matice; A $\mapsto$ B)

- *Transpozice matice*: $\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{A}' = \mathsf{B}$
  Matice B je typu (n, m), $b_{ij} = a_{ji}$

Platí: čtvercová matice A je symetrická $\Leftrightarrow$ $\mathsf{A} = \mathsf{A}^\mathsf{T}$.

- *Opačná matice*: $-\mathsf{A} = \mathsf{B}$
  Matice B je téhož typu (m, n), $b_{ij} = -a_{ij}$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

2. vnější operace (číslo, matice $\mapsto$ matice; c, A $\mapsto$ B)

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

2. vnější operace (číslo, matice $\mapsto$ matice; c, A $\mapsto$ B)

- *Násobení matice číslem (skalárem)*: cA $=$ B
  Matice B je téhož typu (m, n), $b_{ij} = ca_{ij}$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

2. vnější operace (číslo, matice $\mapsto$ matice; c, A $\mapsto$ B)

- *Násobení matice číslem (skalárem)*: cA = B
  Matice B je téhož typu (m, n), $b_{ij} = ca_{ij}$

Příklad:

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}14 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1{,}57 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

A . . . matice typu (m, n)

2. vnější operace (číslo, matice $\mapsto$ matice; c, A $\mapsto$ B)

- *Násobení matice číslem (skalárem)*: cA = B
  Matice B je téhož typu (m, n), $b_{ij} = ca_{ij}$

Platí

$$-\mathsf{A} = (-1)\mathsf{A}$$

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$
  Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$
  Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Příklady:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}14 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0{,}86 & \frac{2}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+3 & 2+(-1) & 3+(-2) \\ -2+(-1) & 3,14+0{,}86 & -\frac{1}{2}+\frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$
  Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Příklady:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3{,}14 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0{,}86 & \frac{2}{4} \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} 1+3 & 2+(-1) & 3+(-2) \\ -2+(-1) & 3,14+0{,}86 & -\frac{1}{2}+\frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$
  Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová $\Rightarrow \mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ je symetrická

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$
  Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová $\Rightarrow$ $\mathsf{A} + \mathsf{A}^\mathsf{T}$ je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$
  Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová $\Rightarrow \mathsf{A} + \mathsf{A}^\mathsf{T}$ je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$$(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C} = \mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C}) \qquad \textit{asociativita}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$
  Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová $\Rightarrow$ $\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$$(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C} = \mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C}) \qquad \textit{asociativita}$$
$$\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{B} + \mathsf{A} \qquad \textit{komutativita}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$
  Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová $\Rightarrow$ $\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$$
\begin{array}{cl}
(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C} = \mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C}) & \textit{asociativita} \\
\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{B} + \mathsf{A} & \textit{komutativita} \\
\mathsf{A} + \mathsf{O} = \mathsf{O} + \mathsf{A} = \mathsf{A} & \textit{existuje neutrální prvek}
\end{array}
$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$
  Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová $\Rightarrow$ $\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$$
\begin{array}{cl}
(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C} = \mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C}) & \textit{asociativita} \\
\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{B} + \mathsf{A} & \textit{komutativita} \\
\mathsf{A} + \mathsf{O} = \mathsf{O} + \mathsf{A} = \mathsf{A} & \textit{existuje neutrální prvek} \\
\mathsf{A} + (-\mathsf{A}) = \mathsf{O} & \textit{ke každé matici existuje opačný prvek}
\end{array}
$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$
  Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Platí: A je čtvercová $\Rightarrow$ $\mathsf{A} + \mathsf{A}^\mathsf{T}$ je symetrická

Vlastnosti sčítání matic:

$$\begin{array}{cl} (\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C} = \mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C}) & \textit{asociativita} \\ \mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{B} + \mathsf{A} & \textit{komutativita} \\ \mathsf{A} + \mathsf{O} = \mathsf{O} + \mathsf{A} = \mathsf{A} & \textit{existuje neutrální prvek} \\ \mathsf{A} + (-\mathsf{A}) = \mathsf{O} & \textit{ke každé matici existuje opačný prvek} \end{array}$$

Matice spolu s operací sčítání tvoří Abelovskou grupu.

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součet matic*: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C}$
  Obě matice B a C jsou téhož typu (m, n), $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto$ C)

- *Součin matic*: $\mathsf{AB} = \mathsf{C}$
  Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto$ C)

- *Součin matic*: AB $=$ C
  Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součin matic*: AB = C
  Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \\ -3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) & -3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ 6 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) & 6 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -1 \\ 0 & 22 \end{pmatrix},$$

BA . . . nelze vynásobit

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součin matic*: $\mathsf{AB} = \mathsf{C}$
  Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 19 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -11 & 1 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; A, B $\mapsto$ C)

- *Součin matic*: AB = C
  Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; A, B $\mapsto$ C)

- *Součin matic*: AB = C
  Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{A}^2 = \mathsf{AA} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto \mathsf{C}$)

- *Součin matic*: $\mathsf{AB} = \mathsf{C}$
  Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Vlastnosti násobení matic:

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $\mathsf{A}, \mathsf{B} \mapsto$ C)

- *Součin matic*: AB = C
  Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Vlastnosti násobení matic:

(AB)C = A(BC)   *asociativita*

Operace s maticemi

A . . . matice typu (m, n)

3. binární operace (matice, matice $\mapsto$ matice; $A, B \mapsto C$)

- *Součin matic*: $AB = C$
  Matice B je typu (n, p) a matice C je typu (m, p)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Vlastnosti násobení matic:

$(AB)C = A(BC)$	*asociativita*
$m = n \Rightarrow AE = EA = A$	k čtvercové matici existuje neutrální prvek

Řešení soustav rovnic – Gaussova eliminace

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \mid \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \mid \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \Big| \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad +$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \Big| \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad +$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -y &= -1 \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \big| \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad +$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -y &= -1 \end{aligned} \qquad y = 1,\ x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \Big| \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad +$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -y &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad y = 1,\ x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \mid \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad +$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -y &= -1 \end{aligned} \qquad y = 1,\ x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

Označení: $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ Soustava rovnic: $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \Big| \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad +$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -y &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad y = 1,\ x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

Označení: $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ Soustava rovnic: $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Ještě stručnější zápis: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad \big| \cdot (-2) \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -8 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad + \qquad \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -8 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -y &= -1 \end{aligned} \qquad y = 1,\ x = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Označení: $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Soustava rovnic: $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Ještě stručnější zápis: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

Soustava lineárních rovnic

Soustava (systém) m lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Soustava lineárních rovnic

Soustava (systém) m lineárních rovnic o n neznámých:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

Maticový zápis: $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \dots \textit{ matice soustavy} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \dots \textit{ vektor pravých stran}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \dots \textit{ vektor neznámých}$$

Soustava lineárních rovnic

Soustava (systém) m lineárních rovnic o n neznámých:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}
$$

Maticový zápis: $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Všechny informace o systému jsou obsaženy v *rozšířené matici soustavy*

$$
(\mathsf{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
$$

Gaussova eliminační metoda

Elementární řádkové transformace matice:

- výměna (přehození) řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení jednoho řádku k jinému

Gaussova eliminační metoda

Elementární řádkové transformace matice:

- výměna (přehození) řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení jednoho řádku k jinému

Označení: $A \sim B$ ... „matice B vznikla z matice A pomocí elementárních transformací.“

Gaussova eliminační metoda

Elementární řádkové transformace matice:

- výměna (přehození) řádků
- vynásobení řádku nenulovým číslem
- přičtení jednoho řádku k jinému

Označení: A $\sim$ B ... „matice B vznikla z matice A pomocí elementárních transformací.“

Algoritmus metody:

1. Užitím elementárních řádkových transformací převedeme rozšířenou matici soustavy na vhodnou horní trojúhelníkovou.
2. Výslednou matici přepíšeme do tvaru soustavy rovnic a vypočítáme jednotlivé složky řešení.

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

přehození 1. a 2. řádku

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

vynásobení 1. řádku číslem -3

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \qquad &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

přičtení 1. řádku ke 2.

Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \quad y \qquad &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \quad y - \quad z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

vynásobení 1. řádku číslem $\frac{2}{3}$

Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

přičtení 1. řádku k 3.

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right)$$

vynásobení 1. řádku číslem $-\frac{1}{2}$

Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ y &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ y - \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right)$$

vynásobení 2. řádku číslem 5

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

vynásobení 3. řádku číslem -7

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \qquad &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

přičtení 2. řádku k 3.

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

vynásobení 2. řádku číslem $\frac{1}{5}$

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

vynásobení 3. řádku číslem $\frac{1}{3}$

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \qquad &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x - 2y + \ \ 4z &= 1 \\ 7y - 12z &= -3 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + \ \ y \qquad &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + \ \ y - \ \ z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x - 2y + \ \ 4z &= 1 \\ 7y - 12z &= -3 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

$z = 2$

Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 1 \\ 7y - 12z &= -3 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

$z = 2$, $y = \frac{1}{7}(-3 + 12 \cdot 2) = 3$

Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} 3x + y \phantom{{}+4z} &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & -35 & 63 & 21 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & -60 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 1 \\ 7y - 12z &= -3 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

$z = 2$, $y = \frac{1}{7}(-3 + 12 \cdot 2) = 3$, $x = 1 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = -1$

Příklady:

$$\begin{aligned}2x + 3y - z &= -12\\ x + 2y + z &= 9\\ 5x + 8y + 2z &= 15\end{aligned}$$

Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= -12 \\ x + 2y + z &= 9 \\ 5x + 8y + 2z &= 15 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -12 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 8 & 2 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & -2 & -3 & -30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 3 & 30 \end{array}\right)$$

Příklady:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= -12 \\ x + 2y + z &= 9 \\ 5x + 8y + 2z &= 15 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -12 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 8 & 2 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & -2 & -3 & -30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 3 & 30 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminační metoda

Příklady:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= -12 \\ x + 2y + z &= 9 \\ 5x + 8y + 2z &= 15 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -12 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 8 & 2 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & -2 & -3 & -30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 3 & 30 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

$z = 10$, $y = 0$, $x = -1$

Příklady:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad\quad &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Příklady:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = -1$

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad y = 1,\ x = 2$$

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad y = 1,\ x = 2$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad y = 1,\ x = 2$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

úloha je neřešitelná

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$\begin{aligned} x+2y &= 4\\ 2x+3y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x+2y &= 4\\ y &= 1 \end{aligned} \qquad y=1,\ x=2$$

$$\begin{aligned} x+2y &= 4\\ 2x+4y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x+2y &= 4\\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

úloha je neřešitelná

$$\begin{aligned} x+2y &= 4\\ 2x+4y &= 8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x+2y &= 4\\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Příklad:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad y = 1,\ x = 2$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

úloha je neřešitelná

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 4y &= 8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

úloha je řešitelná, řešení není jednoznačné;
druhou neznámou volíme jako parametr: $x = 4 - 2y$

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Hodnost matice A, $h(\mathsf{A})$:

počet nenulových řádků v matici, která vznikne z matice A Gaussovou eliminací.

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Hodnost matice A, $h(\mathsf{A})$:

počet nenulových řádků v matici, která vznikne z matice A Gaussovou eliminací.

Kronckerova-Capelliho věta:

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Hodnost matice A, $h(\mathsf{A})$:

počet nenulových řádků v matici, která vznikne z matice A Gaussovou eliminací.

Kronckerova-Capelliho věta:

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

$h(\mathsf{A}) < h(\mathsf{A}\|\boldsymbol{b})$	$\Rightarrow$	úloha nemá řešení
$h(\mathsf{A}) = h(\mathsf{A}\|\boldsymbol{b}) < n$	$\Rightarrow$	úloha má řešení, řešení není jednoznačné
$h(\mathsf{A}) = h(\mathsf{A}\|\boldsymbol{b}) = n$	$\Rightarrow$	úloha má jednoznačné řešení

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Hodnost matice A, $h(\mathsf{A})$:

počet nenulových řádků v matici, která vznikne z matice A Gaussovou eliminací.

Kronckerova-Capelliho věta:

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

$$\begin{array}{lcl} h(\mathsf{A}) < h(\mathsf{A}|\boldsymbol{b}) & \Rightarrow & \text{úloha nemá řešení} \\ h(\mathsf{A}) = h(\mathsf{A}|\boldsymbol{b}) < n & \Rightarrow & \text{úloha má řešení, řešení není jednoznačné} \\ h(\mathsf{A}) = h(\mathsf{A}|\boldsymbol{b}) = n & \Rightarrow & \text{úloha má jednoznačné řešení} \end{array}$$

Ve druhém případě lze řešení vyjádřit pomocí $n - h(\mathsf{A})$ parametrů.

Příklad:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + 4y - 2z &= 3 \\ x + 3y - z &= 2 \end{aligned}$$

Příklad:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + 4y - 2z &= 3 \\ x + 3y - z &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení není jednoznačné, $y = 1 + z$, $x = 1 - 2y = 1 - 2(1 + z) = -1 - 2z$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Předpokládáme, že matice soustavy je typu m, n, tj. jedná se o soustavu m rovnic o n neznámých.

Pro zjednodušení zápisu budeme v rozšířené matici soustavy prvky v posledním sloupci značit symboly $a_{i,j+1}$.

Algoritmus úpravy rozšířené matice soustavy:

1. $j := 1$ (indexu j přiřaď hodnotu 1)
2. mezi prvky $a_{j,j}, a_{j+1,j}, a_{j+2,j}, \ldots, a_{m,j}$ najdi $a_{k,j}$ takový, že $(\forall i = j, j+1, j+2, \ldots, m)|a_{k,j}| \geq |a_{i,j}|$ (v j-tém sloupci najdi prvek s největší absolutní hodnotou, příslušný řádek považuj za k-tý)
3. pokud $|a_{k,j}| = 0$, jdi na krok 7.
4. přehoď j-tý a k-tý řádek
5. j-tý řádek vynásob číslem $\dfrac{1}{a_{j,j}}$
6. dělej pro každé $i \neq j$: k i-tému řádku přičti j-tý řádek násobený číslem $-a_{i,j}$
7. $j := j + 1$ (index j zvětši o 1)
8. pokud $j \leq m$, jdi zpět na krok 2., jinak konec

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{11} & -\frac{42}{11} \end{array}\right)$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$
\begin{aligned}
3x - 2y + 4z &= 5 \\
-5x + 7y - 8z &= 2 \\
5x - 6y + 7z &= -3
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{11} & -\frac{42}{11} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)
$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{11} & -\frac{42}{11} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Úplná eliminace s výběrem hlavního prvku

Příklad:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 5 \\ -5x + 7y - 8z &= 2 \\ 5x - 6y + 7z &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -8 & 2 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 7 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{11} & -\frac{42}{11} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{12}{11} & \frac{39}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{31}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$x = -3,\ y = 5,\ z = 6$

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

- Vynásobení p-tého řádku číslem c: matice R,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

- Vynásobení p-tého řádku číslem c: matice R,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\text{vynásobení 2. řádku číslem } -2: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -6 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

- Vynásobení p-tého řádku číslem c: matice R,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení p-tého řádku ke q-tému: matice S,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

- Vynásobení p-tého řádku číslem c: matice R,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení p-tého řádku ke q-tému: matice S,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\text{přičtení 2. řádku ke 3.:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

- Vynásobení p-tého řádku číslem c: matice R,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení p-tého řádku ke q-tému: matice S,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přehození p-tého a q-tého řádku: matice T,

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & p \neq i = j \neq q, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q, \text{ nebo } i = q \text{ a } j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

- Vynásobení p-tého řádku číslem c: matice R,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení p-tého řádku ke q-tému: matice S,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přehození p-tého a q-tého řádku: matice T,

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & p \neq i = j \neq q, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q, \text{ nebo } i = q \text{ a } j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

přehození 2. a 3. řádku: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Závěrečná poznámka

Elementárním řádkovým transformacím matice A odpovídá násobení matice A jistou maticí zleva.

- Vynásobení p-tého řádku číslem c: matice R,

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq p \\ c, & i = j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přičtení p-tého řádku ke q-tému: matice S,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- Přehození p-tého a q-tého řádku: matice T,

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & p \neq i = j \neq q, \text{ nebo } i = p \text{ a } j = q, \text{ nebo } i = q \text{ a } j = p \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$