2 Závaží o hmotnosti m kmitá na pružině o tuhosti k ve směru osy x. Kinetická energie je $\frac{1}{2}mv^2$, potenciální je $\frac{1}{2}kx^2$.

1. Vyjádřete v pomocí dx a dt. Pak ukažte, že platí $m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + kx^2 = 2E = \text{const.}$

2. Vyjádřete z rovnice $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Pak separujte proměnné a integrací zjistěte $x(t)$.

3. Co by se stalo, kdybychom přidali tíhovou sílu? Přidejte k potenciální energii ještě člen mgx.

---

3 Připomeňte si, že určitý integrál vlastně sčítá plochy malinkých obdélníčků o výšce $f(x)$ a základně dx.

1. Vysvětlete, proč $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

2. Podobným trikem spočtěte $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

3. Užijte navíc i „exp ln" trik a spočtěte $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

---

4 **Skok s padákem.** Vyskočili jste z letadla a teď padáte. V okamžiku otevření padáku ($t = 0$) jste padali rychlostí v_0, Vaše hmotnost i s padákem je M. K zemi Vás táhne tíhová síla, proti ní účinkuje odporová síla vzduchu ve tvaru $F = \frac{1}{2}CS\rho v^2$, kde $C \approx 1{,}2$, S je plocha padáku a ρ hustota vzduchu.

1. Napište pohybovou rovnici tak, aby obsahovala kromě konstant jen v a $\dot{v}$.

2. Spočtěte mezní rychlost w (tedy rychlost, při níž se obě síly vyrovnávají). Přepište pohybovou rovnici tak, aby většina konstant zmizla a nahradila se mezní rychlostí w.

3. Separujte proměnné a integrací zjistěte závislost rychlosti na čase.

4. Jelikož je $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, můžete výsledek integrovat ještě jednou a dostat závislost polohy na čase.

---

5 Přesvědčte se, že $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} x$ a $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$. Pak pomocí binomického rozvoje rozložte funkci pod integrálem v mocninnou řadu a integrujte člen po členu. Díky tomu obdržíte Taylorovy rozvoje pro funkce arc tg x a arc sin x.

---

6 Mějme elipsu o velké poloose a a malé poloose $b = a(1-\epsilon)$. Zapište integrálem délku elipsy. Jelikož výsledný integrál nelze vůbec vyjádřit v elementárních funkcích (fakt, nesnažte se o to!), zkuste si pomoci trikem: předpokládejte, že ϵ je velmi malé oproti jedné a rozviňte funkci pod integrálem v mocninnou řadu v ϵ. Ponechte si prvních pár členů (2–3). Integrujte a sledujte, jak první člen vydá délku kružnice ($\epsilon = 0$) a další představují postupné malé opravy.

---

7 Definujme funkci $\displaystyle\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. **1.** Zjistěte její derivaci. **2.** Vypočtěte $\Phi(0)$. **3.** Dokažte, že jde o lichou funkci. **4.** Pomocí per partes spočtěte integrál $\int_0^x \Phi(t)\,\mathrm{d}t$. Vyjádřete ho pouze pomocí elementárních funkcí a funkce $\Phi(x)$.

---

8 **Válka mravenců.** Kteréhosi dne v lese a černých mravenců potkalo b rezavých mravenců, svých nejzarputilejších nepřátel. Obě skupiny se na sebe vrhnou a začnou se navzájem ničit. Každý mravenec za čas $\mathrm{d}t$ zničí $\alpha\,\mathrm{d}t$ svých nepřátel.

1. Doplňte správně do následujících rovnic to, jak se za čas $\mathrm{d}t$ změní počet obou skupin mravenců:
$\mathrm{d}a = \dots\dots\dots\dots\,\mathrm{d}t$; $\mathrm{d}b = \dots\dots\dots\dots\,\mathrm{d}t$.

2. Dělte obě rovnice mezi sebou. Separujte proměnné.

3. Integrací ukažte, že během celé bitvy musí platit $a^2 - b^2 = \text{const}$. Z toho ukažte, že pokud černých mravenců bylo více, přežije jich na konci bitvy $\sqrt{a^2 - b^2}$.

4. Řekněme, že obě skupiny bojují různě dobře: jeden černý mravenec za čas $\mathrm{d}t$ zničí $\alpha\,\mathrm{d}t$ rezavých, jeden rezavý zas $\beta\,\mathrm{d}t$ černých. Jak se změní řešení úlohy?

---

9 **1.** Přesvědčte se, že $\int_0^1 x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}$. Pak vezměte následující řadu:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

a zapište ji jako integrál od 0 do 1 z nějaké nekonečné mocninné řady v x. Řadu sečtěte a vyčíslete integrál. Měli byste zjistit, že $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$.

2. Stejným způsobem zkuste vyčíslit $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ (ve jmenovatelích jsou vždy lichá čísla a pořád se točí dva plusy a dva mínusy).