Aplikace

1 1. $\frac{2}{3}\cdot(\text{základna})\cdot(\text{výška})$; 2. πab; 3. $\frac{\pi}{2}$.

2 1. Tady máme $\mathrm{d}V = \frac{\pi a^2}{4}(\mathrm{e}^{2z/a} + \mathrm{e}^{-2z/a} + 2)\,\mathrm{d}z$. Integrujme podle z od $-b$ do b. Obdržíme $V = \frac{\pi a^3}{4}\left(\mathrm{e}^{2b/a} - \mathrm{e}^{-2b/a}\right) + \pi a^2 b$.

Pokud jde o povrch, musíme ještě spočítat $\mathrm{d}r = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{z/a} - \mathrm{e}^{-z/a})\,\mathrm{d}z$ a $\sqrt{\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2} = \frac{\mathrm{e}^{z/a}+\mathrm{e}^{-z/a}}{2}\,\mathrm{d}z$. Povrch pak dostaneme jako $S = 2\pi\int_{-b}^{b} r\sqrt{\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2}$. Po provedení substituce $\mathrm{e}^{z/a} = u$ se to redukuje na integraci polynomu, i když nepříjemnou. Výsledek: $\frac{\pi a^2}{6}\left[\mathrm{e}^{3b/a} - \mathrm{e}^{-3b/a} + 9(\mathrm{e}^{b/a} - \mathrm{e}^{-b/a})\right]$.

2. Při $r = 0$ máme $z = a$ a při $r = b$ máme $z = 0$. Proto budeme integrovat v z od 0 do a. Při výpočtu objemu hned můžeme vyjádřit $r^2 = \frac{b^2}{a}(a - z)$ a $V = \pi\frac{b^2}{a}\int_0^a (a - z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\pi b^2 a$.

U povrchu diferencujme: $\mathrm{d}z = -2ar\,\mathrm{d}r/b^2$, takže $\mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}r^2 = \left(1 + \frac{4a^2r^2}{b^4}\right)\mathrm{d}r^2$. Proto dostaneme

$$S = 2\pi\int_0^b r\sqrt{1 + \frac{4a^2}{b^4}r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Položíme-li $1+\frac{4a^2}{b^4}r^2 = u$, dostaneme integrál z $\sqrt{u}\,\mathrm{d}u$ a snadno získáme výsledek $\frac{\pi b}{6a^2}\left[(b^2 + 4a^2)^{3/2} - b^3\right]$.

3 $\mathrm{d}S = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\varphi$.

4 1. Počítejme $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 3\pi a^2/2$.

2. Tady je problém: pokud je kosinus záporný, rovnici nemůže vyhovět žádné r! Takže křivka musí mít dvě „uši“: jedno pro $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ a druhé o π dál. Jedno ucho má tedy plochu $\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = a^2/2$ a obě uši dohromady a^2.

5 Dostaneme $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$.

6 1. Zde je $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$, takže $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = (1 + 4x^2)\,\mathrm{d}x^2$ a $s = \int_{-1}^{1}\sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x$. Tento mírně nepříjemný integrál se normálně vyčísluje s pomocí hyperbolických funkcí. Ale my jsme je na cvičení moc nepotkali. Vytáhneme z klobouku substituci $2x = \frac{1}{2}(y - y^{-1})$. Tím totiž docílíme toho, že se pod odmocninou objeví $1 + \frac{1}{4}(y^2 - 2 + y^{-2}) = \frac{1}{4}(y^2 + 2 + y^{-2}) = \frac{1}{4}(y + y^{-1})^2$, což je úplný čtverec, takže se odmocniny zbavíme. Nakonec ještě musíme zjistit, jaké hodnoty y odpovídají mezím $x = \pm 1$ — řešením kvadratické rovnice vyjde najevo, že se bude integrovat od $\frac{1}{2+\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$ do $\sqrt{5} + 2$. Proto bude

$$s = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{5}-2}^{\sqrt{5}+2}\left(y + \frac{1}{y}\right)^2\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{5}-2}^{\sqrt{5}+2}\left(y + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^3}\right)\mathrm{d}y.$$

Tady se integrují už jenom samé mocniny, což je triviální. Výsledek: $\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{5})$.

2. Zase tu máme hyperbolické funkce. $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x^2$, takže délka je $a\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a}$.

7 Protože $\mathrm{d}x = \cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ a $\mathrm{d}y = \sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, můžeme prostě oba diferenciály dát na druhou a sečíst. Výsledek: $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2$.

$\boxed{8}$ **1.** Zde je $\mathrm{d}r = a\mathrm{e}^{a\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$, takže $\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 = \mathrm{e}^{2a\varphi}(1 + a^2)\,\mathrm{d}\varphi^2$. Integrovat musíme od $\varphi = -\infty$ až do $\varphi = 0$. Výsledek: $\frac{1}{a}\sqrt{1 + a^2}$.
2. $\mathrm{d}r = -a\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}s^2 = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi^2$. Odmocněním získáme $\mathrm{d}s$, ale pozor na znamení! Kosinus může být kladný i záporný a když odmocníme jeho čtverec, objeví se kolem něj absolutní hodnota. Je tedy $\mathrm{d}s = 2a|\cos\frac{\varphi}{2}|\,\mathrm{d}\varphi$. Délka je tedy $2a\int\limits_0^{2\pi}|\cos\frac{\varphi}{2}|\,\mathrm{d}\varphi = 8a$.

Zákeřné úlohy

$\boxed{2}$ **1.** Víme, že platí vztah $s = v\cdot t$, takže za malinký čas $\mathrm{d}t$ urazí závaží dráhu $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$. Odtud $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Dosazením do zákona zachování energie získáme žádané.
2. Obdrží se $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{1}{m}(2E - kx^2)}$. Přerovnáme to na

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \frac{kx^2}{2E}}} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}\,\mathrm{d}t.$$

Integrujme čas od 0 do t. Poloha v těchto dvou časech je obecně $x(0)$ a $x(t)$. Násobme ještě rovnici $\sqrt{k/2E}$ a obdržíme

$$\int\limits_{x(0)}^{x(t)} \frac{\sqrt{k/2E}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{k/2E}\,x\right)^2}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

V integrálu položíme $\sqrt{k/2E}\,x = u$ a tím ho zredukujeme na tabulkový integrál. Vyjde

$$\arcsin u\Big|_{x(0)}^{x(t)} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}\,x(t)\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}\,x(0)\right) = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Proto dostáváme výsledek $x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \arcsin\left[\sqrt{\frac{k}{2E}}\,x(0)\right]\right)$.
3. Nestalo by se nic moc zvláštního, protože potenciální energii lze pak doplnit na čtverec: $kx^2 + mgx = k(x + \frac{mg}{2k})^2 - \frac{m^2g^2}{4k}$. Pak můžeme zavést novou proměnnou $\hat{x} = x + \frac{mg}{2k}$. Jelikož je $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\hat{x}$, bude také platit

$$m\left(\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + k\hat{x}^2 = 2E + \frac{m^2g^2}{4k} = \text{const.}$$

a je vidět, že v gravitačním poli se $\hat{x}$ chová úplně stejně, jako se chovalo x bez gravitačního pole, jen se změní energie. Dostaneme tedy

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{2E}{k} + \frac{m^2g^2}{4k^2}}\,\sin\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \arcsin\frac{\hat{x}(0)}{\sqrt{\frac{2E}{k} + \frac{m^2g^2}{4k^2}}}\right)$$

a po přechodu k původní proměnné x budeme mít

$$x = -\frac{mg}{2k} + \sqrt{\frac{2E}{k} + \frac{m^2g^2}{4k^2}}\,\sin\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \arcsin\left[\frac{x(0) - \frac{mg}{2k}}{\sqrt{\frac{2E}{k} + \frac{m^2g^2}{4k^2}}}\right]\right).$$

Takže se to chová úplně stejně, jen rovnovážná poloha je vychýlená o $mg/2k$ dolů a čtverec amplitudy kmitů se zvýší o $m^2g^2/4k^2$.

3 **1.** Je to vlastně tak: rozdělíme interval od 0 do 1 na n kousků a nad každým z nich nakreslíme obdélníček do výšky té funkce pod integrálem. V tomto případě platí, že k-tý obdélníček bude začínat v bodě $\frac{k-1}{n}$ a končit v $\frac{k}{n}$. Bude-li obdélníčků opravdu hodně (tj. $n \to \infty$), jsou jeho oba konce tak blízko u sebe, že je vlastně dost jedno, jestli výšku obdélníčku udělám podle levého kraje, pravého kraje či podle nějaké hodnoty uprostřed. Zvolme si třeba pravý kraj. Pak bude pro k-tý obdélníček platit $x = k/n$. Šířka všech obdélníčků je stejná: $\mathrm{d}x = 1/n$. Proto integrál můžeme skutečně zapsat jako součet ploch všech těchto obdélníčků při $n \to \infty$ a dostaneme žádané.

2. Každý zlomek $\frac{n}{n^2+k^2}$ přepíšu na $\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Opět máme $x = k/n$ a $\frac{1}{n} = \mathrm{d}x$ je šířka obdélníčku. Proto je limita rovna $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

3. Zas obdobně. Nejdřív napíšeme $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ jako $\exp \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}(\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n) - \ln n\right]$. To lze dále upravit na toto:

$$\exp \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} + \dots + \ln\frac{n}{n}\right).$$

Limita pod exponenciálou je tedy $\int\limits_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x = -1$ a celkem dostáváme výsledek $1/\mathrm{e}$.

4 **1.** Podle 2. Newtonova zákona máme $F = ma$. Zrychlení je $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, takže máme (když pro časovou derivaci píšeme tečku)

$$m\dot{v} = \tfrac{1}{2}CS\rho v^2 - mg.$$

2. Při mezní rychlosti je $\dot{v} = 0$, tj. $\frac{1}{2}CS\rho w^2 = mg$. Z toho máme $w = \sqrt{2mg/CS\rho}$. Předchozí rovnici násobme $2/CS\rho$. Obdržíme $w^2\dot{v}/g = v^2 - w^2$ čili

$$\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{v}{w}\right)^2 - 1.$$

(Mimochodem si všimněte, že obě strany jsou bezrozměrné. Takové zápisy rovnic jsou ve fysice často užitečné, protože bezrozměrné veličiny vyjadřují nějaké charakteristiky té úlohy, které se nemění při natahování rozměrů/časů/atd.)

3. Přerovnáme rovnici na $\dfrac{\mathrm{d}v/w}{\left(\frac{v}{w}\right)^2 - 1} = \dfrac{g}{w}\,\mathrm{d}t$ a můžeme integrovat obě strany od času 0 do času t. Vpravo bude prostě jen gt/w. Vlevo uděláme super-duper-trik: substituci $v/w = \operatorname{th}\psi$, kde „th“ je tangens hyperbolický: $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$. Pak dostaneme $\frac{\mathrm{d}v}{w} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\psi}\,\mathrm{d}\psi$, v čemž můžeme položit $1 = \operatorname{ch}^2\psi - \operatorname{sh}^2\psi$ a získat

$$\frac{\mathrm{d}v}{w} = (1 - \operatorname{th}^2\psi)\,\mathrm{d}\psi = \left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right]\mathrm{d}\psi \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{\mathrm{d}v/w}{\left(\frac{v}{w}\right)^2 - 1} = -\mathrm{d}\psi.$$

Integrál je tím vyřízen, protože z něj zůstane jen $-\mathrm{d}\psi$ a zbude pouhé $\psi(0) - \psi(t) = gt/w$. To přepišme na $\psi(t) = \psi(0) - gt/w$ a vezměme tangentu hyperbolickou z obou stran. Tím se vlevo zas objeví v/w a máme výsledek

$$v(t) = w\operatorname{th}\left[\psi(0) - \frac{gt}{w}\right] = -w\operatorname{th}\left(\frac{gt}{w} - \psi(0)\right).$$

Zde platí, že $\operatorname{th}\psi(0) = v(0)/w$, takže musíme využít inversní funkci k tangentě hyperbolické, která je, věřte nevěřte, rovna $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Proto platí, že $\psi(0) = \ln\sqrt{\frac{w+v(0)}{w-v(0)}}$.

4. Musíme ještě jednou integrovat tu rychlost získanou v předchozím bodě. Jelikož th $= \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$, bude se integrovat na ln ch. Výsledek:

$$y(t) = y(0) - \frac{w^2}{g} \ln \text{ch} \left[\frac{gt}{w} - \ln \sqrt{\frac{w + v(0)}{w - v(0)}} \right].$$

$\boxed{5}$ Oba integrály jsou tabulkové a už bychom je měli dobře znát. $\frac{1}{1+t^2}$ rozvineme v geometrickou řadu takto:

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 - \dots$$

a integrací tohoto rozvoje podle t dostaneme

$$\text{arc tg}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Obdobně s arkussinem: máme binomický rozvoj

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} t^{2n}.$$

Zase integrujeme a obdržíme rozvoj

$$\text{arc sin}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \dots$$

$\boxed{6}$ Elipsa je dána vztahem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\epsilon)^2} = 1$. Z toho vyjádříme $y = \pm(1-\epsilon)\sqrt{a^2 - x^2}$. Při odmocnění jsme tu vybrali jen znamení „+“ s tím, že tato rovnost popisuje jen horní polovinu elipsy. Dále spočteme $\mathrm{d}y = (1-\epsilon)\frac{-x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ a

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \frac{a^2 + (\epsilon^2 - 2\epsilon)x^2}{a^2 - x^2}\, \mathrm{d}x^2.$$

Chceme úplnou délku elipsy. Budeme-li integrovat ds od $-a$ do a, dostaneme jen horní půlku; musíme tedy vzít dvojnásobek:

$$s = 2 \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - (2\epsilon - \epsilon^2)x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x.$$

Položme $x = au$ a využijme sudosti integrandu: integrál přejde v

$$s = 4a \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1 - (2\epsilon - \epsilon^2)u^2}}{\sqrt{1 - u^2}}\, \mathrm{d}u.$$

To je jeden z tzv. *eliptických integrálů*, který není možné zapsat pomocí elementárních funkcí. Pokud ale předpokládáme, že ϵ je velmi malé, můžeme horní odmocninu rozvinout takto:

$$\sqrt{1 - (2\epsilon - \epsilon^2)x^2} = \left[1 - (2\epsilon - \epsilon^2)u^2\right]^{1/2} = 1 - \frac{2\epsilon - \epsilon^2}{2} u^2 - \frac{(2\epsilon - \epsilon^2)^2}{4} u^4 + \dots$$

Pišme to jen do ϵ^2:

$$1 - \frac{2\epsilon - \epsilon^2}{2}u^2 - \epsilon^2 u^4 + \cdots$$

A můžeme to vložit do integrálu a integrovat. Využijeme toho, že $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^1 \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{4}$ a konečně $\int_0^1 \frac{u^4\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{3\pi}{16}$ a obdržíme výsledek

$$s = 2\pi a - \pi a\epsilon - \frac{\pi}{4}a\epsilon^2 + \cdots = 2\pi a - \pi(a-b) - \frac{\pi(a-b)^2}{4a} - \cdots$$

7 **1.** **2.** Začneme druhým bodem. Je-li $x = 0$, integrál jde od nuly do nuly a zjevně se nenaintegruje nic, takže $\Phi(0) = 0$. Jestliže pak máme $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Phi(x) - \Phi(0)$, musí podle Newtonovy-Leibnizovy formule zřejmě být $\mathrm{d}\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, čímž získáváme žádanou derivaci.

3. Zřejmě platí

$$\int_0^{-x} \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left\|\begin{array}{rcl} t &=& -u \\ \mathrm{d}t &=& -\mathrm{d}u \end{array}\right\| = -\int_0^x \mathbf{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Integrál tedy při změně znamení x také sám změní znamení. A $2/\sqrt{\pi}$ je jen konstanta.

4. Použijme per partes:

$$\int_0^x \Phi(t)\,\mathrm{d}t = \left\|\begin{array}{cc} \Phi(t) & \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathbf{e}^{-t^2} \\ 1 & t \end{array}\right\| = x\Phi(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x t\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

V posledním integrálu můžeme položit $t^2 = u$, tj. $2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ a integrál vyjde $1 - \mathbf{e}^{-x^2}$. Výsledek: $x\Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathbf{e}^{-x^2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Můžete si ověřit, že když tuto funkci zderivujeme, dostaneme zase $\Phi(x)$.

8 **1.** $\mathrm{d}a = -\alpha b\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}b = -\alpha a\,\mathrm{d}t$.

2. Dostaneme $a\,\mathrm{d}a = b\,\mathrm{d}b$.

3. Násobme rovnici dvěma na $2a\,\mathrm{d}a = 2b\,\mathrm{d}b$, což je $\mathrm{d}(a^2) = \mathrm{d}(b^2)$. Proto $\mathrm{d}(a^2 - b^2) = 0$, a tak $a^2 - b^2 = \text{const.}$ Bylo-li $a > b$, bude na konci bitvy $b_{\text{konec}} = 0$ a máme

$$a^2 - b^2 = \text{const.} \qquad \Longrightarrow \qquad a^2_{\text{začátek}} - b^2_{\text{začátek}} = a^2_{\text{konec}} - b^2_{\text{konec}}.$$

Takže skutečně $a_{\text{konec}} = \sqrt{a^2_{\text{začátek}} - b^2_{\text{začátek}}}$.

4. Budeme mít $\mathrm{d}a = -\beta b\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}b = -\alpha a\,\mathrm{d}t$. Opět dělíme a po integraci dostaneme $\alpha a^2 - \beta b^2 = \text{const.}$ Z toho je vidět, že efekt přesily je daleko větší než efekt toho, kdo má lepší bojovníky: má-li nepřítel dvakrát víc bojovníků, naši bojovníci musí být *čtyřikrát* lepší než jejich, abychom tuto výhodu vyrovnali. Konkrétně: jsou-li naši bojovníci λ-krát lepší, je z toho jen taková výhoda, jako by nás bylo $\sqrt{\lambda}$-krát víc.

9 **1.** Jde o starou známou řadu pro arkustangentu, odvozenou mj. v úloze 5. Dále viz tam.

2. Potřebujeme integrovat $1 + x^2 - x^4 - x^6 + x^8 + x^{10} - x^{12} - x^{14}$ atd. Zřejmě bude dobře vytknout z každých dvou sousedních členů vše, co jde: tím dostaneme $(1+x^2) - (1+x^2)x^4 + (1+x^2)x^8$ atd. Máme tedy integrovat řadu $(1+x^2)(1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$, a to od nuly do jedné. Součet řady bude

$$\int_0^1 \frac{(1+x^2)\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int_0^1 \frac{(1+\frac{1}{x^2})\,\mathrm{d}x}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 + 2} = \int_0^1 \frac{(1+\frac{1}{x^2})\,\mathrm{d}x}{(x-\frac{1}{x})^2 + 2}.$$

Položme $x - \frac{1}{x} = u$; pak dostaneme $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$. Jaká náhoda, že přesně to se válí v čitateli! Teď už rychle obdržíme výsledek:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{2 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}u/\sqrt{2}}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$