1 Ukažte, že pro libovolnou (dost slušnou) funkci f platí $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|$. Pak díky tomu vypočtěte integrály: **1.** $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-4}$; **2.** $\int_1^2 \frac{3x^2-1}{x^3-x+7}\,dx$; **3.** $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$; **4.** $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x\,dx}{e^x+2}$.

2 Pomocí rozkladu v parciální zlomky vyčíslete následující integrály:

1. $\int_2^5 \frac{dx}{2-x-x^2}$; **2.** $\int_3^4 \frac{dx}{1-x^2}$; **3.** $\int_{-5}^{-3} \frac{dx}{(x+1)(x-3)^2}$; **4.** $\int_4^5 \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

3 Zkuste spočítat následující goniometrické integrály:

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\cos x\,dx$; **2.** $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^2 x\,dx$; **3.** $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,dx$; **4.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$;

Není potřeba v tom hledat složitosti, všechny čtyři se dají vyřešit substitucí $u = \sin x$ nebo $u = \cos x$ a využitím goniometrické jedničky. V posledním příkladě zkuste rozšířit $\sin x$.

4 Vzpomeňte si, že platí $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Pak vypočtěte integrály:

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$; **2.** $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$; **3.** $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos^2 x\,dx$.

5 Pokud jsou v integrandu jen sudé mocniny sinu a kosinu, hodí se použít substituci $\operatorname{tg} x = u$.

1. Vyjádřete $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ jen pomocí $\operatorname{tg} x$. **2.** Ukažte, že při $\operatorname{tg} x = u$ platí $dx = \frac{du}{1+u^2}$.

Vyčíslete: **3.** $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$; **4.** $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^4 x}$; **5.** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x}$ (zde $0 < b < a$).

6 Integrály s odmocninami se často dají pěkně vyřešit pomocí goniometrické substituce, protože $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ (a podobně i pro $\sin x$). Zkuste si to na těchto příkladech:

1. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; **2.** $\int_{-1}^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; **3.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

7 Integrujte per partes:

1. $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$; **2.** $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx$; **3.** $\int_0^1 \ln x\,dx$; **4.** $\int_0^1 x\operatorname{arc\,tg} x\,dx$; **5.** $\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$.

Pozor! V pátém bodě integrujete $e^{-x}\sin x$. Po každém per partes se podívejte, jestli náhodou ten integrál, který z per partes vyšel, není taky z $e^{-x}\sin x$, jinak se zacyklíte navěky.

8 Pomocí integrace per partes dokažte následující vztahy ($n \geq 2$ je přirozené číslo):

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx$. Zapište explicitně výsledek $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ pro n sudé a liché.

2. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$. Opět zapište $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^n x}$ pro n sudé a liché.

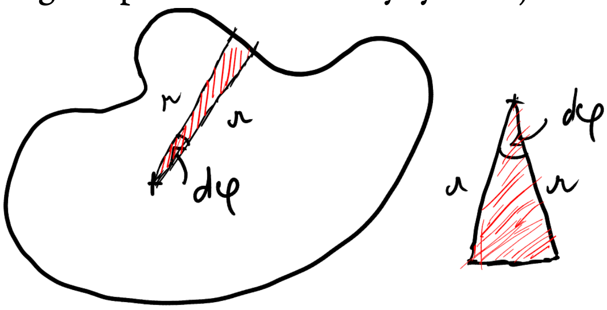
1 Nalezněte plochu následujících útvarů:

1. kusu paraboly $ax(b-x)$, který je nad osou x. Zapište výsledek pomocí jeho „základny“ a „výšky“;
2. elipsy o poloosách a a b;
3. bramboroidu ohraničeného shora grafem funkce $\frac{1}{1+x^2}$, ze stran přímkami $x=\pm 1$ a zdola osou $y=0$.

2 Vypočtěte objemy a povrchy následujících těles:

1. katenoidu, který vznikne rotací křivky $r=\frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{z/a}+\mathrm{e}^{-z/a}\right)$ pro $-b<z<b$;
2. paraboloidu, který vznikne rotací paraboly $z=a-\frac{ar^2}{b^2}$ pro $0<r<b$.

3 Co když chceme spočítat plochu omezenou nějakou křivkou zadanou v polárních souřadnicích (tedy vzdáleností od počátku r a úhlem φ)? Podívejte se na obrázek níže. Jaká je plocha červeně vybarveného trojúhelníčka? Integrací pak sečtěte všechny tyto trojúhelníčky a dostanete plochu.



4 Spočtěte plochu následujících útvarů:

1. Kardioidy zadané vztahem $r=a(1+\cos\varphi)$. **2.** Lemniskáty zadané vztahem $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

5 Mějme nějakou křivku danou parametricky $x=x(t), y=y(t)$. Když posuneme parametr o $\mathrm{d}t$, o kolik se změní x a y? Podle toho spočítejte délku kousku křivky $\mathrm{d}s$, který při této změně vykreslíme. Délku křivky pak zapište jako integrál z $\mathrm{d}s$.

6 Vypočtěte délku:

1. paraboly $y=x^2$ mezi body $x=-1$ a $x=+1$; **2.** řetězovky $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ mezi body $x=0$ a $x=b$.

7 Co když by ta křivka byla zadaná v polárních souřadnicích? Tedy kdybychom místo $x(t)$ a $y(t)$ měli zadáno $r(t)$ a $\varphi(t)$? Přepište element délky $\mathrm{d}s$ tak, aby v něm vystupovalo pouze r a φ. (**Nápověda:** Mezi kartézskými a polárními souřadnicemi platí vztah $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$.)

8 Vypočtěte délku: **1.** logaritmické spirály $r=\mathrm{e}^{a\varphi}$ od jejího prostředku v $r=0$ až do bodu s $r=1$;
2. kardioidy $r=a(1+\cos\varphi)$ (celá křivka se opíše, když φ projde od 0 do 2π).

9 Řešte pomocí separace proměnných:

1. $y'=1+y^2$ při $y(0)=1$; **2.** $xy'+y-y^2=0$; **3.** $y\ln y+xy'=0$ při $y(1)=\mathrm{e}$; **4.** $\mathrm{e}^{-y}(y'+1)=1$;
5. $(1+\mathrm{e}^x)y'+\mathrm{e}^x y=0$ při $y(0)=1$; **6.** $y'\operatorname{tg}x-y^2=1-2y$.

10 Budeme řešit rovnici $y'=(6x+2y+3)^2$. Na to se bude hodit substituce $z=6x+2y+3$, kde $z(x)$ bude naše nová neznámá funkce.

1. Derivujte rovnost $z=6x+2y+3$ a vyjádřete y' pomocí z'.
2. Dosaďte do rovnice za y' podle předchozího bodu a $6x+2y+3$ vpravo zaměňte za z.
3. Výslednou rovnici řešte. Ve výsledku zase zapište $z=6x+2y+3$ a vyjádřete y.