Bod	Separovaný tvar	Výsledek	Poznámka
1	$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \mathrm{d}x$	$y = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})$	
2	$\frac{\mathrm{d}y}{y(y-1)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$	$y = \frac{1}{1-Cx}$	Parciální zlomky: $\frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$.
3	$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$	$y = \mathrm{e}^{1/x}$	Položit $\ln y = u$.
4	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^y-1} = \mathrm{d}x$	$y = -\ln(1 - K\mathrm{e}^x)$	Položit $y = \ln u$, dále viz 2.
5	$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$	$y = \frac{2}{1+\mathrm{e}^x}$	Položit $x = \ln a$.
6	$\frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2} = \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$	$y = 1 - \frac{1}{C+\ln\sin x}$	

1

2 **1.** $z' = 2y' + 6$, takže $y' = \frac{1}{2}z' - 3$.

2. $\frac{1}{2}z' - 3 = z^2$

3. Separace: $\frac{\mathrm{d}z}{z^2+3} = 2\,\mathrm{d}x$. Můžeme hned integrovat na $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{3}} = 2x+C$ a vyjádřit $z = \sqrt{3}\operatorname{tg}(2\sqrt{3}x+C)$. Jelikož $y = \frac{1}{2}z - \frac{3}{2} - 3x$, obdržíme výsledek $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}(2\sqrt{3}x + C) - \frac{3}{2} - 3x$.

3 Derivováním $y = ux$ zjistíme, že $y' = u'x + u$.

1. Po substituci dostaneme rovnici $u'x+u = \frac{1}{2}(1+u)$. Řešení: $\ln(1-u) = C - \frac{1}{2}\ln x$, tj. $y = x - K\sqrt{x}$.

2. Po substituci dostaneme $(1-u)(u'x+u) + u^2 = 0$. Řešení: $u\mathrm{e}^{-u} = K/x$. Zde $u = y/x$, ale s pomocí elementárních funkcí to už bohužel víc neupravíme. Dá se akorát přidat mínus: $-u\mathrm{e}^{-u} = K'/x$ a využít toho, že existuje speciální funkce $W(x)$, která je definována jako inverse k funkci $x\mathrm{e}^x$. Uplatněním funkce W na obě strany rovnice dostaneme $-u = W(K'/x)$, tj. $y = -xW(K'/x)$.

3. Po substituci dostaneme $u'x = u\ln u$. Řešení obdobně jako úloha 1, bod 3. Výsledek: $y = x\mathrm{e}^{Kx}$.

4 **1.** $(y^2)' = (x^2)'$. Řešení: $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$.

2. $(y\sin x)' = (-\cos x)'$. Řešení: $y = -\operatorname{ctg} x + \frac{C}{\sin x}$.

3. $(\mathrm{e}^{x^2}y)' = (\frac{1}{3}x^3)'$. Řešení: $y = \frac{1}{3}x^3\mathrm{e}^{-x^2} + C\mathrm{e}^{-x^2}$.

4. $(y^2)' + (\mathrm{e}^x y)' = 0$. Řešení: $y^2 + \mathrm{e}^x y + C = 0$, z čehož můžeme spočítat $y = \frac{1}{2}(-\mathrm{e}^x \pm \sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 4C})$.

5 **1.** Máme $(\mathrm{e}^x y)' = \mathrm{e}^x(y' + y)$. Rovnici násobíme e^x, obdržíme $(\mathrm{e}^x y)' = (\frac{1}{4}x^4)'$ a výsledek $y = \frac{1}{4}x^4\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-x}$.

2. Násobme e^{x^2}, obdržíme $(\mathrm{e}^{x^2}y)' = (\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2})'$. Výsledek: $y = C\mathrm{e}^{-x^2} + \frac{1}{2}$.

3. Máme $(\mathrm{e}^{f(x)}y)' = \mathrm{e}^{f(x)}(y' + yf'(x))$. Násobme tedy celou rovnici $\mathrm{e}^{A(x)}$, kde $A' = a$. Pak bude $(\mathrm{e}^{A(x)}y)' = \mathrm{e}^{A(x)}(y' + a(x)y)$. Takže po násobení rovnice dostaneme $(\mathrm{e}^{A(x)}y)' = b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$. Musíme tedy zapsat pravou stranu jako derivaci a budeme nakonec mít

$$y = \exp\left(-\int a(x)\,\mathrm{d}x\right)\int\left[b(x)\exp\left(-\int a(x)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}x\right].$$

6 Vezmeme převrácenou hodnotu, máme $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - x = -y^2$. Považujme tedy x za funkci y. Násobme rovnici e^{-y}. Tím vlevo vznikne úplná derivace a máme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(x\mathrm{e}^{-y}) = -y^2\mathrm{e}^{-y}$. Teď musíme pravou stranu zapsat jako úplnou derivaci podle y. Stačí tedy integrovat a po dvojím per partes se zjistí, že vpravo lze zapsat jako $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[(y^2 + 2y + 2)\mathrm{e}^{-y}]$. Proto musí být

$$x = y^2 + 2y + 2 + C\mathrm{e}^y.$$

Je to řešení v takové formě, že z něj y jako funkci x pomocí elementárních funkcí nevyjádříme. Tohle je tak asi to nejlepší, co můžeme čekat.