# Aplikace posloupností – růst populace

M1030 Matematika pro biology

21. 11. 2024

# Aplikace: Růst homogenní populace

# Růst homogenní populace

# Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase $t$, který plyne v „přirozených“ jednotkách

# Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase $t$, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$

# Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase $t$, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t)$$

$d$ – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1\rangle$
$b$ – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

# Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase $t$, který plyne v „přirozených" jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t)$$

$d$ – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1\rangle$
$b$ – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

# Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase $t$, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t)$$

$d$ – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in \langle 0, 1 \rangle$
$b$ – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

# Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase $t$, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t) = rx(t)$$

$d$ – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1\rangle$
$b$ – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

# Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase $t$, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t) = rx(t)$$

$d$ – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0,1\rangle$
$b$ – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

# Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase $t$, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t) = rx(t)$$

$d$ – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0,1\rangle$
$b$ – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

Rekurentní formule pro geometrickou posloupnost

Thomas R. Malthus 1766–1834

# Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase $t$, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t) = rx(t)$$

$d$ – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0,1\rangle$
$b$ – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1+b-d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

$x(0) = x_0$ – počáteční velikost populace

$$x(t) = x_0 r^t$$

Thomas R. Malthus 1766–1834

# Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase $t$, který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t+1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$
$$x(t+1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1+b-d)x(t) = rx(t)$$

$d$ – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0,1\rangle$
$b$ – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$
$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t+1) = rx(t)$$

$x(0) = x_0$ – počáteční velikost populace

$$x(t) = x_0 r^t$$

$$\begin{cases} r > 1, \ \text{tj. } b > d, & \text{populace roste} \\ r = 1, \ \text{tj. } b = d, & \text{populace má konstatntní velikost} \\ r < 1, \ \text{tj. } b < d, & \text{populace vymírá} \end{cases}$$

Thomas R. Malthus 1766–1834

# Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

# Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient

$$r = \frac{x(t+1)}{x(t)}$$

# Růst homogenní populace

$$x(t+1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

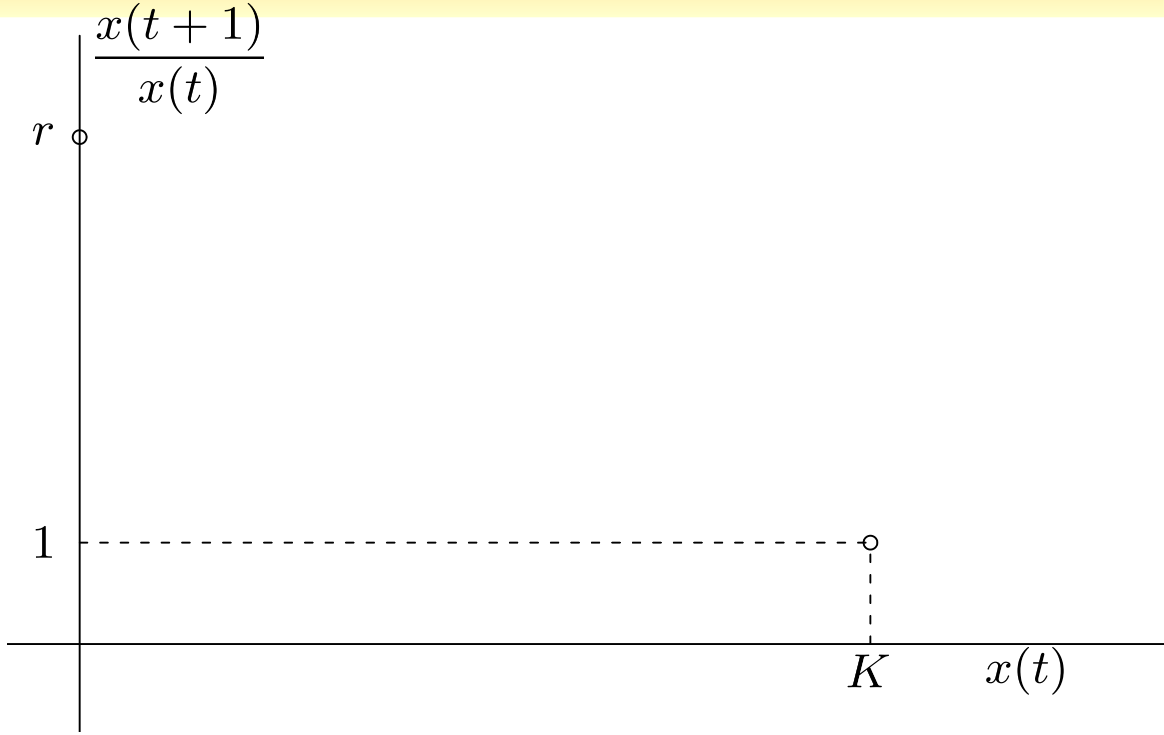
růstový koeficient

$$r = \frac{x(t+1)}{x(t)}$$

závisí na velikosti populace

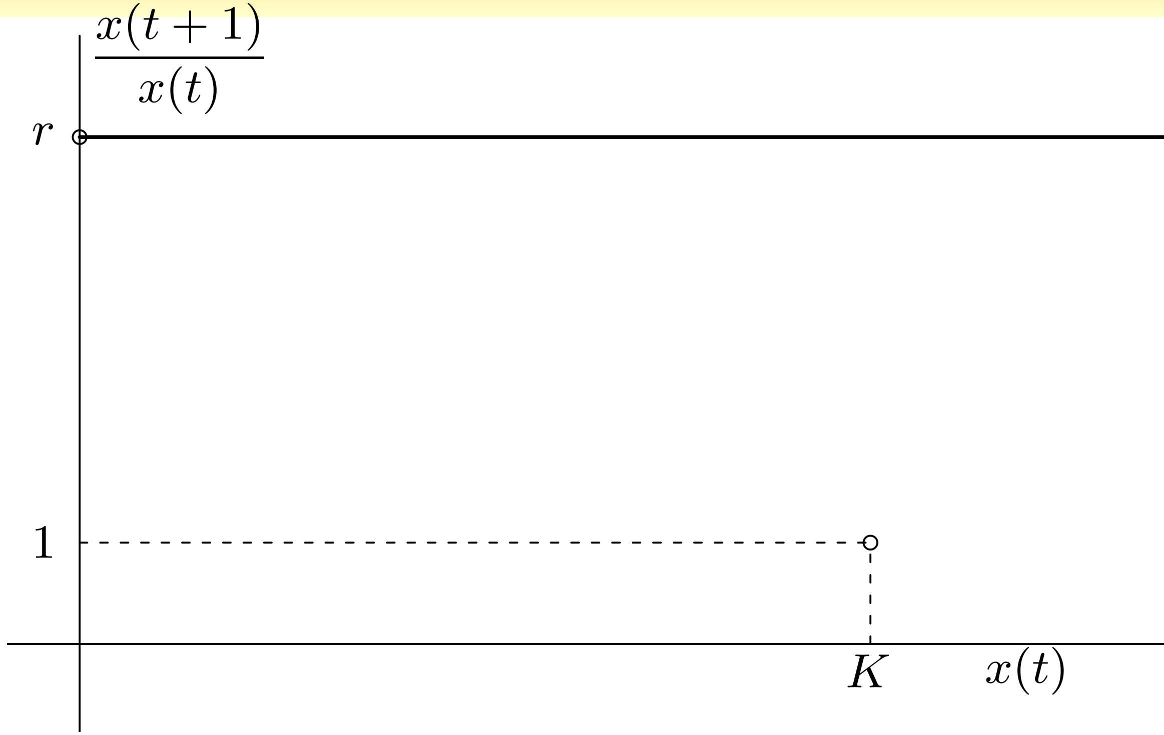
$$r = r\big(x(t)\big)$$

# Růst homogenní populace s omezenými zdroji



# Růst homogenní populace s omezenými zdroji

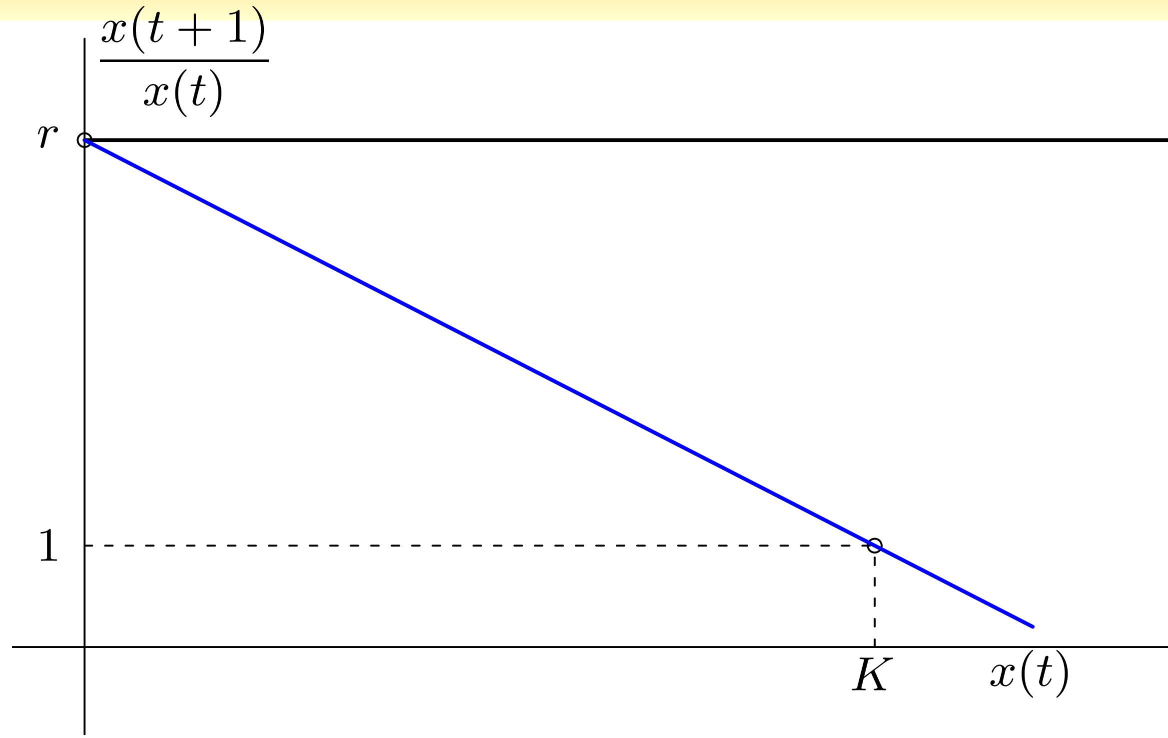
Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$



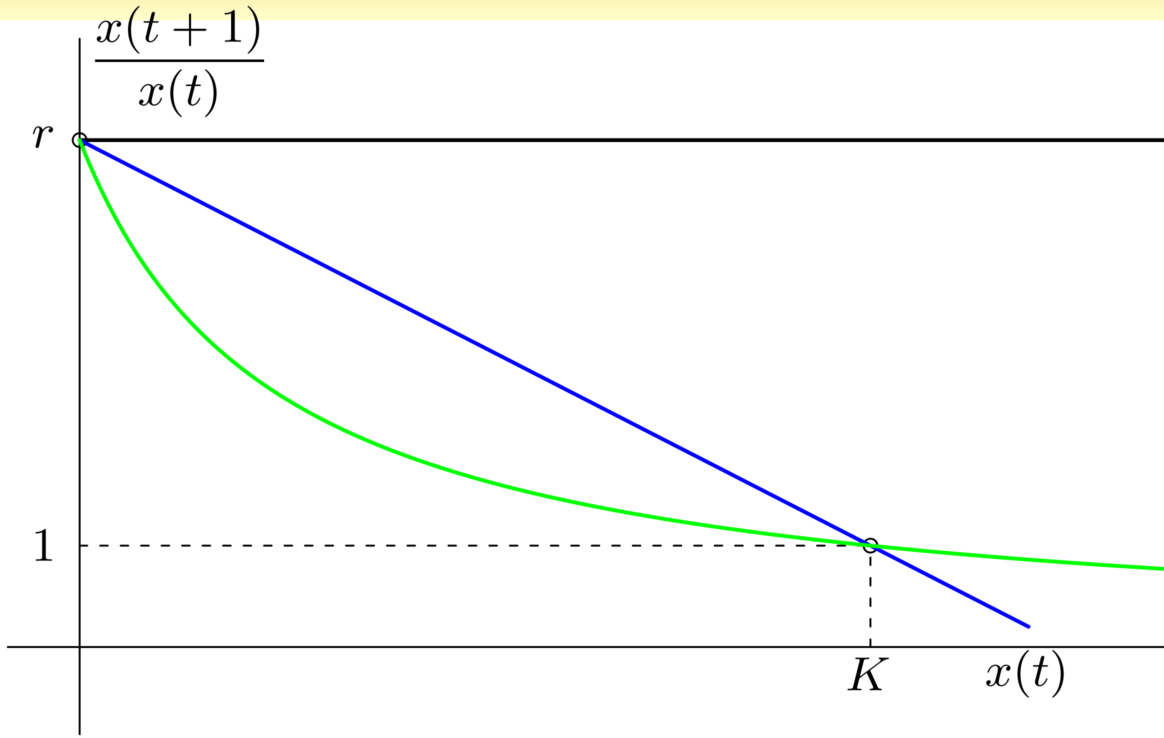
# Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

Maynard Smith, May:
$x(t+1) = \left( r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$



# Růst homogenní populace s omezenými zdroji

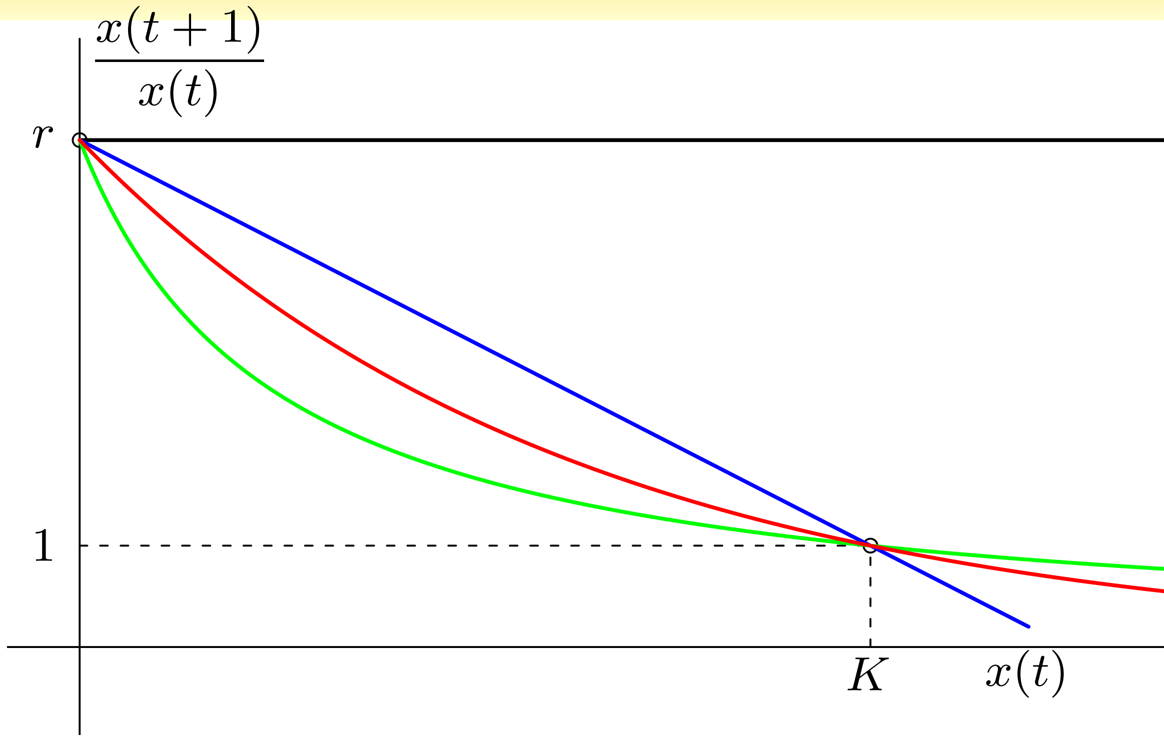



Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

Maynard Smith, May:
$x(t+1) = \left( r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$

Beverton-Holt, Pielou:
$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$

# Růst homogenní populace s omezenými zdroji




Malthus:
$$x(t+1) = rx(t)$$

Maynard Smith, May:
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:
$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}}\,x(t)$$

Ricker:
$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}\,x(t)$$

## Růst homogenní populace s omezenými zdroji

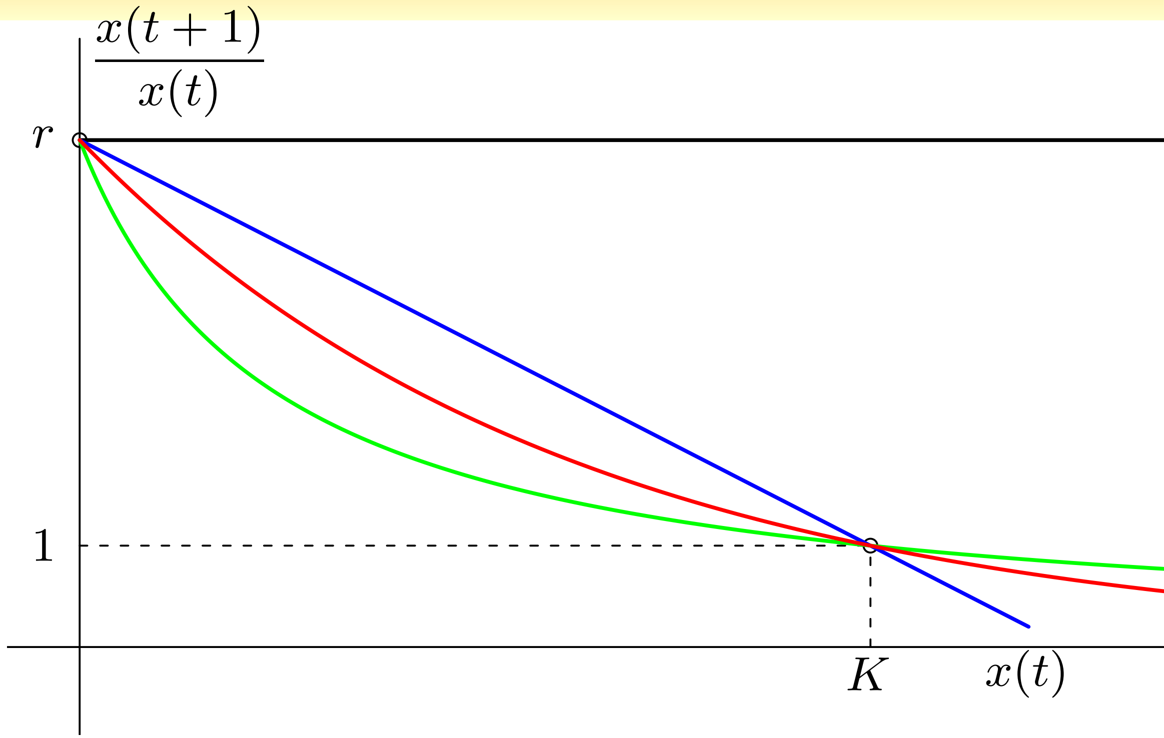
Malthus:

$$x(t+1) = r x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May:

$$x(t+1) = \left( r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$




Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

# Růst homogenní populace s omezenými zdroji

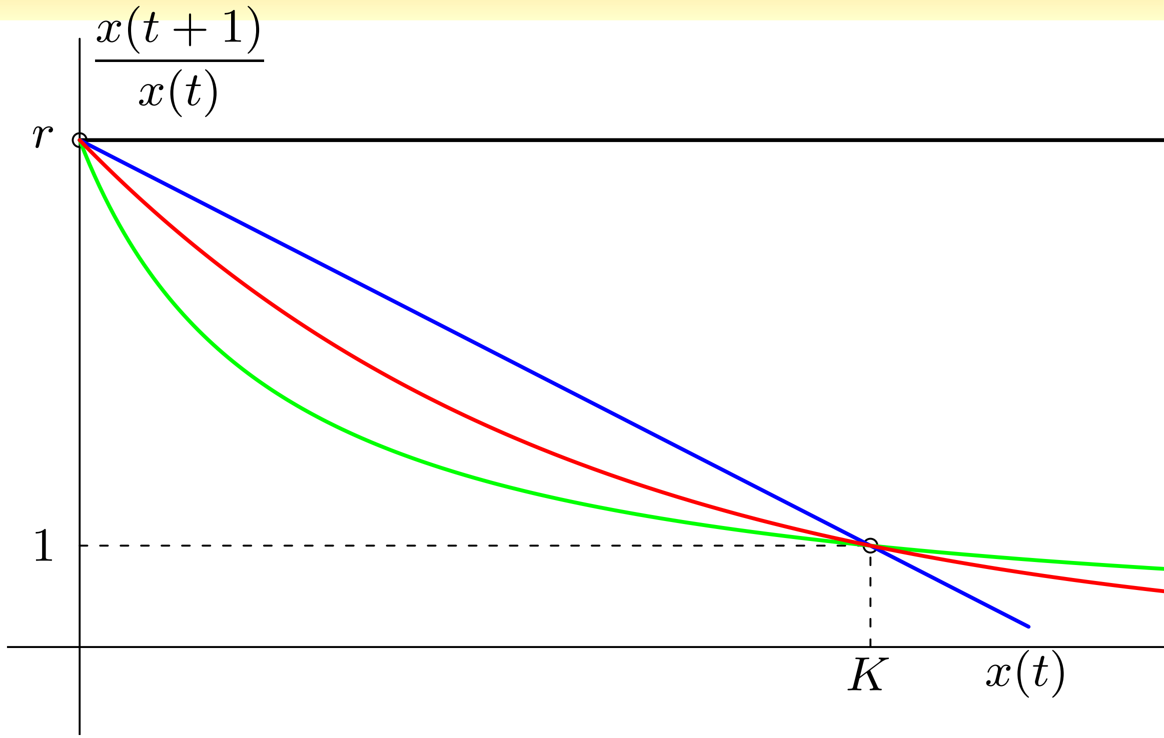
Malthus:
$x(t+1) = rx(t)$

$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$

Maynard Smith, May:
$x(t+1) = \left( r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$

$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$

Beverton-Holt, Pielou:
$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$



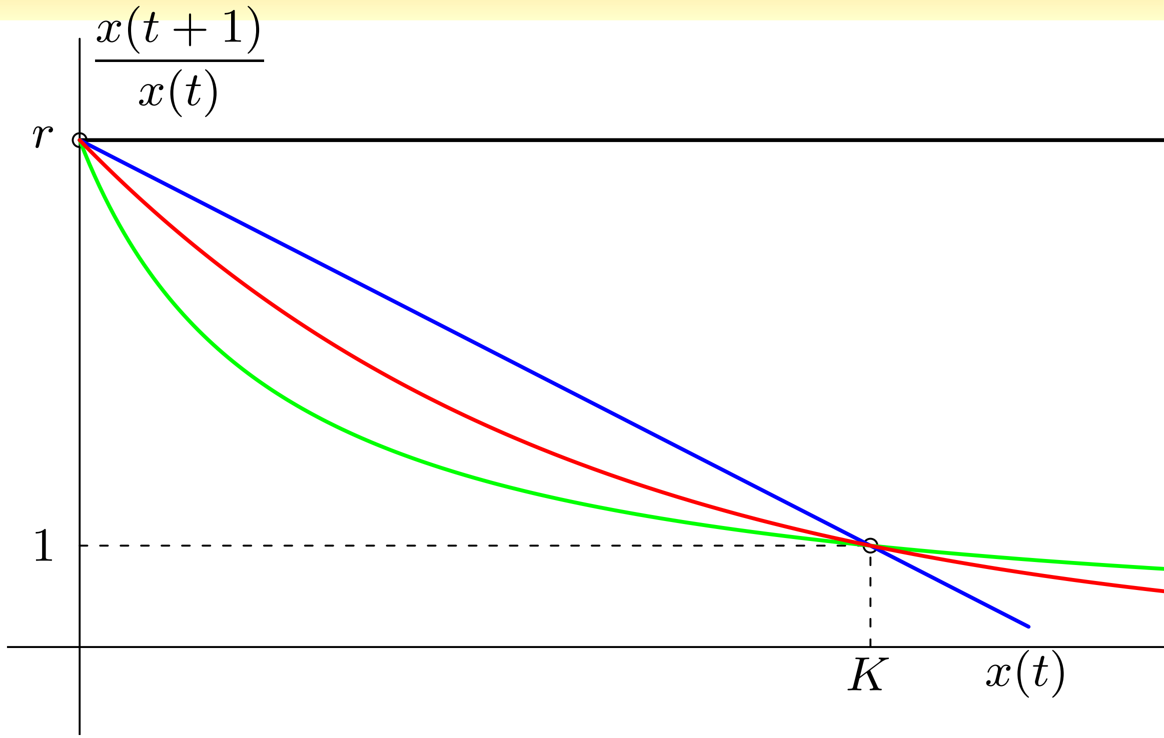

Ricker:
$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$

# Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:
$$x(t+1) = rx(t)$$
$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May:
$$x(t+1) = \left( r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$
$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:
$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}}\, x(t)$$
$$\Delta x(t) = \frac{(r-1)}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$




Ricker:
$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}\, x(t)$$

# Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May:

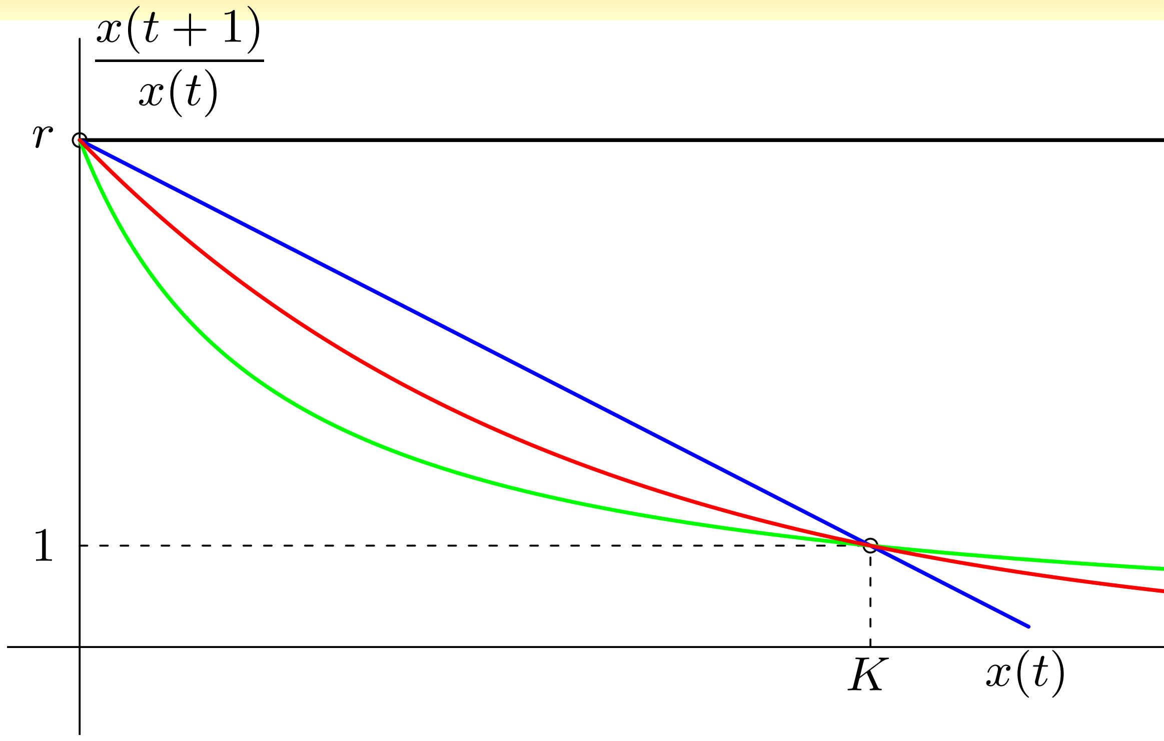
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}}x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t+1)$$




Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}x(t)$$

# Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May:

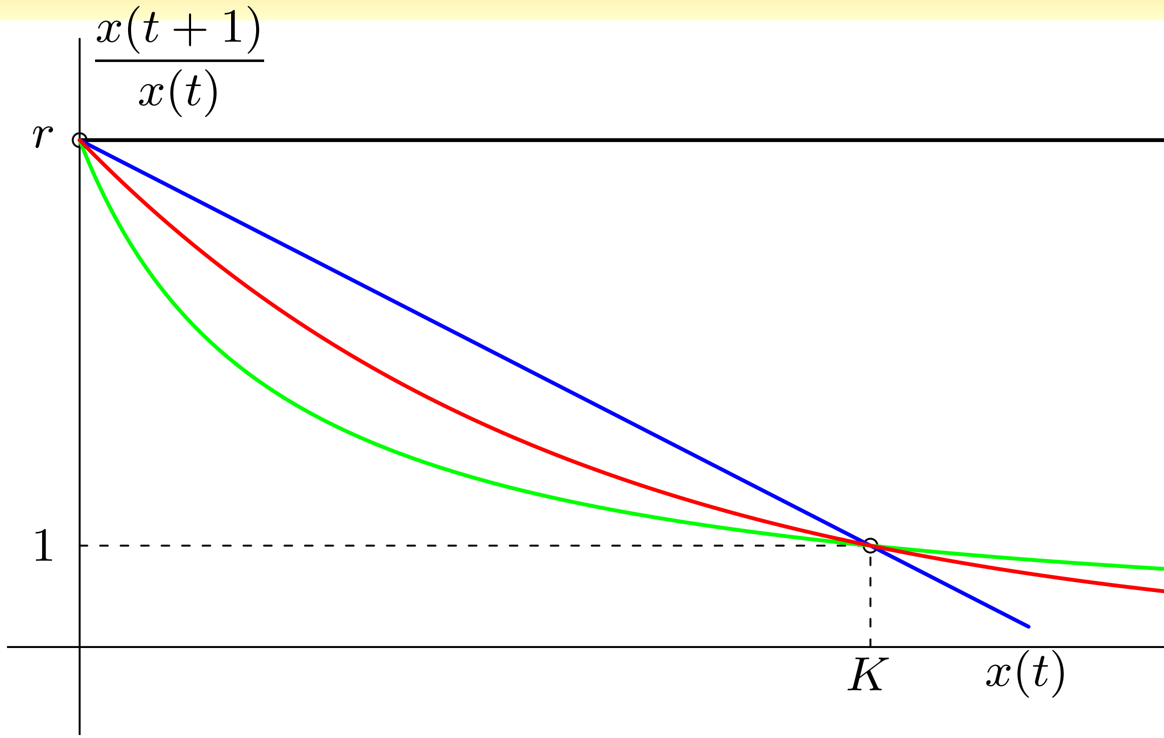
$$x(t+1) = \left( r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) x(t+1)$$




Ricker:

$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \left(r^{1-\frac{x(t)}{K}} - 1\right) x(t)$$

# Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May:

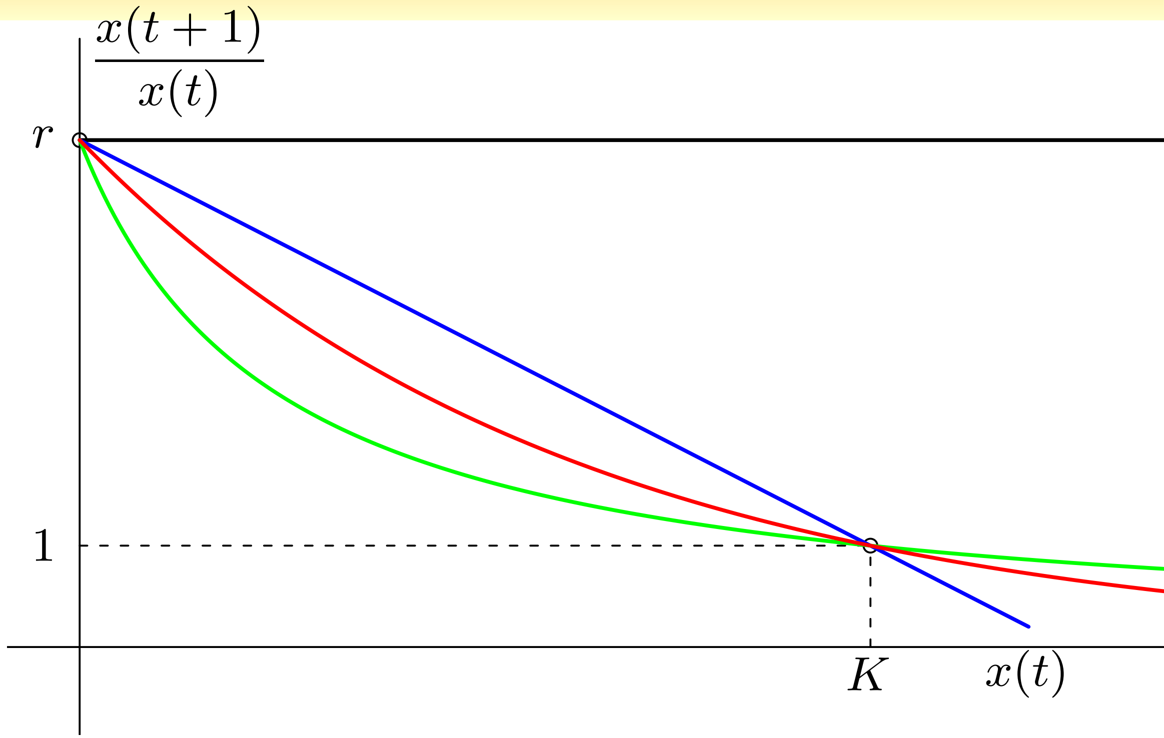
$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t+1) = \frac{r}{1+(r-1)\frac{x(t)}{K}}x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r}\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t+1)$$

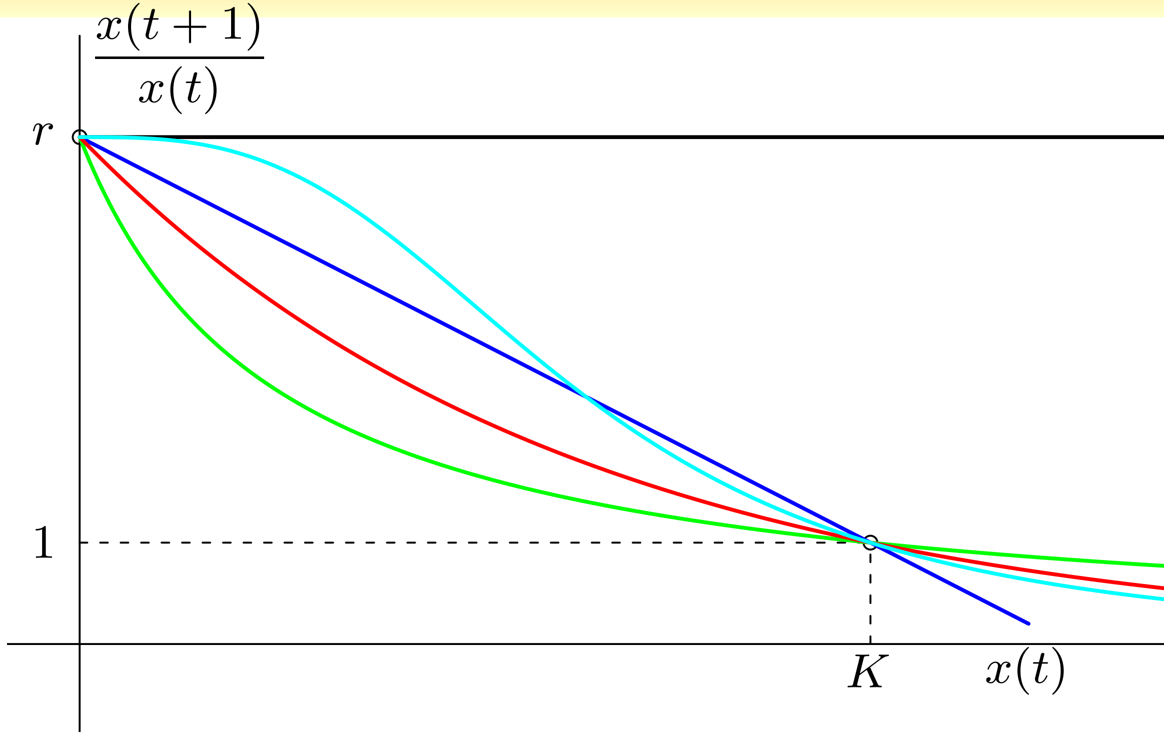



Ricker:

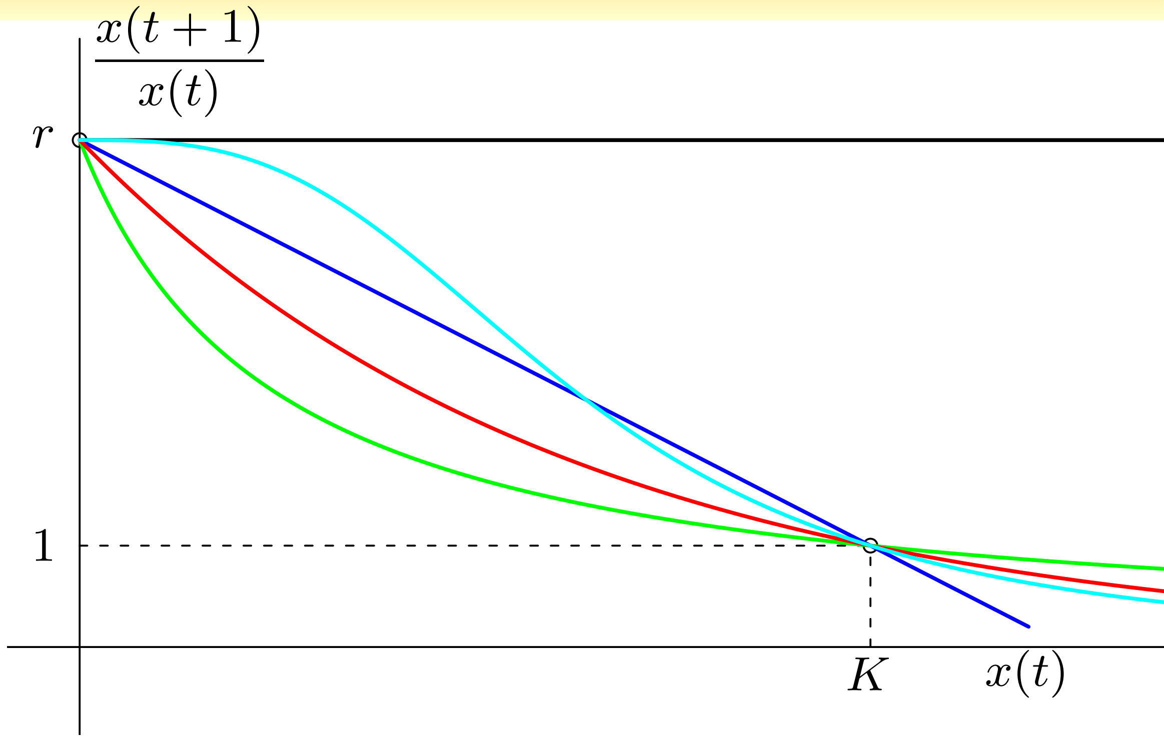
$$x(t+1) = r^{1-\frac{x(t)}{K}}x(t)$$

$$\Delta x(t) = \left(r^{1-\frac{x(t)}{K}} - 1\right)x(t)$$

# Růst homogenní populace s omezenými zdroji



# Růst homogenní populace s omezenými zdroji

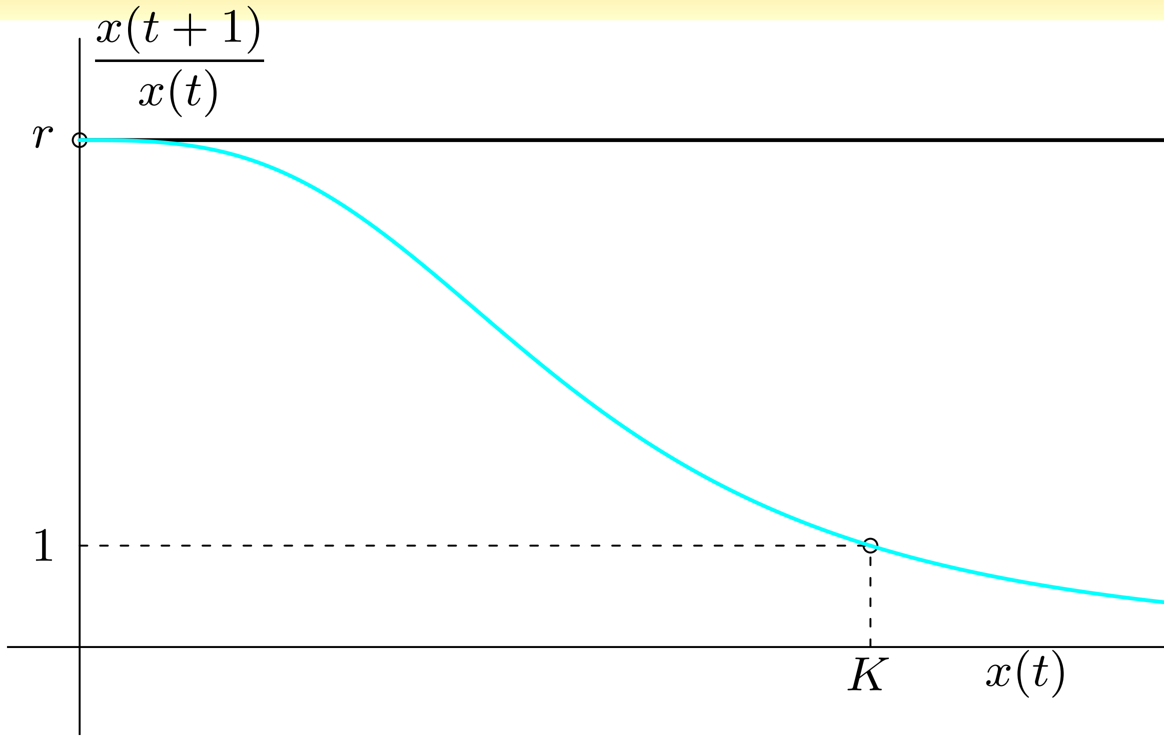



Základní rovnice:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{1 + (r-1)\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}} \left(1 - \left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}\right) x(t) = \frac{r-1}{r} \left(1 - \left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}\right) x(t+1)$$

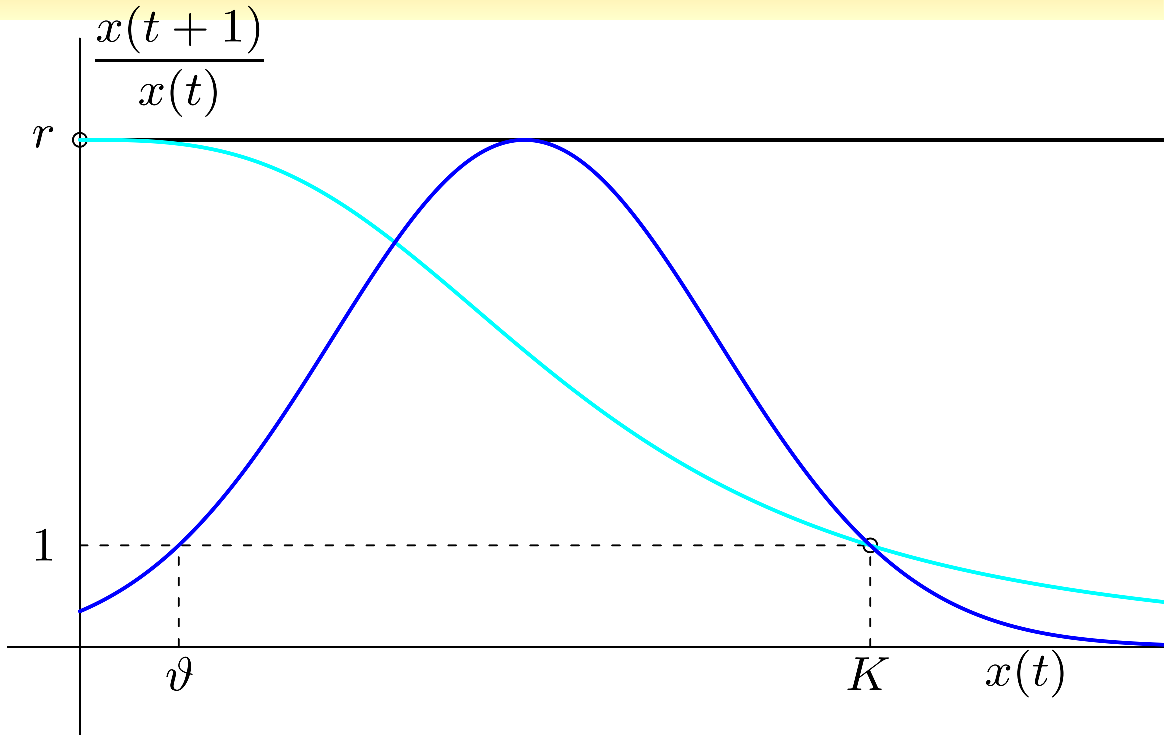
# Růst homogenní populace s omezenými zdroji




Rovnice se zpožděním:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\left(\frac{x(t-k)}{K}\right)^{\beta}} x(t)$$

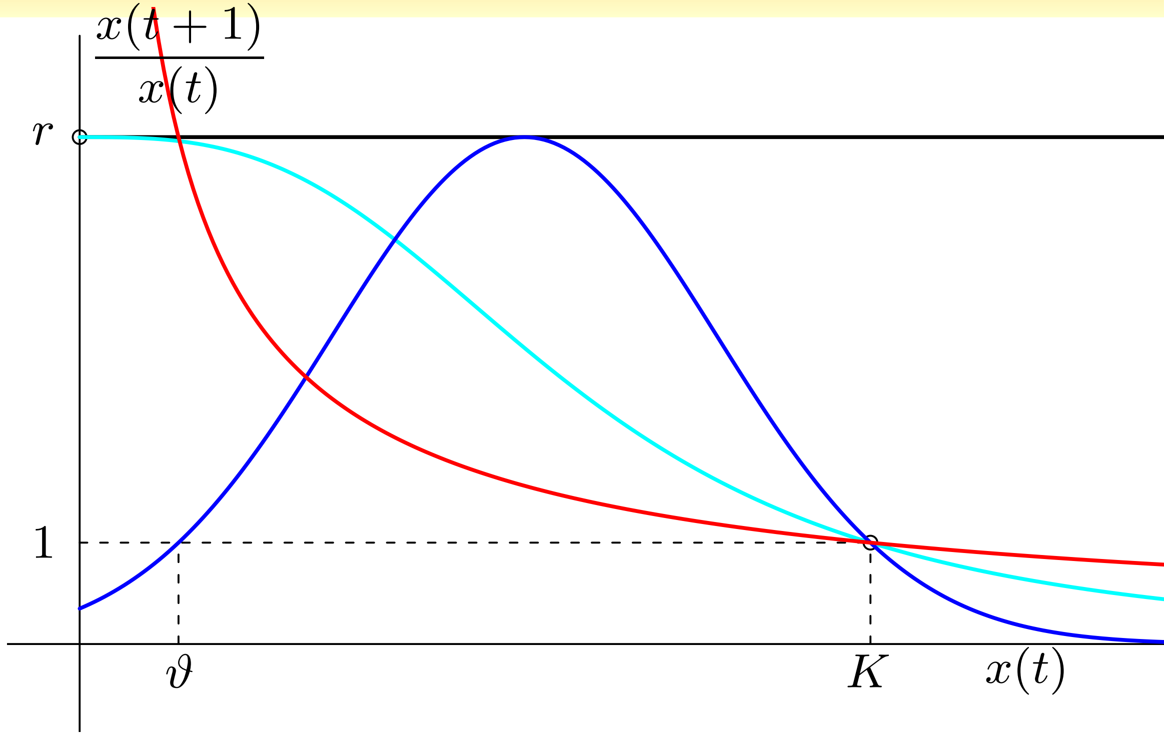
# Růst homogenní populace s omezenými zdroji




Allee:

$$x(t+1) = r^{\frac{4K}{(K-\vartheta)^2}\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)(x-\vartheta)}x(t)$$

# Růst homogenní populace s omezenými zdroji




Gompertz:

$$x(t+1) = \left( r x(t)^{-\frac{\ln r}{\ln K}} \right) x(t)$$