Počítání

1 Stačí použít substituci $f(x) = u$, z čehož pak máme $f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$. Jaká náhoda, že v čitateli toho zlomku máme zrovna $f'(x)\,\mathrm{d}x$! Proto je

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,\mathrm{d}x}{f(x)} = \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \big[\ln|u|\big]_{f(a)}^{f(b)} = \ln\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|.$$

Pak už máme snadno výsledky: **1.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-4}{0-4}\right| = \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$; **2.** $\ln\frac{13}{7}$; **3.** $\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\frac{\cos\pi/4}{\cos 0} = -\frac{1}{2}\ln 2$; **4.** $\ln\frac{3}{2}$.

2 **1.** Nejdřív zjistíme kořeny polynomu ve jmenovateli. Ty jsou -2 a 1, proto můžeme zlomek psát jako $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$. Zároveň si povšimneme, že $(x+2)-(x-1) = 3$, a proto lze psát $\frac{1}{2-x-x^2}$ jako $\frac{1}{3}\frac{3}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}\frac{(x+2)-(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}\right)$, což se podle předchozí úlohy integruje na $\frac{1}{3}\ln 7 - \frac{2}{3}\ln 4$.
2. Máme $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right]$. Integrujeme na $\frac{1}{2}\left[\ln\frac{5}{4}-\ln\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{6}$.
3. Je $(x-3)^2 = x^2-6x+9$. Čím musíme násobit $x+1$, aby výsledek začínal taky x^2-6x? Zřejmě $x-7$. Pak totiž bude $(x+1)(x-7) = x^2-6x-7$. Z toho si už povšimneme, že platí

$$(x-3)^2-(x+1)(x-7) = (x-3)^2-(x+1)(x-3)-4(x+1) = 16.$$

Proto je zlomek pod integrálem možno psát také jako $\frac{1}{16}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-3}-\frac{4}{(x-3)^2}\right]$, což už se integruje snadno. Výsledek: $-\frac{1}{16}\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{96}$.
4. Vyjde najevo, že zlomek pod integrálem je roven $\frac{1/2}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{1/2}{x-3}$. To lze už integrovat snadno. Výsledek: $\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$.

3 **1.** $\frac{1}{5}$; **2.** Dostaneme $\int_0^1(1-u^2)u^2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}-\frac{1}{5} = \frac{2}{15}$. **3.** Zde máme $\int_0^1(1-u^2)^2\,\mathrm{d}u = \frac{8}{15}$.
4. Tady rozšiřme ještě sinem a dostaneme $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)\mathrm{d}u = \ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$.
Zlomek ještě můžeme rozšířit $\sqrt{2}+1$ a vyjde najevo, že výsledek lze stejně tak psát i jako $\ln(1+\sqrt{2})$.

4 **1.** $\frac{\pi}{4}$; **2.** Dostaneme $\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,\mathrm{d}x$. Prostřední člen se integruje na nulu, pravý ještě zapíšeme jako $\frac{1+\cos 4x}{2}$. Kosinus se zas integruje na nulu a zůstane jen $3/2$, která se integruje na $3\pi/4$. Výsledek je tedy $3\pi/16$. **3.** Buď můžeme zase využít ty vzorce, nebo napsat $\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}\sin^2 2x\cdot 2$. Pak můžeme udělat substituci $2x = u$ a vyjde $\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\sin^2 u\,\mathrm{d}u$. Integrál je roven dvojnásobku toho, co jsme našli v bodě 1, tj. $\pi/2$. Výsledek: $\pi/16$.

5 **1.** Máme $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$. Dělíme $\cos^2 x$, dostaneme $1+\mathrm{tg}^2\,x = \frac{1}{\cos^2 x}$, tj. $\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,x}$. Proto musí být $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2\,x}{1+\mathrm{tg}^2\,x}$.
2. Diferencujme; dostaneme $\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{d}u$, ale podle předchozího bodu je $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\mathrm{tg}^2\,x = 1+u^2$. Dělíme a získáme žádané.
3. Vložme $\mathrm{tg}\,x = u$ a přepišme podle našich vzorců z předchozího bodu. Obdržíme $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\cdot\frac{1}{\frac{a^2u^2}{1+u^2}+\frac{b^2}{1+u^2}} = \frac{1}{ab}\int_0^{\infty}\frac{a\,\mathrm{d}u/b}{1+\left(\frac{au}{b}\right)^2} = \frac{\pi}{2ab}$.

4. Tohle vypadá hůř, než jaké to je. Zase dejme $\operatorname{tg} x = u$, obdržíme $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1 + u^2)\,\mathrm{d}u$ a je to integrace jednoduchého polynomu. Výsledek: $\frac{44}{9\sqrt{3}}$.

5. Nejdřív si uvědomíme, že díky sudosti kosinu stačí vzít dvojnásobek integrálu od nuly do π. Pak můžeme použít trik: přepíšeme $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$ a dostaneme

$$2\int\limits_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(a-b) + 2b\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Za závorku $(a-b)$ vložíme jedničku ve tvaru $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$ a po substituci $x/2 = u$ můžeme už využít vztah ze třetího bodu:

$$4\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{(a-b)\sin^2 u + (a+b)\cos^2 u} = 4\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

$\boxed{6}$ **1.** $\pi/2$. **2.** $\pi/2$ (vede to na $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$).

3. Vložme $x = \sin^2\varphi$. Pak $\mathrm{d}x = 2\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, meze jdou od 0 do $\pi/2$. Po dosazení vidíme, že se všechno pomlátí, zůstane jen dvojka a naintegruje se π.

$\boxed{7}$ **1.** 1; **2.** 2;

3. Tady je potřeba trik: rozdělíme to na $1 \cdot \ln x$, jedničku budeme integrovat a logaritmus derivovat. Výsledek: $[x\ln x]_0^1 - 1$. Ale co je to v té závorce? Při $x = 1$ dostaneme nulu. Co ale při $x = 0$? To dostaneme $0 \cdot \infty$, takže musíme použít l'Hospitala. Pišme: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$. Celá hranatá závorka zmizne a zůstane jen výsledek -1.

4. Tady je otázka, co máme integrovat a co derivovat. Normálně se x derivuje, ale arkustangentu integrovat pěkně neumíme. Tak to raději uděláme obráceně. Tím dostaneme $\left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,tg} x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$. Hranatá závorka dá $\pi/8$, pod integrálem do čitatele přidám a odečtu jedničku a zlomek se rozpadne na $1 - \frac{1}{1+x^2}$, což už se integruje snadno. Výsledek: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

5. Označme ten integrál I. Derivujme sinus a $\mathbf{e}^{-x}$ integrujme; dostaneme $I = \int\limits_0^{\infty} \mathbf{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$. Zas udělejme per partes, derivujme kosinus a $\mathbf{e}^{-x}$ integrujme; dostaneme $I = 1 - I$, z čehož už snadno vypočteme $I = \frac{1}{2}$.

$\boxed{8}$ **1.** Dokázaný vzorec můžeme využít takto: mocnina se snižuje vždy o dva, takže je-li n sudé, budeme ji snižovat až na nulu. Pak už snadno vypočteme $\int_0^{\pi/2} \sin^0 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ (cokoli na nultou je jedna). Je-li n sudé, můžeme psát $n = 2k$ a máme

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2k} x\,\mathrm{d}x = \frac{2k-1}{2k}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2k-2} x\,\mathrm{d}x = \frac{2k-1}{2k}\frac{2k-3}{2k-2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2k-4} x\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2k(2k-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2} =$$

(poslední rovnost vznikne tak, že rozšíříme celý zlomek ještě jednou tím, co je ve jmenovateli; viz řešení třetí písemky).

Zato při n lichém ji budeme snižovat až k první mocnině. Pak se tam objeví $\int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = 1$.

Pišme $n = 2k + 1$ a máme

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x \, \mathrm{d}x = \frac{2k(2k-2)\cdots 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3} = \frac{2^{2k}}{k+1} \frac{1}{\binom{2k+1}{k}}.$$

2. Tady zase klesají mocniny po dvou. Pro sudé mocniny zas píšeme $n = 2k$ a máme

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2k} x} = \frac{1}{2k-1} 2^{k-1} + \frac{2k-2}{(2k-1)(2k-3)} 2^{k-2} + \cdots + \frac{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}.$$

Pro liché skončíme u $\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$. Položme $x = \frac{\pi}{2} - u$ a vidíme, že vyjde týž integrál, jaký je v bodě 4 úlohy 3. Tam se zjistilo, že vyjde $\ln(1 + \sqrt{2})$. Pišme $n = 2k + 1$ a máme

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2k+1} x} = \frac{\sqrt{2}}{2k} 2^{k-1} + \sqrt{2} \frac{2k-1}{2k(2k-2)} 2^{k-2} + \cdots + \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{2k(2k-2)\cdots 2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$