Lineární algebra

M1030 Matematika pro biology

31. 10. 2024

Determinanty

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

$$\begin{aligned} ax + \frac{b}{d}(f - cx) &= e \\ (ad - bc)x &= ed - bf \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

$$\begin{aligned} ax + \frac{b}{d}(f - cx) &= e \\ (ad - bc)x &= ed - bf \qquad \text{předpokládejme, že } ad - bc \neq 0 \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

$$\begin{aligned} ax + \frac{b}{d}(f - cx) &= e \\ (ad - bc)x &= ed - bf \qquad \text{předpokládejme, že } ad - bc \neq 0 \\ x &= \frac{ed - bf}{ad - bc} \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

$$y = \frac{f - cx}{d}$$

$$\begin{aligned} ax + \frac{b}{d}(f - cx) &= e \\ (ad - bc)x &= ed - bf \qquad \text{předpokládejme, že } ad - bc \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{ed - bf}{ad - bc} \\ y &= \frac{1}{d}\left(f - \frac{c(ed - bf)}{ad - bc}\right) = \frac{1}{d}\frac{adf - ced}{ad - bc} = \frac{af - ce}{ad - bc} \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \qquad \text{je-li } ad - bc \neq 0 \quad \text{pak} \quad x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \; y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \qquad \text{je-li } ad - bc \neq 0 \quad \text{pak} \quad x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \; y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Matice soustavy $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, vektor pravých stran $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \qquad \text{je-li } ad - bc \neq 0 \quad \text{pak} \quad x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \; y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Matice soustavy $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, vektor pravých stran $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

Determinant matice A:

$$\det \mathsf{A} = |\mathsf{A}| = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Motivace: řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dosazovací metodou

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \qquad \text{je-li } ad - bc \neq 0 \quad \text{pak} \quad x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \ y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Matice soustavy $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, vektor pravých stran $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

Determinant matice A:

$$\det \mathsf{A} = |\mathsf{A}| = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Pokud $\det \mathsf{A} \neq 0$, pak jediné řešení dané soustavy rovnic je:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Příklad:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Příklad:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0,$$

Determinant čtvercové matice řádu 2

Příklad:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0,$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{1} = 2 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 1.$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ dx + ey + fz &= l \\ gx + hy + jz &= m \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ dx + ey + fz &= l \\ gx + hy + jz &= m \end{aligned}$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$
\begin{aligned}
ax + by + cz &= k \\
dx + ey + fz &= l \\
gx + hy + jz &= m
\end{aligned}
$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

$$
\begin{aligned}
ax + by + \frac{c}{j}(m - gx - hy) &= k \\
dx + ey + \frac{f}{j}(m - gx - hy) &= l
\end{aligned}
$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$
\begin{aligned}
ax + by + cz &= k \\
dx + ey + fz &= l \\
gx + hy + jz &= m
\end{aligned}
$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

$$
\begin{aligned}
ax + by + \frac{c}{j}(m - gx - hy) &= k \\
dx + ey + \frac{f}{j}(m - gx - hy) &= l
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(aj - cg)x + (bj - ch)y &= kj - cm \\
(dj - fg)x + (ej - fh)y &= lj - fm
\end{aligned}
$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ dx + ey + fz &= l \\ gx + hy + jz &= m \end{aligned}$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

$$\begin{aligned} (aj - cg)x + (bj - ch)y &= kj - cm \\ (dj - fg)x + (ej - fh)y &= lj - fm \end{aligned}$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých dosazovací metodou:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ dx + ey + fz &= l \\ gx + hy + jz &= m \end{aligned}$$

$$z = \frac{1}{j}(m - gx - hy)$$

$$\begin{aligned} (aj - cg)x + (bj - ch)y &= kj - cm \\ (dj - fg)x + (ej - fh)y &= lj - fm \end{aligned}$$

O jednoznačné řešitelnosti dané soustavy rovnic tedy rozhoduje

$$\det \begin{pmatrix} aj - cg & bj - ch \\ dj - fg & ej - fh \end{pmatrix} =$$

$$= aej^2 - ajfh - cgej + cgfh - (bj^2d - bjfg - chdj + chfg) =$$

$$= j(aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj)$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \color{red}{a} & b & c \\ d & \color{red}{e} & f \\ g & h & \color{red}{j} \end{vmatrix} = \color{red}{aej} + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & \color{red}{c} \\ \color{red}{d} & e & f \\ g & \color{red}{h} & j \end{vmatrix} = aej + bfg + \color{red}{cdh} - ceg - afh - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & {\color{red}c} \\ d & {\color{red}e} & f \\ {\color{red}g} & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - {\color{red}ceg} - afh - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \color{red}{a} & b & c \\ d & e & \color{red}{f} \\ g & \color{red}{h} & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - \color{red}{afh} - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{array}{cccc|ccc|cc}
\oplus & \oplus & \oplus & & & & & & \\
\searrow & \searrow & \searrow & & & & & & \\
& & & & a & b & c & a & b \\
& & & & d & e & f & d & e \\
& & & & g & h & j & g & h \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & & & & & & \\
\ominus & \ominus & \ominus & & & & & &
\end{array} \qquad = aej + bfg + cdh - gec - hfa - jdb$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{array}{c} \oplus \quad \oplus \quad \oplus \\ \searrow \quad \searrow \quad \searrow \\ \left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{array}\right| \begin{array}{cc} a & b \\ d & e \\ g & h \end{array} \\ \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \\ \ominus \quad \ominus \quad \ominus \end{array} = aej + bfg + cdh - gec - hfa - jdb$$

Laplaceův rozvoj determinantu podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj =$$

$$= a(ej - fh) - b(dj - fg) + c(dh - eg)$$

Determinant čtvercové matice řádu 3

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj$$

Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{array}{ccc|cc|c} \overset{\oplus}{\searrow} & \overset{\oplus}{\searrow} & \overset{\oplus}{\searrow} & & & \\ a & b & c & a & b & \\ d & e & f & d & e & = aej + bfg + cdh - gec - hfa - jdb \\ g & h & j & g & h & \\ \underset{\ominus}{\nearrow} & \underset{\ominus}{\nearrow} & \underset{\ominus}{\nearrow} & & & \end{array}$$

Laplaceův rozvoj determinantu podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - afh - bdj =$$

$$= a(ej - fh) - b(dj - fg) + c(dh - eg) = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & j \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k \\ dx + ey + fz &= l \\ gx + hy + jz &= m \end{aligned}$$

Pokud $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} \neq 0$ pak má daná soustava rovnic jednoznačné řešení;

složky řešení jsou dány výrazy

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} k & b & c \\ l & e & f \\ m & h & j \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & k & c \\ d & l & f \\ g & m & j \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & b & k \\ d & e & l \\ g & h & m \end{vmatrix}$$

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= -1 \\ x + y - z &= 4 \end{aligned}$$

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$
\begin{aligned}
2x + 3y + z &= 1\\
x + 2y + z &= -1\\
x + y - z &= 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 1 - (2 + 2 - 3) = -1 \neq 0
$$

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} 2x+3y+z &= 1 \\ x+2y+z &= -1 \\ x+\ \ y-z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4+3+1-(2+2-3) = -1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+12-1-(8+1+3) = -3, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2+1+4-(-1+8-1) = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16-3+1-(2-2+12) = 2.$$

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= -1 \\ x + y - z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 1 - (2 + 2 - 3) = -1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 12 - 1 - (8 + 1 + 3) = -3, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 4 - (-1 + 8 - 1) = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 3 + 1 - (2 - 2 + 12) = 2.$$

$x = 3, \; y = -1, \; z = -2$

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Determinant čtvercové matice řádu n

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinant čtvercové matice řádu n

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinant čtvercové matice řádu n

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots$$

Determinant čtvercové matice řádu n

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje podle 1. řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

Determinant čtvercové matice řádu n

Determinant čtvercové matice A řádu 1 je číslo $|\mathsf{A}| = a_{11}$

Determinant čtvercové matice A řádu n je číslo

$$|\mathsf{A}| = a_{11}|\mathsf{A}_{11}| - a_{12}|\mathsf{A}_{12}| + a_{13}|\mathsf{A}_{13}| + \cdots + (-1)^{n+1}|\mathsf{A}_{1n}|$$

kde A_{1j} označuje matici, která vznikne z matice A vynecháním prvního řádku a j tého sloupce.

Determinant čtvercové matice řádu n

Determinant čtvercové matice A řádu 1 je číslo $|\mathsf{A}| = a_{11}$

Determinant čtvercové matice A řádu n je číslo

$$|\mathsf{A}| = a_{11}|\mathsf{A}_{11}| - a_{12}|\mathsf{A}_{12}| + a_{13}|\mathsf{A}_{13}| + \cdots + (-1)^{n+1}|\mathsf{A}_{1n}|$$

kde A_{1j} označuje matici, která vznikne z matice A vynecháním prvního řádku a j tého sloupce.

Obecněji: Determinant čtvercové matice A řádu n je číslo

$$|\mathsf{A}| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|\mathsf{A}_{ij}| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|\mathsf{A}_{ij}|$$

kde A_{ij} označuje matici, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j tého sloupce.

Determinant čtvercové matice řádu n

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + 6 + 6 - (3 - 6 - 2) - 2[-2 + 2 + 3 - (1 + 12 - 1)] + 3[-4 - 2 + 3 - (2 + 12 + 1)] = -18$$

Řešení soustav rovnic – Cramerovo pravidlo

Soustava n rovnic o n neznámých

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$, pak soustava rovnic má jediné řešení, jehož složky jsou dány rovnostmi

$$x_i = \frac{1}{|\mathsf{A}|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Příklad: Najděte čtvrtou složku řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+ 2x_4} &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Příklad: Najděte čtvrtou složku řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

Příklad: Najděte čtvrtou složku řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 - 3 + 24 - (12 + 3 + 10) - 2\big(10 - 1 + 12 - (4 - 6 + 5)\big) + 3\big(20 + 1 + 12 - (8 - 6 - 5)\big) -$$
$$-5\big(12 - 1 + 3 - (2 + 6 - 3)\big) = 18$$

Příklad: Najděte čtvrtou složku řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad\quad &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 - 3 + 24 - (12 + 3 + 10) - 2\big(10 - 1 + 12 - (4 - 6 + 5)\big) + 3\big(20 + 1 + 12 - (8 - 6 - 5)\big) -$$
$$-5\big(12 - 1 + 3 - (2 + 6 - 3)\big) = 18$$

$$x_4 = \frac{18}{-18} = -1$$

Regulární matice

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Užití: $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Užití:
$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \mid \text{násobení maticí } \mathsf{A}^{-1} \text{ zleva}$$

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Užití:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \mid \text{násobení maticí } \mathsf{A}^{-1} \text{ zleva} \\ \boldsymbol{x} &= \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Výpočet: $\mathsf{X} \quad = \quad \mathsf{A}^{-1}$

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Výpočet: $\mathsf{X} = \mathsf{A}^{-1}$ | násobení maticí A zleva

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \mathsf{X} &= \mathsf{A}^{-1} \mid \text{násobení maticí A zleva} \\ \mathsf{AX} &= \mathsf{E} \end{aligned}$$

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \mathsf{X} &= \mathsf{A}^{-1} \\ \mathsf{A}\mathsf{X} &= \mathsf{E} \end{aligned}$$

j-tý sloupec matic:

$$\mathsf{A} \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{j-1,j} \\ x_{jj} \\ x_{j+1,j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \mathsf{X} &= \mathsf{A}^{-1} \\ \mathsf{AX} &= \mathsf{E} \end{aligned}$$

j-tý sloupec matic:

$$\mathsf{A} \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{j-1,j} \\ x_{jj} \\ x_{j+1,j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

To je soustava n rovnic o n neznámých. Je jednoznačně řešitelná, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.

Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} k čtvercové matici A řádu n:

$$\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

Výpočet:

$$\begin{aligned} \mathsf{X} &= \mathsf{A}^{-1} \\ \mathsf{AX} &= \mathsf{E} \end{aligned}$$

j-tý sloupec matic:

$$\mathsf{A} \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{j-1,j} \\ x_{jj} \\ x_{j+1,j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

To je soustava n rovnic o n neznámých. Je jednoznačně řešitelná, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Inverzní matici najdeme řešením n soustav n lineárních rovnic o n neznámých.

Příklady:

Inverzní matice

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & 0{,}4 \end{array}\right)$$

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & 0{,}4 \end{array}\right)$$

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice

Příklady:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & 0{,}4 \end{array}\right)$$

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Obecně platí:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverzní matice

Příklady:

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

Příklady:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -33 & 0 & -9 & -6 & 0 \\ 0 & 105 & 0 & 0 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -11 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 0 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -11 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & -21 & -47 & 22 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -33 & 15 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -21 & -47 & 22 \\ 0 & -3 & 2 \\ -14 & -33 & 15 \end{pmatrix}$$

Definice a vlastnosti

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.

Definice a vlastnosti

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Ekvivalentně: pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$.

Definice a vlastnosti

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Ekvivalentně: pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$.

Je-li matice A regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Definice a vlastnosti

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Ekvivalentně: pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$.

Je-li matice A regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Vlastnosti násobení regulárních matic:

Definice a vlastnosti

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Ekvivalentně: pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$.

Je-li matice A regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Vlastnosti násobení regulárních matic:

$$(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC}) \quad \textit{asociativita}$$

Definice a vlastnosti

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Ekvivalentně: pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$.

Je-li matice A regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Vlastnosti násobení regulárních matic:

$$(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC}) \quad \textit{asociativita}$$
$$\mathsf{AE} = \mathsf{EA} = \mathsf{A} \quad \textit{existuje neutrální prvek}$$

Definice a vlastnosti

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Ekvivalentně: pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$.

Je-li matice A regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Vlastnosti násobení regulárních matic:

$(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC})$	*asociativita*
$\mathsf{AE} = \mathsf{EA} = \mathsf{A}$	*existuje neutrální prvek*
$\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{E}$	*ke každé regulární matici existuje inverzní prvek*

Definice a vlastnosti

Čtvercová matice A řádu n je *regulární*, pokud $h(\mathsf{A}) = n$.
Ekvivalentně: pokud $|\mathsf{A}| \neq 0$.

Je-li matice A regulární, pak k ní existuje matice inverzní.

Vlastnosti násobení regulárních matic:

$(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC})$	*asociativita*
$\mathsf{AE} = \mathsf{EA} = \mathsf{A}$	*existuje neutrální prvek*
$\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{E}$	*ke každé regulární matici existuje inverzní prvek*

Regulární matice spolu s operací násobení tvoří grupu.

Aplikace – maticové populační modely

Patrick Holt Leslie (1900–1972)

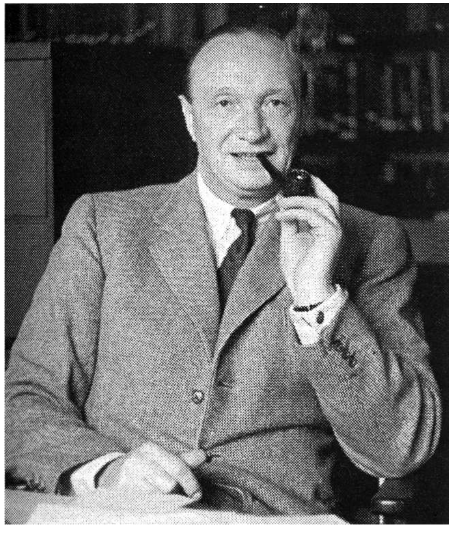
Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet samic věku i měsíců; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ měsíců
p_i – podíl samic věku i, které přežijí do dalšího měsíce

Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet samic věku i měsíců; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ měsíců
p_i – podíl samic věku i, které přežijí do dalšího měsíce

$$x_{i+1}(t+1) = p_i x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1$$



Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet samic věku i měsíců; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ měsíců
p_i – podíl samic věku i, které přežijí do dalšího měsíce
f_i – očekávaný počet dcer, které během měsíce porodí samice věku i měsíců

$$x_{i+1}(t+1) = p_i x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1$$

Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet samic věku i měsíců; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ měsíců
p_i – podíl samic věku i, které přežijí do dalšího měsíce
f_i – očekávaný počet dcer, které během měsíce porodí samice věku i měsíců

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \cdots + f_k x_k(t) \\ x_{i+1}(t+1) &= p_i x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1 \end{aligned}$$

Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet samic věku i měsíců; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ měsíců
p_i – podíl samic věku i, které přežijí do dalšího měsíce
f_i – očekávaný počet dcer, které během měsíce porodí samice věku i měsíců

$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \cdots + f_k x_k(t) \\
x_{i+1}(t+1) &= p_i x_i(t), \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, k-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t+1) \\ x_k(t+1) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
f_1 & f_2 & f_3 & \ldots & f_{k-1} & f_k \\
p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & p_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & p_{k-1} & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t) \\ x_k(t) \end{pmatrix}
$$

Leslieho populace

$x_i(t)$ – počet samic věku i měsíců; přesněji věku z intervalu $(i-1, i\rangle$ měsíců
p_i – podíl samic věku i, které přežijí do dalšího měsíce
f_i – očekávaný počet dcer, které během měsíce porodí samice věku i měsíců

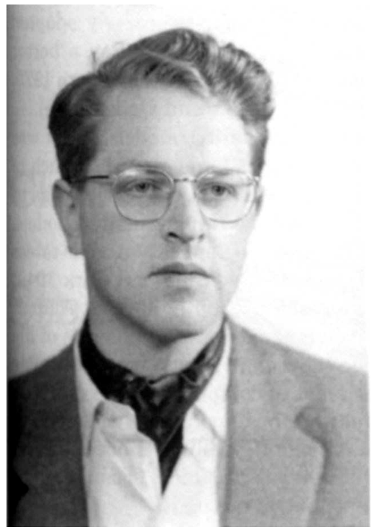
$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \cdots + f_k x_k(t) \\
x_{i+1}(t+1) &= p_i x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t+1) \\ x_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \ldots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t) \\ x_k(t) \end{pmatrix}
$$

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)$$

Populace strukturovaná podle stádií

Leonard Lefkowitch (1929–2010)



Populace strukturovaná podle stádií

Obojživelníci: vajíčko – pulec – dospělý jedinec



Populace strukturovaná podle stádií

Obojživelníci: vajíčko – pulec – dospělý jedinec

Hmyz: vajíčko – larva – kukla – imago

Populace strukturovaná podle stádií

k – počet stádií

$x_i(t)$ – počet jedinců stadia i v čase t ($i = 1$ – „novorozenci“)

q_i – podíl jedinců stadia i, kteří přežijí období a nepromění se; $0 < q_i < 1$

p_i – podíl jedinců stadia i, kteří se během období přemění na stadium $i+1$;

$$0 < p_i \leq 1,$$
$$p_i + q_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

f_i – očekávaný počet „novorozenců“, které vyprodukuje jedinec stadia $i > 1$; $f_i \geq 0$

Populace strukturovaná podle stádií

k – počet stádií

$x_i(t)$ – počet jedinců stadia i v čase t ($i = 1$ – „novorozenci“)

q_i – podíl jedinců stadia i, kteří přežijí období a nepromění se; $0 < q_i < 1$

p_i – podíl jedinců stadia i, kteří se během období přemění na stadium $i+1$;

$0 < p_i \leq 1$,

$p_i + q_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k$

f_i – očekávaný počet „novorozenců“, které vyprodukuje jedinec stadia $i > 1$; $f_i \geq 0$

$$x_1(t+1) = \sum_{j=2}^{k} f_j x_j(t), \qquad x_i(t+1) = q_i x_i(t) + p_i x_{i-1}(t),\ i = 2, 3, \ldots, k$$

Populace strukturovaná podle stádií

k – počet stádií
$x_i(t)$ – počet jedinců stadia i v čase t ($i = 1$ – „novorozenci“)
q_i – podíl jedinců stadia i, kteří přežijí období a nepromění se; $0 < q_i < 1$
p_i – podíl jedinců stadia i, kteří se během období přemění na stadium $i + 1$;

$$0 < p_i \leq 1,$$
$$p_i + q_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

f_i – očekávaný počet „novorozenců“, které vyprodukuje jedinec stadia $i > 1$; $f_i \geq 0$

$$x_1(t+1) = \sum_{j=2}^{k} f_j x_j(t), \qquad x_i(t+1) = q_i x_i(t) + p_i x_{i-1}(t),\ i = 2, 3, \dots, k$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ \vdots \\ x_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & f_2 & \dots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & q_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{k-1} & q_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

Populace strukturovaná podle stádií

k – počet stádií
$x_i(t)$ – počet jedinců stadia i v čase t ($i = 1$ – „novorozenci“)
q_i – podíl jedinců stadia i, kteří přežijí období a nepromění se; $0 < q_i < 1$
p_i – podíl jedinců stadia i, kteří se během období přemění na stadium $i+1$;

$0 < p_i \leq 1,$

$p_i + q_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k$

f_i – očekávaný počet „novorozenců“, které vyprodukuje jedinec stadia $i > 1$; $f_i \geq 0$

$$x_1(t+1) = \sum_{j=2}^{k} f_j x_j(t), \qquad x_i(t+1) = q_i x_i(t) + p_i x_{i-1}(t),\ i = 2, 3, \ldots, k$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ \vdots \\ x_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & f_2 & \ldots & f_{k-1} & f_k \\ p_1 & q_3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p_{k-1} & q_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)$$

Obecná strukturovaná populace

Příklad: Populace *Dipsacus sylvestris*

Obecná strukturovaná populace

Příklad: Populace *Dipsacus sylvestris*

Časová jednotka: rok

Třídění:

třída	popis	
1,2	semena	dormantní 1.rok, dormantní 2. rok
3,4,5	růžice	malá, střední, velká
6	kvetoucí rostlina	





Obecná strukturovaná populace

Příklad: Populace *Dipsacus sylvestris*

Časová jednotka: rok

Třídění:

třída	popis	
1,2	semena	dormantní 1.rok, dormantní 2. rok
3,4,5	růžice	malá, střední, velká
6	kvetoucí rostlina	

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \\ x_5(t+1) \\ x_6(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 322{,}38 \\ 0{,}966 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}013 & 0{,}010 & 0{,}125 & 0 & 0 & 3{,}448 \\ 0{,}007 & 0 & 0{,}125 & 0{,}238 & 0 & 30{,}170 \\ 0{,}001 & 0 & 0{,}036 & 0{,}245 & 0{,}167 & 0{,}863 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}023 & 0{,}750 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix}$$