1 Určete součet geometrické posloupnosti $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$. Pomůže Vám k tomu toto schéma:

$$\begin{array}{ccccccl} 1 & +q & +q^2 & +\cdots & +q^{n-1} & & = S, \\ & q & +q^2 & +\cdots & +q^{n-1} & +q^n & = qS. \end{array}$$

2 Kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tvoří aritmetickou posloupnost. Dokažte, že platí:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \dfrac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$;

2. $\dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}a_n} = \dfrac{n-1}{a_1a_n}$.

3 Dokažte, že čísla 49, 4489, 444889 atd., kde každé další číslo vznikne vložením číslic 48 doprostřed předchozího čísla, jsou čtverci (druhými mocninami) celých čísel. (Bude se Vám hodit vyjádřit čísla 444…4 a 888…8 jako součet geometrické posloupnosti.)

4 Zapište následující polynomy jako součin dvou kvadratických nerozložitelných trojčlenů:

1. $x^4 + a^4$; **2.** $x^4 + a^2x^2 + a^4$.

(U toho prvního zkuste přičíst a odečíst $2a^2x^2$.)

5 Dokažte, že pokud pro reálná čísla a, b, c platí rovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca,$$

musí být $a = b = c$.

6 Zkuste ukázat, že $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ právě tehdy, když je buď $a + b + c = 0$, nebo $a = b = c$. (Mně se osvědčilo začít rozepsáním $(a + b + c)^3$.) Pak toho využijte k důkazu, že

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

7 Nalezněte všechny reálné hodnoty x a y, které vyhoví rovnici

$$x^2 + 4x\cos(xy) + 4 = 0.$$

8 Řešte rovnice:

1. $\sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{1-x^2}$; **2.** $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

9 Papíry formátu An (tedy A0, A1, A2 atd.) mají tyto dvě vlastnosti:

1. Plocha papíru An je 2^{-n} metru čtverečního.

2. Pokud rozstřihneme papír formátu An v polovině delší strany, dostaneme dva papíry formátu A$(n+1)$.

Spočítejte z těchto dvou vlastností délky stran papíru formátu An. (Nejdřív zkuste použít druhou vlastnost a zjistit, jaký poměr stran musí tyto papíry mít.)

10 Dokažte, že pro dvě kladná čísla x_1 a x_2 platí A-G nerovnost:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}.$$

Zvládli byste ukázat, že pro každé $n = 2^k$ platí podobný vztah?

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

11 Na řece mezi body A a B je proud tak slabý, že se dá jeho rychlost zanedbat; dále mezi body B a C už je ale tok silný. Loďka se dostane z A do C (po proudu) za 6 hodin a zpátky z C do A (proti proudu) za 7 hodin. Kdyby mezi A a B tekla řeka stejně rychle jako mezi B a C, zabrala by cesta z A do C jen 5,5 hodiny. Kolik času by v tom případě bylo potřeba na opačnou cestu z C do A? Uvažujme, že proud mezi B a C je všude stejně rychlý a že loďka má motor, který též vyvíjí konstantní rychlost.

12 V lese je a stromů. Každého roku se jejich počet nejdřív zvětší na q-násobek ($q > 1$) a potom jich x vykácíme. Jak moc můžeme kácet (tedy jak velké má být x), jestliže chceme, aby po n letech bylo v lese k-krát víc stromů než na začátku?

13 V jakési nádobě máme nalitý p-procentní roztok lihu. Vylijeme odtamtud roztok o objemu a a naopak přidáme stejné množství q-procentního roztoku ($q < p$). Tuto proceduru zopakujeme ještě $k-1$-krát (tedy k-krát dohromady) a potom zjistíme, že v nádobě je r-procentní roztok. Jaký je objem roztoku?

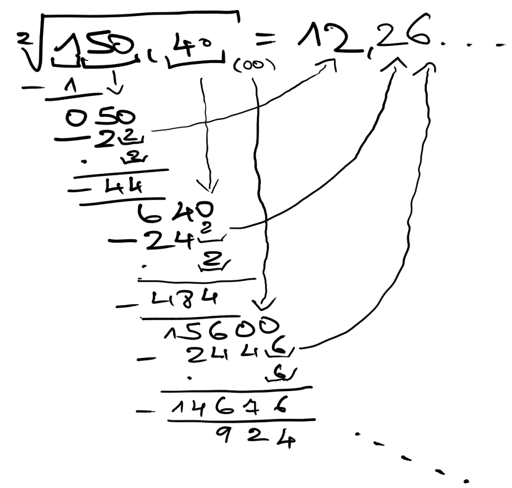
14 Zjednodušte součiny:

1. $(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\cdots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})$; **2.** $(x^2-ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)\cdots(x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n})$.
(Obojí se snadno poddá, když to rozšíříte nějakým šikovným činitelem, aby šel použít vztah pro rozdíl čtverců.)

15 Dokažte, že pokud pro reálná a_k, b_k, p, q (přičemž $p \neq 0$, $q \neq 0$) platí vztahy

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = p^2,$$
$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = q^2,$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = pq,$$

pak musí platit $a_1 = \frac{p}{q}b_1$, $a_2 = \frac{p}{q}b_2$, atd., až $a_n = \frac{p}{q}b_n$.



16 V této úloze Vám představím jeden starý algoritmus na odmocňování, který si vystačí s papírem a tužkou. Sledujte to trochu na obrázku vpravo, kde odmocňuji číslo 150,4.

Odmocňované číslo rozdělím na skupiny po dvou číslicích (přičemž jdu na obě strany od desetinné čárky). Takže v našem příkladě rozdělím číslo jako 1 50, 40. Začnu tím, že vezmu první skupinu, najdu k ní nejbližší nižší nebo stejný čtverec celého čísla n^2 a n pak zapíšu jako číslici do výsledku. (V našem případě je to jednoduché, protože $1^2 = 1$, a tak píšeme jedničku do výsledku.) Čtverec pak odečteme (tedy nám zůstane $1 - 1 = 0$).

Odteď budeme provádět několik kroků stále dokolečka:

1. Sepíšeme další dvojčíslí na konec předchozího zbytku. (Měli jsme zbytek 0, sepíšeme 50, takže máme pořád 50.) Vznikne číslo, které označíme Z.
2. Pod to napíšeme dvojnásobek dosavadního výsledku (bez desetinné čárky), na jehož konci necháme ještě místo na jednu číslici. To budeme násobit jednou číslicí, na kterou si též necháme místo. (Zatím máme výsledek 1, takže píšeme součin 2_×_, kde _ je volné místo.)
3. Na obě volná místa v předchozím součinu doplníme stejnou číslici. Musí být co největší, ale taková, aby součin ještě nepřekročil Z. (V našem případě nechceme překročit 50. 23×3 je už moc, ale 22×2 = 44 je menší než 50. Proto ta naše číslice je 2.) Tuto číslici napíšeme do výsledku.
4. Provedeme součin s doplněnou číslicí (22×2 = 44) a odečteme to od Z. ($50 - 44 = 6$.) Tím vznikne další zbytek.

Vaše úkoly:

1. Vypočtěte $\sqrt{3}$ na 8 platných číslic (všimnete si, že to trvá asi tak pět minut, což není nijak moc, když uvážíte, že odmocňování je velmi komplikovaná operace a Vy ji děláte jen s papírem a tužkou).
2. Vysvětlete, proč to funguje. Dokažte, že každá číslice výsledku získaného touto metodou je správná.
3. Pokud se cítíte drsně, zkuste navrhnout podobnou metodu i pro počítání třetí odmocniny (ta je ale mnohem nechutnější).

Odpovědi a řešení

1 V uvedeném schématu oba řádky odečteme, zůstane $1 - q^n = (1-q)S$. Odtud $S = \frac{1-q^n}{1-q}$.

2 Pišme $a_k = a + kd$ (to můžeme, protože je to aritmetická posloupnost). Pak máme

$$\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{1}{\sqrt{a+(k+1)d} + \sqrt{a+kd}} \cdot \frac{\sqrt{a+(k+1)d} - \sqrt{a+kd}}{\sqrt{a+(k+1)d} - \sqrt{a+kd}} = \frac{\sqrt{a+(k+1)d} - \sqrt{a+kd}}{d}$$

a obdobně

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{a_{k+1} - a_k}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right).$$

Ad 1. Po posčítání zůstanou jen dvě krajní odmocniny $\frac{\sqrt{a+nd}-\sqrt{a+d}}{d} = \frac{(n-1)d}{d(\sqrt{a+nd}+\sqrt{a+d})}$. **Ad 2.** Zas zůstanou jen krajní členy $\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{(n-1)d}{d a_1 a_n}$.

3 Nejdřív si všimneme, že čísla skládající se z n jedniček (tedy 1, 11, 111 atd.) lze zapsat jako $\frac{10^n-1}{9}$. Ta naše čísla se vlastně dají zapsat jako $44\cdots488\cdots8+1$, kde čtyřek a osmiček je stejně, řekněme n, a tak máme

$$44\cdots488\cdots8 + 1 = \frac{10^n - 1}{9}(4\cdot 10^n + 8) + 1 = \frac{4}{9}10^{2n} + \frac{4}{9}10^n + \frac{1}{9} = \left(\frac{2\cdot 10^n + 1}{3}\right)^2,$$

přičemž číslo uvnitř dvojmoci je určitě celé, protože v čitateli je číslo, které obsahuje kromě nul jen jednu dvojku a jednu jedničku. Ciferný součet je tedy 3, a tak je čitatel podle známého kritéria dělitelný třemi beze zbytku.

4 **Ad 1.** $x^4 + a^4 = x^4 + 2x^2a^2 + a^4 - 2x^2a^2 = (x^2+a^2)^2 - (\sqrt{2}xa)^2 = (x^2 + \sqrt{2}xa + a^2)\cdot$ $\cdot(x^2 - \sqrt{2}xa + a^2)$. **Ad 2.** Stejná metoda, jen stačí přičíst a odečíst jedno a^2x^2, takže dostaneme hezčí $(x^2+a^2)^2 - (ax)^2 = (x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$.

5 Levou stranu zapíšu jako $\frac{1}{2}[(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)]$. Když pravou stranu odečtu, každý sčítanec krásně zapadne do jedné z těchto závorek a dostanu

$$\frac{1}{2}\left[(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)\right] = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] = 0.$$

Ale čtverec reálného čísla je vždy nezáporný. Proto je-li součet několika čtverců reálných čísel roven nule, musí se rovnat nule jeden každý zvlášť, čímž už dostáváme $a = b$, $b = c$ a $c = a$.

6 Můžu napsat

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c) + 6abc,$$

přičemž tu velkou závorku můžu napsat taky jako $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$. Zkusme to dorovnat tak, že do první závorky přičteme ještě c, do druhé ještě a a do třetí ještě b — zkrátka do každé to, co tam chybí. Pochopitelně to budeme pak muset zase odečíst. Dostaneme

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3[ab(a+b+c) + bc(b+c+a) + ca(c+a+b) - 3abc] + 6abc = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc,\end{aligned}$$

což odečtením toho součinu $3(a+b+c)(ab+bc+ca)$ už snadno přeorganisujeme na

$$(a+b+c)[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)] = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

Vpravo je už přímo žádané $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, které se má rovnat nule. Ale to se pak musí rovnat nule i levá strana, a ta se rovná nule buď při $a + b + c = 0$, nebo při $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$, jenže podle předchozího cvičení to je ekvivalentní $a = b = c$. Dostáváme tedy to, co jsme chtěli.

Pak stačí položit $a = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$, $b = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ a $c = -4$. Pak mám $a^3+b^3+c^3 = 40-64 = -24$ a zároveň $3abc = -12\sqrt[3]{400 - 2 \cdot 196} = -24$, což znamená, že buď $a + b + c = 0$, nebo $a = b = c$. Druhá z těchto možností je evidentní nesmysl, musí tedy platit ta první.

$\boxed{7}$ Uvědomíme si, že ten kosinus je někde mezi -1 a 1. Přitom polynom $x^2 + 4ax + 4$ má diskriminant $16(a^2 - 1)$, takže pokud $a^2 \leq 1$, reálný kořen může mít jen v případě, že $a^2 = 1$, tj. musí být $\cos xy = \pm 1$ a tedy $xy = k\pi$. Pak se rovnice redukuje na úplný čtverec $(x \pm 2)^2 = 0$, tedy $x = \mp 2$. Máme tedy dvě série řešení: první je $x = -2$, pak musí být $\cos xy = 1$, tj. $xy = 2k\pi$ a $y = k\pi$; druhá je $x = 2$, pak musí být $xy = (2k + 1)\pi$ a bude $y = \frac{2k+1}{2}\pi$.

$\boxed{8}$ **Ad 1.** Uvědomím si, že $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$. $x = \pm 1$ zjevně rovnici nesplňuje, takže můžu dělit $\sqrt[m]{(1 - x)(1 + x)}$ a dostanu rovnici

$$\sqrt[m]{\frac{1 + x}{1 - x}} - \sqrt[m]{\frac{1 - x}{1 + x}} = 1.$$

Označme $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}} = u$; pak mám $u - \frac{1}{u} = 1$, tj. $u^2 - u - 1 = 0$, což má řešení $u = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Proto musí být

$$\sqrt[m]{\frac{1 + x}{1 - x}} = u = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 + x = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^m (1 - x),$$

z čehož už snadno dopočteme

$$x = \frac{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^m - 1}{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^m + 1}.$$

Ad 2. Rozšířím $\sqrt{x + \sqrt{x}}$, dostanu $x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = x + \sqrt{x}(1 - \sqrt{x - 1}) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, tj.

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \tfrac{1}{2} - \sqrt{x - 1}\right) = 0.$$

Takže buď musí být $x = 0$, což je nesmysl, nebo $\sqrt{x} - \sqrt{x - 1} = \frac{1}{2}$. Rozšířím součtem těch odmocnin; tím dostanu druhou rovnici, takže nakonec mám

$$\sqrt{x} - \sqrt{x - 1} = \frac{1}{2},$$
$$\sqrt{x} + \sqrt{x - 1} = 2.$$

Sečtením obdržím $2\sqrt{x} = \frac{5}{2}$, což znamená, že $x = \frac{25}{16}$ je jediné řešení.

$\boxed{9}$ Řekněme, že všechny papíry An mají poměr stran $1 : x$, kde $1 < x < 2$. Přeložím-li ho uprostřed delší strany, najednou je ta přepůlená strana kratší a platí, že $x/2 : 1$ musí být taky v poměru $1 : x$, tj. $x/2 = 1/x \implies x = \sqrt{2}$. Řekněme tedy, že strany papíru jsou x_n a $\sqrt{2}x_n$; aby byla plocha 2^{-n}, musí být zjevně $\sqrt{2}x_n^2 = 2^{-n}$, čili

$$x_n = 2^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}} \quad \text{a druhá strana je} \quad \sqrt{2}x_n = 2^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}.$$

$\boxed{10}$ Protože čtverec každého reálného čísla je nezáporný, jistě platí $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$. Po rozepsání dostáváme $x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} \geq 0$, což po mírném přerovnání dá žádaný vztah.

Dál indukcí: platí-li vztah pro 2^{k-1}, můžu napsat

$$\frac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2^k}=\frac{\frac{x_1+\cdots+x_{2^{k-1}}}{2}+\frac{x_{2^{k-1}+1}+\cdots+x_{2^k}}{2}}{2}\geq\frac{\sqrt[2^{k-1}]{x_1\cdots x_{2^{k-1}}}+\sqrt[2^{k-1}]{x_{2^{k-1}+1}\cdots x_{2^k}}}{2}\geq$$

$$\geq\sqrt{\sqrt[2^{k-1}]{x_1\cdots x_{2^{k-1}}}\sqrt[2^{k-1}]{x_{2^{k-1}+1}\cdots x_{2^k}}}=\sqrt[2^k]{x_1\cdots x_{2^k}}.$$

11 Nechť vzdálenost od A do B je p a vzdálenost od B do C je q. Dál rychlost motoru loďky označme v a rychlost proudu w. Dostaneme tři rovnice:

$$\frac{p}{v}+\frac{q}{v+w}=6,\qquad \frac{p}{v}+\frac{q}{v-w}=7,\qquad \frac{p+q}{v+w}=5+\frac{1}{2}.$$

To jsou tři rovnice pro čtyři neznámé p, q, v, w. My ale nepotřebujeme zjistit všechny tyto hodnoty; stačí nám zjistit $\frac{p+q}{v-w}$, a na to nám stačí znát poměr $\frac{v+w}{v-w}=K$. Jestliže ho totiž zjistíme, stačí nám s ním vynásobit poslední rovnici a už hned dostaneme, že $\frac{p+q}{v-w}=(5+\frac{1}{2})K$.

Označme $w=\lambda v$ a násobme všechny tři rovnice v; dostaneme

$$\begin{aligned}p+\frac{q}{1+\lambda}&=6v,\\ p+\frac{q}{1-\lambda}&=7v,\\ \frac{p+q}{1+\lambda}&=(5+\tfrac{1}{2})v\end{aligned}\qquad\Longrightarrow\qquad\begin{aligned}p+q+\lambda p&=6v(1+\lambda),\\ p+q-\lambda p&=7v(1-\lambda),\\ p+q&=(5+\tfrac{1}{2})v(1+\lambda).\end{aligned}$$

Sečtu první dvě rovnice a odečtu dvojnásobek třetí; tím dostanu

$$6v(1+\lambda)+7v(1-\lambda)-11v(1+\lambda)=0,$$

ze které zůstane $7v(1-\lambda)=5v(1+\lambda)$, tj. $K=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}=\frac{7}{5}$. Pak už dopočteme, že

$$\frac{p+q}{v-w}=(5+\frac{1}{2})K=\frac{11}{2}\cdot\frac{7}{5}=\frac{77}{10},$$

takže by cesta trvala 7,7 hodiny.

12 Podívejme se na to takto: nejdřív je tam a stromů, po jednom roce je tam $aq-x$, po druhém je tam $(aq-x)q-x$, po třetím $[(aq-x)q-x]q-x$ atd. Snadno nahlédneme (případně dokážeme indukcí), že po n letech tam bude

$$aq^n-(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})x=aq^n-\frac{q^n-1}{q-1}x$$

stromů. Jestliže požadujeme, aby jich tam bylo právě ka, dostaneme už pro míru kácení x snadno

$$x=a(q-1)\frac{q^n-k}{q^n-1}.$$

13 Označme $P=p/100$, $Q=q/100$, $R=r/100$, abychom se zbavili těch nesmyslných procent, a též označme $v=a/V$. Pak uvažujme: v nádobě o objemu V bylo na začátku PV lihu. Vylijeme odtamtud objem a, což znamená, že vylijeme Pa lihu, a pak dolijeme týž objem q-procentního roztoku, takže Qa lihu zas přibude. Po jednom kolečku tohoto procesu tedy bude v nádobě pořád stejný objem roztoku V, ale objem lihu v něm bude $PV-Pa+Qa=P(V-a)+Qa$. Dělíme celkovým objemem V a dostáváme, že nová koncentrace je $(1-v)P+vQ$.

Po druhém opakování bude koncentrace $(1-v)[(1-v)P+vQ]+vQ$, po třetím $(1-v)[(1-v)[(1-v)P+$ $+vQ]+vQ]+vQ$ atd. Zase indukcí nebo uhodnutím zjistíme, že po n krocích bude koncentrace

$$R=(1-v)^nP+\left[1+(1-v)+(1-v)^2+\dots+(1-v)^{n-1}\right]vQ=(1-v)^nP+vQ\frac{1-(1-v)^n}{1-(1-v)}=$$
$$=(1-v)^nP+[1-(1-v)^n]Q=Q+(1-v)^n(P-Q),$$

z čehož už snadno spočítáme $(1-v)^n=\frac{R-Q}{P-Q}$. To můžeme klidně rozšířit stem a dostaneme úplně stejné $(1-v)^n=\frac{r-q}{p-q}$. Jelikož $v=a/V$, platí $V=a/v$, a tedy

$$V=\frac{a}{1-\sqrt[n]{\frac{r-q}{p-q}}}.$$

$\boxed{14}$ **Ad 1.** Rozšířím $x-a$. Tím dostanu

$$\frac{1}{x-a}(x-a)(x+a)(x^2+a^2)\dots=\frac{1}{x-a}(x^2-a^2)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\dots=\frac{1}{x-a}(x^4-a^4)(x^4+a^4)\dots$$

atd. Činitel $x-a$ vyluxuje všechny závorky a zůstane výsledek

$$\frac{x^{2^n}-a^{2^n}}{x-a}.$$

Ad 2. Podobná metoda, jen rozšířím x^2+ax+a^2. Když to ozkouším na prvním členu, vidím, že je

$$(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)=(x^2+a^2)^2-a^2x^2=x^4+a^2x^2+a^4,$$

takže jsme opravdu dostali zas trojčlen ve stejném tvaru, jen s dvakrát větší mocninou. Lux tedy zafunguje úplně stejně a dostaneme

$$\frac{x^{2^{n+1}}+a^{2^n}x^{2^n}+a^{2^{n+1}}}{x^2+ax+a^2}.$$

$\boxed{15}$ Vydělím první rovnici p^2, druhou q^2 a třetí pq. Obdržím

$$\left(\frac{a_1}{p}\right)^2+\left(\frac{a_2}{p}\right)^2+\dots+\left(\frac{a_n}{p}\right)^2=1,$$
$$\left(\frac{b_1}{q}\right)^2+\left(\frac{b_2}{q}\right)^2+\dots+\left(\frac{b_n}{q}\right)^2=1,$$
$$\frac{a_1}{p}\frac{b_1}{q}+\frac{a_2}{p}\frac{b_2}{q}+\dots+\frac{a_n}{p}\frac{b_n}{q}=1.$$

Sečtu první dvě rovnice a odečtu dvojnásobek třetí, čímž dostanu součet úplných čtverců:

$$\left(\frac{a_1}{p}-\frac{b_1}{q}\right)^2+\left(\frac{a_2}{p}-\frac{b_2}{q}\right)^2+\dots+\left(\frac{a_n}{p}-\frac{b_n}{q}\right)^2=0.$$

Ale čtverec reálného čísla je vždy nezáporný, takže aby se součet takových čtverců rovnal nule, musí se rovnat nule každý zvlášť. Z toho už dostáváme žádané.

$\boxed{16}$ Po počátečním kroku, kdy jsme prostě sepsali první skupinu a do výsledku jsme zapsali její odmocninu, je určitě získaná číslice správně. Dál můžeme pokračovat indukcí: řekněme, že jsme zatím odmocnili P a vyšel výsledek A se zbytkem z. To znamená, že $P=A^2+z$, přičemž $0\le z\le 2A$, čímž chceme říct, že A^2 je nejbližší nižší úplný čtverec k P. Sepíšeme další skupinu R (což je číslo od 0 do 99) a tím utvoříme $100P+R=100A^2+100z+R$. Z druhé strany chceme do výsledku přidat tu správnou číslici n. Její vlastnost je zas taková, že až to uděláme, tak $(10A+n)^2$ musí být nejbližší nižší čtverec. Takže musí být

$$100A^2 + 100z + R = (10A+n)^2 + z' = 100A^2 + 20An + n^2 + z',$$

kde z' je nový zbytek. $100A^2$ se zruší a to ostatní můžeme přeorganisovat na

$$z' = 100z + R - (20A+n)n,$$

přičemž nový zbytek zas musí být mezi nulou a $20A + 2n$. Zvolíme tedy nejvyšší n takové, aby byl nový zbytek ještě kladný, a je to. Jistě si všimnete, že $100z + R$ je starý zbytek, ke kterému jsme sepsali další skupinu R, a součin $(20A+n)n$ též přesně odpovídá tomu hledání číslice, kterou doplňujeme do součinu.

Ještě drobnost: řekli jsme, že nový zbytek musí být mezi nulou a $20A+2n$. Jak víme, že když zvolíme n tak, jak jsme to popsali (tj. co největší, ale tak, aby byl součin $(20A+n)n$ menší nebo roven $100z+R$), bude pořád splněna podmínka $0 \le z' \le 2(10A+n)$? To, že n zvolíme tak, aby zbytek byl kladný, jsme už řekli. Ale co ta druhá hranice?

To dokážeme jednoduše. Řekněme, že to tak není, tj. $z' = 100z + R - 20An - n^2 > 20A + 2n$. Po přeposlání na druhou stranu by to ale dalo $100z + R > 20A(n+1) + n^2 + 2n$. Protože se jedná o nerovnost mezi přirozenými čísly, znamená to, že $100z + R$ je větší *nebo rovno* číslu o jednotku větší, tedy $20A(n+1) + (n+1)^2 = (20A+n+1)(n+1)$, a to znamená, že jsme mohli zvolit o jedničku vyšší n, což je spor s předpokladem, že n bylo zvoleno, jak nejvýš to šlo.