Počty s goniometrickými funkcemi

1 Užitím součtových vzorců a goniometrické jedničky dokažte následující rovnosti:

1. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$; **2.** $\sin x(1 + \operatorname{tg} x) + \cos x(1 + \operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$;
3. $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$; **4.** $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2(\frac{\pi}{4} - x)}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\pi}{4} + x)} = \sin 2x$; **5.** $\cos^6 x - \sin^6 x = \cos 2x(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x)$;
6. $4\sin a \sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = \sin 3a$; **7.** $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\cos 2x}$.

2 Využijte vzorce pro součet „$\sin \pm \sin$“ a „$\cos \pm \cos$“ a dokažte následující rovnosti:

1. $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$; **2.** $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$;
3. $\dfrac{\cos b + \cos a}{\cos b - \cos a} = \operatorname{ctg}\frac{a+b}{2}\operatorname{ctg}\frac{a-b}{2}$; **4.** $\dfrac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}$.

3 Pomocí vzorců pro poloviční úhel dokažte následující:

1. $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x}$; **2.** $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 4\cos^2\frac{a-b}{2}$;
3. $(\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = 4\sin^2\frac{a-b}{2}$; **4.** $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

4 Nalezněte všechna reálná x, jež vyhovují následujícím rovnicím:

1. $2\sin^2 x + 7\cos x = 5$; **2.** $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; **3.** $2\sin x = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$; **4.** $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$;
5. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$; **6.** $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x + 1$.

Vlastnosti trojúhelníků

5 V této úloze zjistíme pár zajímavých vztahů pro trojúhelníky. $s = \frac{a+b+c}{2}$ je zde polovina obvodu. **1.** Z kosinové věty odvoďte, že platí $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. **2.** Pomocí vzorců pro poloviční úhel ukažte, že platí $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ a $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.
3. Pro plochu platí $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. Rozepište $\sin\alpha = \sin(2\cdot\frac{\alpha}{2})$ pomocí vztahu pro dvojitý úhel, dosaďte podle předchozího bodu a obdržíte *Heronův vzorec* $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.
4. Vyjádřete součin $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ pomocí vztahů z bodu 2 a po použití Heronova vzorce odvoďte následující zbytečný, ale pěkný vztah pro plochu trojúhelníka: $S = \frac{2abc}{a+b+c}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

6 **1.** Ukažte, že výšku na stranu c lze spočítat takto: $v_c = b\sin\alpha = a\sin\beta$. Napište podobné výrazy pro v_a a v_b.
2. Z rovnosti pro v_c odvoďte, že $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Z další podobné rovnosti odvoďte zbytek sinové věty.
3. Z rovnosti pro v_c odvoďte, že $a = \frac{v_c}{\sin\beta}$ a $b = \frac{v_c}{\sin\alpha}$. Díky tomu dokažte *tangentovou větu* $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

7 Pomocí kosinové věty odvoďte tento vztah pro délku těžnice na stranu c: $t_c^2 = a^2 + \frac{1}{4}c^2 - ac\cos\beta$. Pomocí další kosinové věty pro celý trojúhelník se pak zbavte členu s kosinem a zjistěte, že platí $t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ atd.

Odpovědi k počtům

$\boxed{1}$ **Ad 1.** K $\sin^4 x + \cos^4 x$ přičteme a odečteme $2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 2x$. **Ad 2.** Roznásobíme. Vznikne $\sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}$. Užitím goniometrické jedničky přepíšeme $\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ na $\frac{1}{\cos x} - \cos x$ a obdobně i druhý zlomek. **Ad 3.** Sečteme oba zlomky na $\frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} = 2$. **Ad 4.** Zlomek vlevo rozšiřme $\cos^2(\frac{\pi}{4} - x)$. Ve jmenovateli se objeví goniometrická jednička, v čitateli bude $\cos 2(\frac{\pi}{4} - x) = \sin 2x$. **Ad 5.** Přepíšeme na $(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x)$. Levá závorka je rovna $\cos 2x$, pravou upravíme podle téže logiky jako v prvním bodě. **Ad 6.** Máme $\sin\left(\frac{\pi}{3} \pm a\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos a \pm \sin a \cos\frac{\pi}{3}$. Násobením dvou takových výrazů (jeden je s plusem a druhý s mínusem) a použitím vztahu pro rozdíl čtverců dostaneme součin $\sin^2\frac{\pi}{3}\cos^2 a - \cos^2\frac{\pi}{3}\sin^2 a = \frac{1}{4}[3\cos^2 a - \sin^2 a]$. Násobením $4\sin a$ obdržíme $3\sin a\cos^2 a - \sin^3 a$. Pomocí součtových vzorců snadno ověříme, že to je skutečně $\sin 3a$. **Ad 7.** Rozšiřme zlomek $\cos x + \sin x$. Ve jmenovateli se utvoří $\cos 2x$, v čitateli vznikne $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$.

$\boxed{2}$ **Ad 1.** Zapíšeme např. $\cos x$ jako $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ a použijeme vztah pro součet sinů. **Ad 2.** Stejná metoda. **Ad 3.** **Ad 4.** Triviální aplikace řečených vzorců.

$\boxed{3}$ **Ad 1.** Máme $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$. Stačí rozšířit zlomek $2\sin x$. **Ad 2.** Roznásobíme čtverce, použijeme goniometrické jedničky a $\cos a\cos b + \sin a\sin b = \cos(a-b)$. Vznikne $2 + 2\cos(a-b) = 4\cos^2\frac{a-b}{2}$. **Ad 3.** Týž přístup, jen s mínusem v posledním vzorci. **Ad 4.** Nejdřív z toho, že $\cos(\pi - x) = -\cos x$, vydedukujeme, že čtvrtý sčítanec je stejný jako první a druhý stejný jako třetí. Vyčíslujeme tedy součet $2\left[\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8}\right]$. Přičteme a odečteme $2\cos^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{3\pi}{8}$, z čehož pro součet dostaneme výraz

$$2\left[\left(\cos^2\frac{3\pi}{8} - \cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2 + 2\cos^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{3\pi}{8}\right].$$

Teď podle vzorců pro poloviční úhel dostaneme $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$ a $\cos^2\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$, což po dosazení do výrazu dá žádané.

$\boxed{4}$ **Ad 1.** Přepíšeme pomocí goniometrické jedničky na $2 - 2\cos^2 x + 7\cos x = 5$ a zapíšeme $\lambda = \cos x$, takže $\cos x$ je řešením rovnice $2\lambda^2 - 7\lambda + 3 = 0$. Ta má kořeny $\lambda = \frac{7\pm 5}{4}$, tedy buď 3, nebo $\frac{1}{2}$. Kosinus reálného čísla nikdy nemůže být roven třem, takže zbývá $\cos x = \frac{1}{2}$, a tedy $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. **Ad 2.** Užijme vztah 1 z druhé úlohy. Obdržíme $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$, což dává $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. **Ad 3.** Buď je $\sin x = 0$ a rovnost je splněna triviálně (to nastává, je-li x celistvý násobek π), nebo je $\sin x$ nenulový a můžeme ho zkrátit. Zůstane $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\cos x}$, což je splněno při $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$. **Ad 4.** Dělme rovnost dvěma, uvědomme si, že $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ a $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a použijme součtový vzorec pro sinus. Obdržíme $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, což má dvě série řešení: $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ a $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$. **Ad 5.** Využijeme toho, že $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x\cos x$. Vytknuvše $\cos 2x$, obdržíme $\cos 2x(1 + 2\cos x) = 0$, z čehož je zřejmé, že buď musí být nulový $\cos 2x$, nebo $\cos x = -\frac{1}{2}$. To první nastane, je-li x rovno lichému násobku $\pi/4$, to druhé při $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. **Ad 6.** Na levé straně vytkněme $\operatorname{tg}^2 x$. Tím dostaneme tvar $(\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$. Tato rovnice je splněna při $\operatorname{tg} x = \pm 1$, čili v případě, že x je lichým násobkem $\pi/4$.