1 Ukažte, že pro všechna x reálná platí $(-x)^2 = x^2$. Budete pak souhlasit i s tím, že $|x|^2 = x^2$?

2 Přesvědčte svého souseda, že druhá mocnina jakéhokoli reálného čísla je nezáporná. Tedy že $x^2 \geq 0$ pro jakékoli x reálné.

3 Dokažte, že platí vztah $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Zvládli byste to ilustrovat i obrázkem? (Zkuste to pomocí ploch: ab je plocha obdélníka o stranách a a b.)

4 A čemu se rovná $(a-b)^2$? Dovedete to odvodit z předchozího vztahu, aniž byste museli znova roznásobovat závorky?

5 Potřebujeme ještě další vztahy pro $(-a+b)^2$ a $(-a-b)^2$? Čemu se tyto výrazy rovnají?

6 Když je pro každé x reálné $x^2 \geq 0$, bude také platit $(x-1)^2 \geq 0$? A co takhle $x^2 + 1 \geq 2x$?

7 Ověřte si (třeba pomocí vzorce z úlohy 3), že se dá psát:

1. $x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 + 3$; **2.** $x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$; **3.** $2x^2 - 4x = 2(x-1)^2 - 2$; **4.** $-x^2 + 3x + 1 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$.

Přepsání do takového tvaru se říká „doplnění na (úplný) čtverec“.

8 Sami zkuste do tohoto tvaru přepsat následující polynomy:

1. $x^2 - 6x + 8$; **2.** $-x^2 - 9$; **3.** $-2x^2 + 3x - 5$; **4.** Troufnete si převést i obecný kvadratický polynom $x^2 + bx + c$ (b, c jsou jakákoli reálná čísla)?

Odmocnina z reálného čísla x (kterou označíme $\sqrt{x}$) je takové $R \geq 0$, pro které platí $R^2 = x$.

9 Je vidět, že odmocnina a druhá mocnina se „tak nějak“ ruší navzájem. Ale jak je to přesně?

1. Kdy dává výraz $\sqrt{x^2}$ smysl a čemu je pak roven? **2.** Kdy dává smysl výraz $(\sqrt{x})^2$ a čemu je roven?

10 Ukažte, že $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Tenhle vztah je (nejen) při práci s odmocninami velice užitečný. Šel by k tomu taky nakreslit obrázek podobně jako v úloze 3?

11 Uměli byste ukázat $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$? (Zkuste zlomek rozšířit tak, aby šel použít vztah pro $a^2 - b^2$. Tím se odmocniny ve jmenovateli zbavíte.)

12 Naložte podobně s těmito zlomky (odstraňte všechny odmocniny ze jmenovatelů):

1. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$; **2.** $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$; **3.** $\frac{\sqrt{39}}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$; **4.** $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Pro tuhle proceduru existuje malebný český název: *usměrnění* zlomku.

13 Zkuste vyřešit rovnici $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = 1$.

14 Ubezpečte se, že rovnice $x^2 = 4$ má *dvě* řešení: $+2$ a -2.

15 Zkuste řešit následující rovnice:

1. $(x-1)^2 = 9$; **2.** $(x+2)^2 = 1$; **3.** $(x-4)^2 = 0$; **4.** $(x+1)^2 + 3 = 0$.

Na čem závisí, kolik má která taková rovnice řešení? (Z předchozí úlohy vidíte, že některé takové rovnice mohou mít dvě řešení. Mohou mít některé víc řešení? A míň?)

16 Zvládli byste doplněním na čtverec vyřešit libovolnou kvadratickou rovnici $x^2+ax+b=0$? Bude to snadné, pokud jste si v úloze 8 doplnili na čtverec obecný polynom. Kolik může mít taková rovnice reálných řešení? Na čem to závisí?

17 Jak vypadá graf funkce ax^2+bx+c v závislosti na a, b, c? (Pomůže Vám k tomu bod 4 předchozí úlohy.)

18 Uměli byste s pomocí doplnění na čtverec ukázat, že je $x^2+4x+7\geq 3$ a taky $-x^2+3x+1\leq \frac{13}{4}$? (Pomůže Vám úloha 7.)

19 Může se stát, že by kvadratický polynom ax^2+bx+c ($a\neq 0$) nabýval všech reálných hodnot? Proč ano nebo proč ne?

20 Když chcete umocnit na druhou číslo končící pětkou, funguje tento trik: vynásobíte obě dvě okolní celé desítky mezi sebou a přičtete 25. Tak třeba: $55^2=50\cdot 60+25=3025$ (můžete si to ověřit třeba na kalkulačce ◡̈). Zvládnete vysvětlit, proč to funguje? A uměli byste vyčíslit podobnou metodou i čtverce jiných čísel?

21 Ve starém Babyloně se násobilo pomocí tabulek čtverců. Představte si, že máte vypsané druhé mocniny přirozených čísel od 1 do 100. Jak se dají pomocí této tabulky (a trochy sčítání a odčítání) vynásobit jakákoli dvě dvouciferná přirozená čísla?