

Škola úpravy výrazů

V následujících úlohách Vám zkusím představit různé užitečné typy úprav a rovnou poskytnout jednoduché úlohy, na nichž byste si je mohli procvičit. Složitější výrazy pak často můžete upravit tím, že použijete těchto prvků několik po sobě.

1 Roznásobení. Mám-li součin součtu s čímkoli jiným, např. $(a + b + c)x$, můžu ho zapsat jako součet, v němž je každý sčítanec postupně násoben tím druhým činitelem. Takže zde by to bylo $ax + bx + cx$. Funguje to pro libovolný počet sčítanců.

1. $(a + b)(c + d)$; 2. $(a + b)^2$ (tj. $(a + b)(a + b)$); 3. $(a - b)^2$; 4. $(a - b)(a - d) - (a + b)(a + d)$;
5. $(a + b + 1)(c + 1) + (a + b - 1)(1 - c)$.

2 Vytknutí. Jde o opačný postup k roznásobení: vidím-li například $ax + bx + cx$, můžu x „vytknout“ a převést to zpět na součin $(a + b + c)x$. Občas je ale možného vytknutí trochu těžké si povšimnout.

1. $ab + ac - 2a$; 2. $x^2y^3 + y^2x^3$; 3. $x^2 + 2xy + y^2$ (viz bod 2 předchozí úlohy); 4. $ab + ac + bd + cd$ (vytkněte zvlášť z prvních a druhých dvou); 5. $xy^3 + yx^3 + 2x^2y^2$.

3 Zkusíme přepsat na součin $a^2 - b^2$. Pomůžeme si trikem: doprostřed přidáme $-ab + ab$. To je nula, takže tím se nic nezmění, ale pak máme $a^2 - ab + ab - b^2$. Vytkněte z prvních i druhých dvou členů a třetím vytknutím přepis na součin dokončete.

4 Krácení ve zlomcích. Přejdeme k počítání se zlomky. Jelikož zlomek je prostě podíl čitatele a jmenovatele, je jasné, že pokud obojí násobíme týmž číslem, výsledek se nezmění. Proto můžeme stejný nenulový činitel v čitateli i jmenovateli odstranit. Třeba můžu psát $\frac{a \cdot b}{a \cdot (c + d)} = \frac{b}{c + d}$ — obou a se můžu zbavit. **To funguje jen pro součiny!!**

1. $\frac{abc}{a(b+c)}$; 2. $\frac{ab+ac}{bc+c^2}$; 3. $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$; 4. $\frac{a^2+2a+1}{a^2-1}$.

5 Rozšíření ve zlomcích. Je to opačný proces ke krácení — čitatele i jmenovatele zlomku vynásobíme týmž nenulovým číslem. Upotřebíme ho často při zacházení s odmocninami společně se vztahem pro $a^2 - b^2$ ze čtvrté úlohy. V následujících bodech zkuste „usměrnit zlomky“ — odstranit odmocniny ze jmenovatelů.

1. $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$; 2. $\frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$; 3. $\frac{\sqrt{39}}{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$; 4. $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

6 Sčítání zlomků. Důležité je, že bezprostředně sčítat (a odčítat) se smí jen zlomky se stejným jmenovatelem. Pak platí $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$. Upravte:

1. $\frac{a^2}{a^2-b^2} - \frac{2ab}{a^2-b^2} + \frac{b^2}{a^2-b^2}$; 2. $\frac{ab}{b+c} + \frac{ac}{b+c}$.

Pokud jsou jmenovatele různé, musíme oba zlomky rozšířit tak, aby se staly stejnými. Třeba takto: sčítáme-li $\frac{1}{6} + \frac{1}{3}$, rozšíříme druhý zlomek dvěma a dostaneme $\frac{1}{6} + \frac{2}{6}$. Zde už můžeme sečíst, protože jsou jmenovatele stejní, a dostaneme $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

3. $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$; 4. $\frac{a}{b} + \frac{a}{c}$; 5. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$; 6. $\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x}$.

7 Rozklad zlomku na součet. Jde o opačný proces ke sčítání. Pokud máme například $\frac{ab+bc}{ab}$, můžeme to rozbít na součet dvou zlomků se stejným jmenovatelem: $\frac{ab}{ab} + \frac{bc}{ab} = 1 + \frac{c}{a}$. **To NEFUNGUJE se jmenovatelem!!**

1. $\frac{n-1}{n+1}$ (napište $n - 1 = (n + 1) - 2$); 2. $\frac{2n+1}{n-2}$ (zkuste obdobně); 3. $\frac{1}{n(n+1)}$ (napište $1 = (n + 1) - n$);
4. $\frac{1}{(n^2+n+1)(n-1)}$ (využijte toho, že $3 = (n^2 + n + 1) - (n + 2)(n - 1)$).

Odpovědi

1 1. $ac + ad + bc + bd$; 2. $a^2 + 2ab + b^2$; 3. $a^2 - 2ab + b^2$ (všimněte si, že u b^2 je zase plus!); 4. Tady se po roznásobení několik sčítanců vyruší, další se zas sečtou a zůstane $-2ab - 2ad$; 5. Tady je to vyrušení ještě markantnější. Zbude $2a + 2b + 2c$.

2 1. $a(b + c - 2)$; 2. $x^2y^2(x + y)$; 3. Je to vlastně $x^2 + xy + xy + y^2 = x(x + y) + y(x + y) = (x + y)(x + y) = (x + y)^2$; 4. $a(b + c) + d(b + c) = (a + d)(b + c)$; 5. $xy(y^2 + x^2 + 2xy) = xy(x + y)^2$.

3 Máme $a^2 - ab + ab - b^2 = a(a - b) + b(a - b) = (a + b)(a - b)$.

4 1. $\frac{bc}{b+c}$ (v tom už nelze krátit!); 2. $\frac{a(b+c)}{c(b+c)} = \frac{a}{c}$; 3. $\frac{a(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a}{a-b}$; 4. $\frac{(a+1)^2}{(a+1)(a-1)} = \frac{a+1}{a-1}$.

5 1. $2 - \sqrt{3}$; 2. $3 + 2\sqrt{2}$; 3. $\sqrt{3(5 + 2\sqrt{3})} = \sqrt{6 + 5\sqrt{3}}$; 4. Zkusme se nejdřív zbavit té $\sqrt{3}$ tím, že rozšíříme $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Vznikne $\frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2})^2 - 3} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3}$. Jaké štěstí! Ve jmenovateli zůstane jen $2\sqrt{2}$. Rozšíříme tedy ještě $\sqrt{2}$ a máme $\frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}$.

6 1. $\frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{a-b}{a+b}$; 2. a ; 3. $\frac{a^2 - b^2}{ab}$; 4. $\frac{ac + ab}{bc} = \frac{a(b+c)}{bc}$; 5. $\frac{ad + bc}{bd}$; 6. $\frac{(1+x)^2 + (1-x)^2}{(1-x)(1+x)}$.

Tady můžeme roznásobit a obdržet $2\frac{1+x^2}{1-x^2}$.

7 Budeme se zařizovat podle nápořád v závorkách. 1. $\frac{n-1}{n+1} = \frac{(n+1)-2}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$; 2. V čitateli chceme přidat ke $2n$ něco tak, aby vznikl násobek jmenovatele, tj. $n - 2$. Zřejmě tedy máme přičíst -4 . Totéž ale musíme zas odečíst — hodnotu zlomku nesmíme změnit! Takže získáme

$$\frac{2n-4+4+1}{n-2} = \frac{2n-4}{n-2} + \frac{5}{n-2} = 2 + \frac{5}{n-2}.$$

3. Máme $\frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; 4. Zlomek je roven

$$\frac{1}{3} \frac{(n^2+n+1)-(n+2)(n-1)}{(n^2+n+1)(n-1)} = \frac{1}{3} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3} \frac{n+2}{n^2+n+1}.$$