

# Úvod do matematiky pro biology

M1030 Matematika pro biology

26. 9. 2024

Historické poznámky

Vývoj matematiky

Matematika a biologie

Příklady

---

# Historické poznámky



# Vývoj matematiky

## Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*

# Vývoj matematiky

Poznámka ke slovu „matematika“:

<i>μαθησις</i>	poučení, naučení
<i>μαθητης</i>	učedník
<i>μαθημα</i>	nauka, to co je k naučení něco mezi <i>επιστημη</i> (známost, lat. scientia) <i>γνωσις</i> (poznání, lat. cognitio)
<i>μαθηματικος</i>	náležející k nauce (učedník i pojednání)
<i>μαθηματικα</i>	všechny věci, které jsou této naučné povahy (plurál středního rodu)

Vlivem pýthagorejských učedníků (*μαθηματικοι*) se význam slova „matematika“ zúžil na zabývání se čísly a geometrickými objekty.

# Vývoj matematiky

## Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio,  $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$

# Vývoj matematiky

## Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio, λογος

## Eukleidés (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie (axiomy – definice – postuláty)*

# Vývoj matematiky

## **Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)**

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio,  $\lambda\gamma\omicron\varsigma$

## **Eukleidés (365?–300? BCE)**

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie (axiomy – definice – postuláty)*

## **Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí (780?–850? CE)**

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*



# Vývoj matematiky

## **Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)**

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio,  $\lambda\gamma\omicron\varsigma$

## **Eukleidés (365?–300? BCE)**

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie (axiomy – definice – postuláty)*

## **Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí (780?–850? CE)**

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*

## **Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)**

- Liber abaci; zprostředkování arabského a antického vědění

# Vývoj matematiky

## **Pýthagorás ze Samu (580?–501 BCE)**

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio,  $\lambda\gamma\omicron\varsigma$

## **Eukleidés (365?–300? BCE)**

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie (axiomy – definice – postuláty)*

## **Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí (780?–850? CE)**

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*

## **Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170?–1250)**

- Liber abaci; zprostředkování arabského a antického vědění

## **René Descartes (1596–1650)**

- Rozprava o metodě; geometrické úlohy lze řešit metodami algebry

# Vývoj matematiky

## **Pýthagorás ze Samu** (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio,  $\lambda\gamma\omicron\varsigma$

## **Eukleidés** (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie* (axiomy – definice – postuláty)

## **Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí** (780?–850? CE)

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*

## **Leonardo Pisano (Fibonacci)** (1170?–1250)

- Liber abaci; zprostředkování arabského a antického vědění

## **René Descartes** (1596–1650)

- Rozprava o metodě; geometrické úlohy lze řešit metodami algebry

## **Isaac Newton** (1643–1727), **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716)

- Matematický popis pohybu a změny (infinitesimální počet)

# Vývoj matematiky

## **Pýthagorás ze Samu** (580?–501 BCE)

- Pokusy s monochordem, figurální čísla
- *Skutečnost určují čísla a jejich poměry*
- Krize: V poměru strany a úhlopříčky čverce není ratio,  $\lambda\gamma\omicron\varsigma$

## **Eukleidés** (365?–300? BCE)

- Základy (geometrie)
- *Deduktivní výstavba teorie* (axiomy – definice – postuláty)

## **Muhamad ibn Musa Abu Abdalah al-Chvárizmí** (780?–850? CE)

- Aritmetika (arabské číslice) a algebra (symbol pro neznámou, řešení rovnic)
- *K poznání lze dospět formální manipulací se symboly*

## **Leonardo Pisano (Fibonacci)** (1170?–1250)

- Liber abaci; zprostředkování arabského a antického vědění

## **René Descartes** (1596–1650)

- Rozprava o metodě; geometrické úlohy lze řešit metodami algebry

## **Isaac Newton** (1643–1727), **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716)

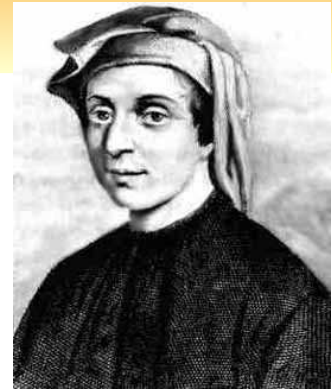
- Matematický popis pohybu a změny (infinitesimální počet)
- Krize: infinitesimál je logicky sporný objekt

# Matematika a biologie

# Matematika a biologie

**Fibonacci** (1170–1250)

*V Liber abaci* úloha o množení králíků



# Matematika a biologie

**Fibonacci** (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

**Leonhard Euler** (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace



# Matematika a biologie

**Fibonacci** (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

**Leonhard Euler** (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

**Daniel Bernoulli** (1700–1782), **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783)

Matematický model umírání na neštovica a vlivu očkování





# Matematika a biologie

**Fibonacci** (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

**Leonhard Euler** (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

**Daniel Bernoulli** (1700–1782), **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783)

Matematický model umírání na neštovica a vlivu očkování

**Johann Gregor Mendel** (1822–1884)

Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů



# Matematika a biologie

**Fibonacci** (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

**Leonhard Euler** (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

**Daniel Bernoulli** (1700–1782), **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783)

Matematický model umírání na neštovica a vlivu očkování

**Johann Gregor Mendel** (1822–1884)

Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů

**Vito Volterra** (1860–1940), **Alfred Lotka** (1880–1949)

Matematické modely základních vztahů populační dynamiky  
a chemické kinetiky (obyčejné diferenciální rovnice)



# Matematika a biologie

**Fibonacci** (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

**Leonhard Euler** (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

**Daniel Bernoulli** (1700–1782), **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783)

Matematický model umírání na neštovica a vlivu očkování

**Johann Gregor Mendel** (1822–1884)

Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů

**Vito Volterra** (1860–1940), **Alfred Lotka** (1880–1949)

Matematické modely základních vztahů populační dynamiky  
a chemické kinetiky (obyčejné diferenciální rovnice)

**Anderson G. McKendrick** (1876–1943), **William O. Kermack** (1898–1970)

Matematické modely šíření epidemií



# Matematika a biologie

**Fibonacci** (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

**Leonhard Euler** (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

**Daniel Bernoulli** (1700–1782), **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783)

Matematický model umírání na neštovica a vlivu očkování

**Johann Gregor Mendel** (1822–1884)

Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů

**Vito Volterra** (1860–1940), **Alfred Lotka** (1880–1949)

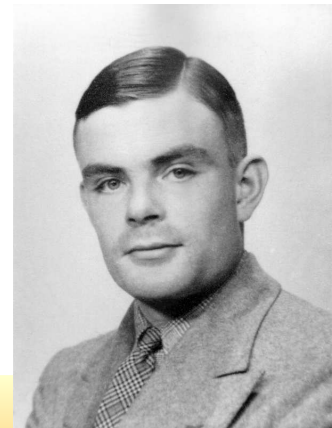
Matematické modely základních vztahů populační dynamiky  
a chemické kinetiky (obyčejné diferenciální rovnice)

**Anderson G. McKendrick** (1876–1943), **William O. Kermack** (1898–1970)

Matematické modely šíření epidemií

**Alan Turing** (1912–1954)

Matematický model morfogeneze (parciální diferenciální rovnice)



# Matematika a biologie

**Fibonacci** (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

**Leonhard Euler** (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

**Daniel Bernoulli** (1700–1782), **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783)

Matematický model umírání na neštovica a vlivu očkování

**Johann Gregor Mendel** (1822–1884)

Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů

**Vito Volterra** (1860–1940), **Alfred Lotka** (1880–1949)

Matematické modely základních vztahů populační dynamiky  
a chemické kinetiky (obyčejné diferenciální rovnice)

**Anderson G. McKendrick** (1876–1943), **William O. Kermack** (1898–1970)

Matematické modely šíření epidemií

**Alan Turing** (1912–1954)

Matematický model morfogeneze (parciální diferenciální rovnice)

**Aristid Lindenmayer** (1925–1989)

Popis růstu organismů (formální gramatika)



# Matematika a biologie

**Fibonacci** (1170–1250)

V *Liber abaci* úloha o množení králíků

**Leonhard Euler** (1707–1783)

V učebnici *Introductio in analysin infinitorum* model růstu populace

**Daniel Bernoulli** (1700–1782), **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783)

Matematický model umírání na neštovica a vlivu očkování

**Johann Gregor Mendel** (1822–1884)

Formulace přírodního zákona pomocí matematických pojmů

**Vito Volterra** (1860–1940), **Alfred Lotka** (1880–1949)

Matematické modely základních vztahů populační dynamiky  
a chemické kinetiky (obyčejné diferenciální rovnice)

**Anderson G. McKendrick** (1876–1943), **William O. Kermack** (1898–1970)

Matematické modely šíření epidemií

**Alan Turing** (1912–1954)

Matematický model morfogeneze (parciální diferenciální rovnice)

**Aristid Lindenmayer** (1925–1989)

Popis růstu organismů (formální gramatika)

**John Maynard Smith** (1920–2004)

Matematický model evoluce (teorie her)



Historické poznámky

---

## Příklady

Množení králíků

Eulerův model růstu populace

Systemy s diskretním časem a paralelním  
přepisováním

# Příklady

# Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.





# Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.

○

1



# Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



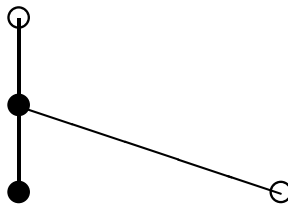
1  
1



# Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



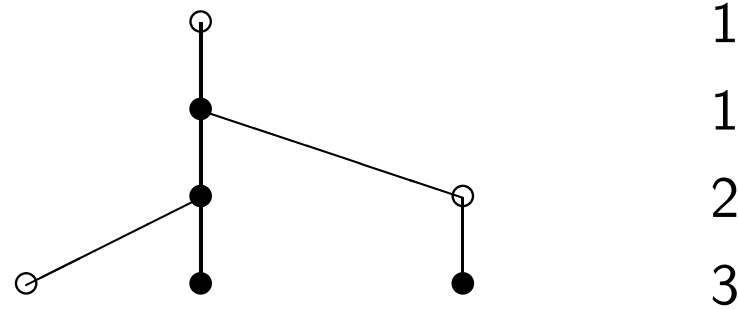
1  
1  
2



# Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

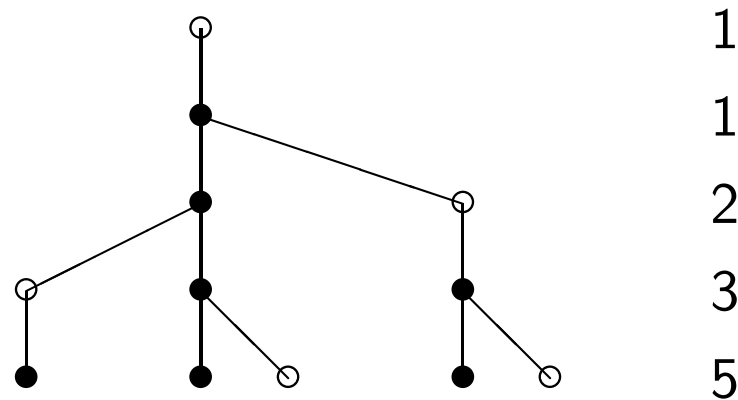
Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



# Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

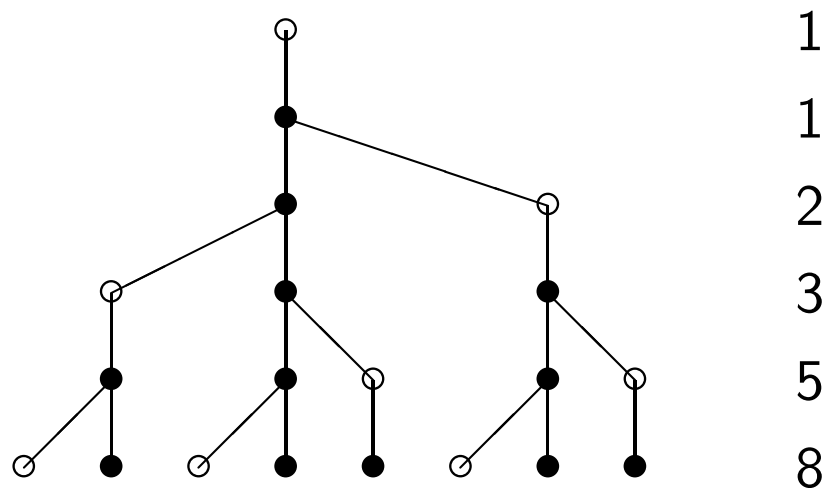
Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



# Množení králíků

Leonardo Pisánský (Fibonacci) *Liber abaci* 1202:

Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, se všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.



# Množení králíků

$x(t)$  ... počet párů králíků v měsíci  $t$

# Množení králíků

$x(t)$  ... počet párů králíků v měsíci  $t$

$$x(t) =$$



# Množení králíků

$x(t)$  ... počet párů králíků v měsíci  $t$

$$x(t) = x(t - 1)$$

Přežívají všechny páry z předchozího měsíce

# Množení králíků

$x(t)$  ... počet párů králíků v měsíci  $t$

$$x(t) = x(t - 1) + x(t - 2)$$

Přežívají všechny páry z předchozího měsíce

Každý pár starý alespoň měsíc vyprodukuje pár nový

# Množení králíků

$x(t)$  ... počet párů králíků v měsíci  $t$

$$x(t) = x(t - 1) + x(t - 2)$$

Přežívají všechny páry z předchozího měsíce

Každý pár starý alespoň měsíc vyprodukuje pár nový

$t$	$x(t)$	$t$	$x(t)$
1	1	7	13
2	1	8	21
3	2	9	34
4	3	10	55
5	5	11	89
6	8	12	144

# Eulerův model růstu populace

$x(t)$  ... velikost populace v čase  $t$

# Eulerův model růstu populace

$x(t)$  ... velikost populace v čase  $t$

$$x(t + 1) = x(t) + \text{množství nových jedinců} - \text{množství uhynulých jedinců}$$

# Eulerův model růstu populace

$x(t)$  ... velikost populace v čase  $t$

$b$  ... porodnost (*birth rate*)

$d$  ... úmrtnost (*death rate*)

$$\begin{aligned}x(t + 1) &= x(t) + \text{množství nových jedinců} - \text{množství uhynulých jedinců} \\ &= x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t)\end{aligned}$$

Předpoklady:

Množství narozených, vylíhnutých, vyklíčených ... je úměrné množství žijících.  
uhynulých

# Eulerův model růstu populace

$x(t)$  ... velikost populace v čase  $t$

$b$  ... porodnost (*birth rate*)

$d$  ... úmrtnost (*death rate*)

$r$  ... koeficient růstu (*intrinsic growth rate*)

$$\begin{aligned}x(t+1) &= x(t) + \text{množství nových jedinců} - \text{množství uhynulých jedinců} \\ &= x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t)\end{aligned}$$

Předpoklady:

Množství narozených, vylíhnutých, vyklíčených ... je úměrné množství žijících.  
uhynulých

Označení:  $r = 1 + b - d$

$$x(t+1) = rx(t)$$

# Eulerův model růstu populace

$x(t)$  ... velikost populace v čase  $t$

$r$  ... koeficient růstu (intrinsic growth rate)

$$x(t + 1) = rx(t)$$



# Eulerův model růstu populace

$x(t)$  ... velikost populace v čase  $t$

$r$  ... koeficient růstu (intrinsic growth rate)

$$x(t + 1) = rx(t)$$

Rekurentní vztah pro geometrickou posloupnost, tedy

$$x(t) = x(0)r^t$$

# Eulerův model růstu populace

$x(t)$  ... velikost populace v čase  $t$

$r$  ... koeficient růstu (intrinsic growth rate)

$$x(t + 1) = rx(t)$$

Rekurentní vztah pro geometrickou posloupnost, tedy

$$x(t) = x(0)r^t$$

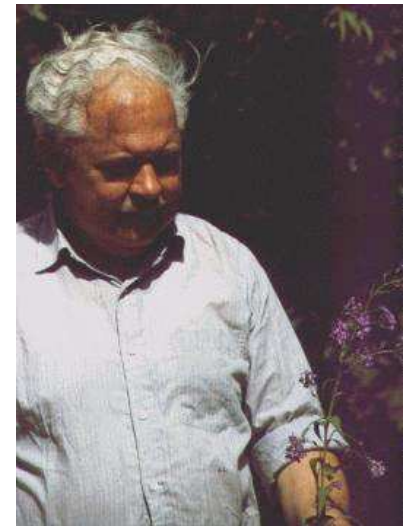
$r > 1 \Rightarrow$  populace neomezeně roste

$r = 1 \Rightarrow$  populace má stálou velikost

$r < 1 \Rightarrow$  populace vymírá

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Aristid Lindenmayer (1925–1989)



# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Aristid Lindenmayer (1925–1989)

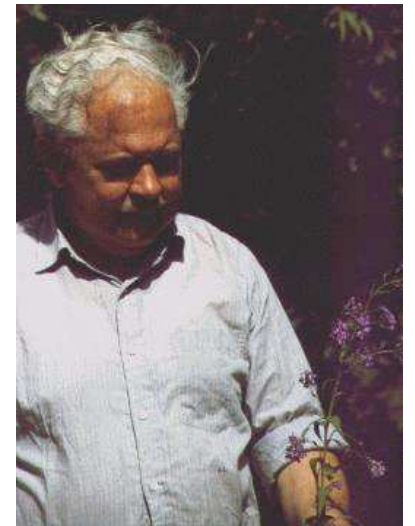
Abeceda: množina nějakých rozlišitelných symbolů  $A$

Stav: konečná posloupnost prvků z  $A$ , slovo vytvořené z písmen abecedy

Přepisovací pravidla: přiřazení nějakého slova každému písmenu abecedy

Počáteční stav:  $s_0$

Stav  $s_{i+1}$  vznikne ze stavu  $s_i$  tak, že každý člen  $x$  v  $s_i$  se nahradí slovem podle přiřazovacího pravidla



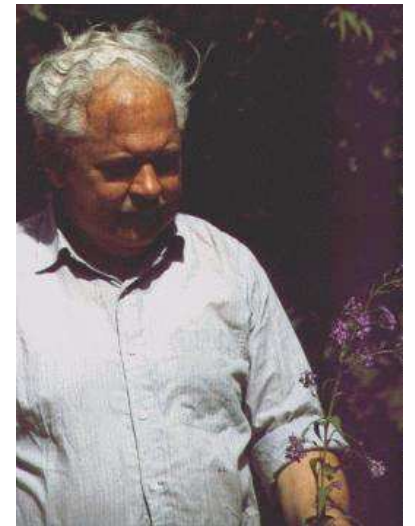
# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Aristid Lindenmayer (1925–1989)

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1



# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_2 = 224$$



# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_2 = 224$$

$$s_3 = 2254$$

# Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_2 = 224$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_4 = 22654$$

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_2 = 224$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_4 = 22654$$

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_2 = 224$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_4 = 22654$$

# Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_2 = 224$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

# Systemy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_2 = 224$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_2 = 224$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_2 = 224$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$



# Systémy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1 \quad \text{D}$$

$$s_1 = 23$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_2 = 224$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 23$$

$$s_2 = 224$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1 \quad \boxed{1}$$

$$s_1 = 23 \quad \boxed{23}$$

$$s_2 = 224 \quad \boxed{224}$$

$$s_3 = 2254$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1 \quad \boxed{1}$$

$$s_1 = 23 \quad \boxed{2 \ 3}$$

$$s_2 = 224 \quad \boxed{2 \ 2 \ 4}$$

$$s_3 = 2254 \quad \boxed{2 \ 2 \ 5 \ 4}$$

$$s_4 = 22654$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1 \quad \boxed{1}$$

$$s_1 = 23 \quad \boxed{2 \ 3}$$

$$s_2 = 224 \quad \boxed{2 \ 2 \ 4}$$

$$s_3 = 2254 \quad \boxed{2 \ 2 \ 5 \ 4}$$

$$s_4 = 22654 \quad \boxed{2 \ 2 \ 6 \ 5 \ 4}$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1 \quad \boxed{1}$$

$$s_1 = 23 \quad \boxed{2 \mid 3}$$

$$s_2 = 224 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 4}$$

$$s_3 = 2254 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 5 \mid 4}$$

$$s_4 = 22654 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 6 \mid 5 \mid 4}$$

$$s_5 = 227654 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 7 \mid 6 \mid 5 \mid 4}$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1 \quad \boxed{1}$$

$$s_1 = 23 \quad \boxed{2 \mid 3}$$

$$s_2 = 224 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 4}$$

$$s_3 = 2254 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 5 \mid 4}$$

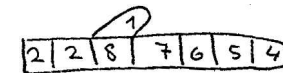
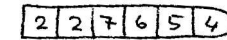
$$s_4 = 22654 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 6 \mid 5 \mid 4}$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$



$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$$s_0 = 1 \quad \boxed{1}$$

$$s_1 = 23 \quad \boxed{2 \mid 3}$$

$$s_2 = 224 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 4}$$

$$s_3 = 2254 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 5 \mid 4}$$

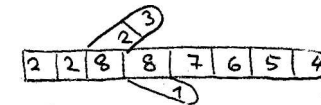
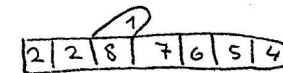
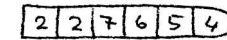
$$s_4 = 22654 \quad \boxed{2 \mid 2 \mid 6 \mid 5 \mid 4}$$

$$s_5 = 227654$$

$$s_6 = 228(1)7654$$

$$s_7 = 228(23)8(1)7654$$

$$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$$



$$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$

$$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$$




# Systemy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

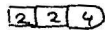
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

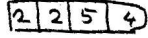
Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

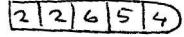
Počáteční stav: 1

$s_0 = 1$     

$s_1 = 23$     

$s_2 = 224$     

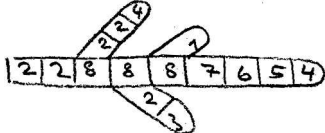
$s_3 = 2254$     

$s_4 = 22654$     

$s_5 = 227654$

$s_6 = 228(1)7654$

$s_7 = 228(23)8(1)7654$

$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$     

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$


$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

# Systemy s diskretním časem a paralelním přepisováním

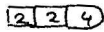
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

Počáteční stav: 1

$s_0 = 1$     

$s_1 = 23$     

$s_2 = 224$     

$s_3 = 2254$     

$s_4 = 22654$     

$s_5 = 227654$

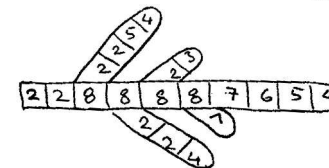
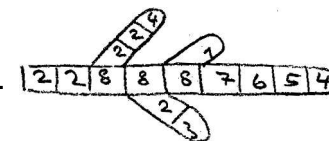
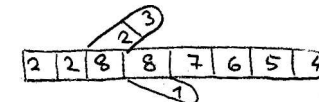
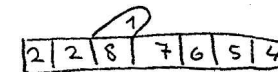
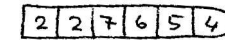
$s_6 = 228(1)7654$

$s_7 = 228(23)8(1)7654$

$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$

$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$




# Systemy s diskrétním časem a paralelním přepisováním

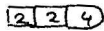
Abeceda: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (, )

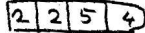
Přepisovací pravidla:  $1 \mapsto 23$      $2 \mapsto 2$      $3 \mapsto 24$      $4 \mapsto 54$      $5 \mapsto 6$   
 $6 \mapsto 7$      $7 \mapsto 8(1)$      $8 \mapsto 8$      $( \mapsto ($      $) \mapsto )$

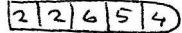
Počáteční stav: 1

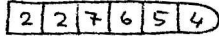
$s_0 = 1$     

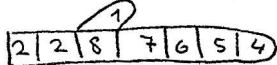
$s_1 = 23$     

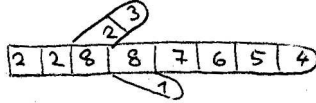
$s_2 = 224$     

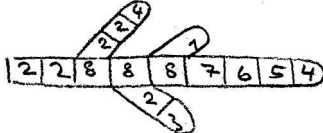
$s_3 = 2254$     

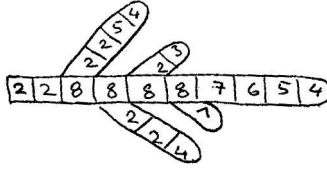
$s_4 = 22654$     

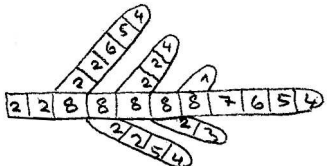
$s_5 = 227654$     

$s_6 = 228(1)7654$     

$s_7 = 228(23)8(1)7654$     

$s_8 = 228(224)8(23)8(1)7654$     

$s_9 = 228(2254)8(224)8(23)8(1)7654$     

$s_{10} = 228(22654)8(2254)8(224)8(23)8(1)7654$     

Abeceda:  $M, S, +, -, [, ]$

Počáteční stav:  $M$

Pravidla:  $M \mapsto S[+M][-M]SM$

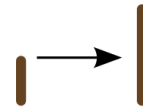
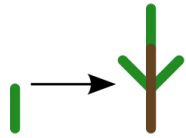
$S \mapsto SS$

Abeceda:  $M, S, +, -, [, ]$

Počáteční stav:  $M$

Pravidla:  $M \mapsto S[+M][-M]SM$

$S \mapsto SS$

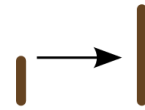
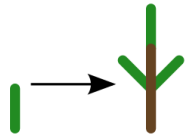


Abeceda:  $M, S, +, -, [, ]$

Počáteční stav:  $M$

Pravidla:  $M \mapsto S[+M][-M]SM$

$S \mapsto SS$



$i = 0$

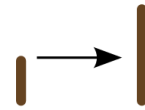
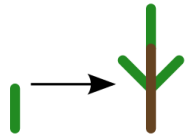
,

Abeceda:  $M, S, +, -, [, ]$

Počáteční stav:  $M$

Pravidla:  $M \mapsto S[+M][-M]SM$

$S \mapsto SS$



$i = 1$

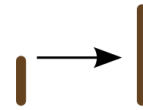
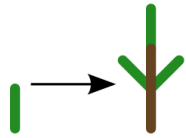


Abeceda:  $M, S, +, -, [, ]$

Počáteční stav:  $M$

Pravidla:  $M \mapsto S[+M] [-M] SM$

$S \mapsto SS$



$i = 2$



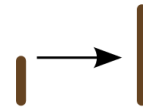
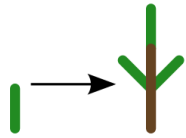


Abeceda:  $M, S, +, -, [, ]$

Počáteční stav:  $M$

Pravidla:  $M \mapsto S[+M][-M]SM$

$S \mapsto SS$



$i = 3$

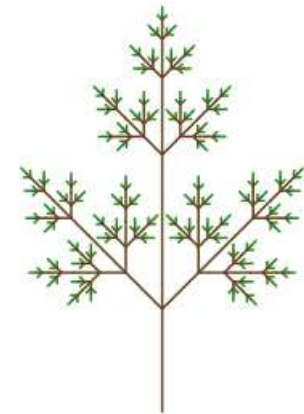
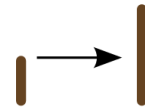
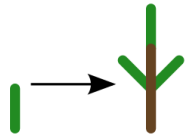


Abeceda:  $M, S, +, -, [, ]$

Počáteční stav:  $M$

Pravidla:  $M \mapsto S[+M][-M]SM$

$S \mapsto SS$

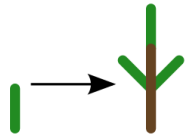


$i = 4$

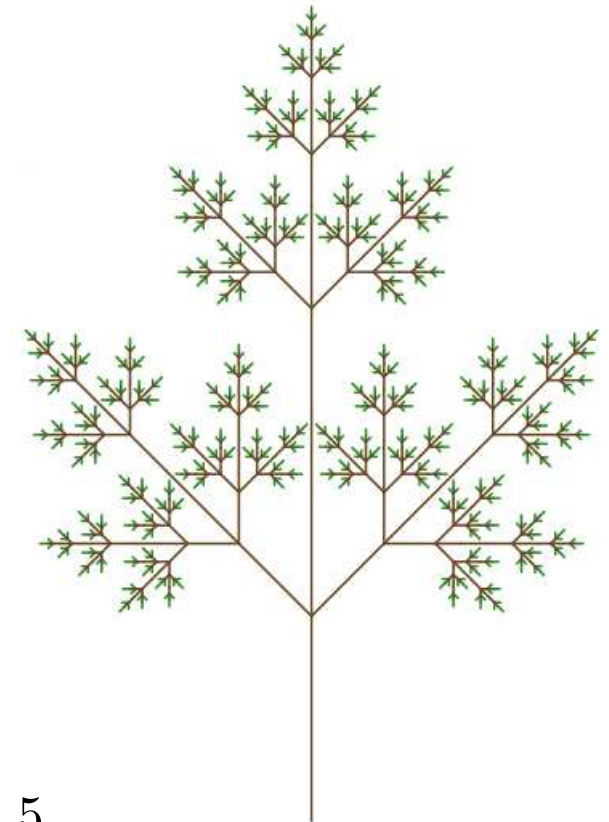
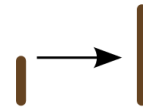
Abeceda:  $M, S, +, -, [, ]$

Počáteční stav:  $M$

Pravidla:  $M \mapsto S[+M][-M]SM$



$S \mapsto SS$



$i = 5$