1 Ukažte, že pro libovolnou (dost slušnou) funkci f platí $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|$. Pak díky tomu vypočtěte integrály: **1.** $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-4}$; **2.** $\int_1^2 \frac{3x^2-1}{x^3-x+7}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+2}$.

2 Pomocí rozkladu v parciální zlomky vyčíslete následující integrály:

1. $\int_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{2-x-x^2}$; **2.** $\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$; **3.** $\int_{-5}^{-3} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-3)^2}$; **4.** $\int_4^5 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

3 Zkuste spočítat následující goniometrické integrály:

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\cos x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$;

Není potřeba v tom hledat složitosti, všechny čtyři se dají vyřešit substitucí $u = \sin x$ nebo $u = \cos x$ a využitím goniometrické jedničky. V posledním příkladě zkuste rozšířit $\sin x$.

4 Vzpomeňte si, že platí $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Pak vypočtěte integrály:

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

5 Pokud jsou v integrandu jen sudé mocniny sinu a kosinu, hodí se použít substituci $\operatorname{tg} x = u$.

1. Vyjádřete $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ jen pomocí $\operatorname{tg} x$. **2.** Ukažte, že při $\operatorname{tg} x = u$ platí $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

Vyčíslete: **3.** $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$; **4.** $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$; **5.** $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$ (zde $0 < b < a$).

6 Integrály s odmocninami se často dají pěkně vyřešit pomocí goniometrické substituce, protože $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ (a podobně i pro $\sin x$). Zkuste si to na těchto příkladech:

1. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_{-1}^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; **3.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$.

7 Integrujte per partes:

1. $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_0^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int_0^1 x\operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

Pozor! V pátém bodě integrujete $\mathrm{e}^{-x}\sin x$. Po každém per partes se podívejte, jestli náhodou ten integrál, který z per partes vyšel, není taky z $\mathrm{e}^{-x}\sin x$, jinak se zacyklíte navěky.

8 Pomocí integrace per partes dokažte následující vztahy ($n \geq 2$ je přirozené číslo):

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x$. Zapište explicitně výsledek $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ pro n sudé a liché.

2. $\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x} = \frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2} x}$. Opět zapište $\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}$ pro n sudé a liché.