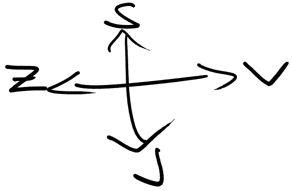
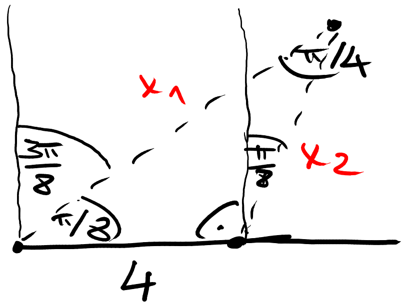
1





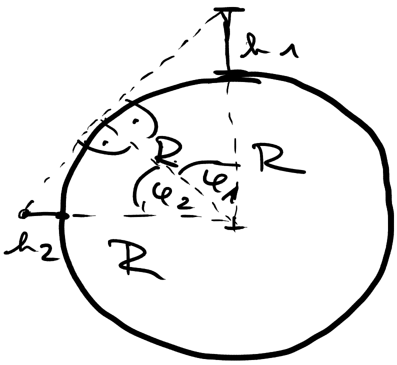
$$\Rightarrow \frac{4}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{x_1}{\sin\frac{5\pi}{8}} = \frac{x_2}{\sin\frac{\pi}{8}}$$

$$\sin\frac{5\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\pi/4}{2}}, \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\pi/4}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\sqrt{2}/2} = \frac{x_1}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{x_2}{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

$$\Rightarrow x_1 = 4\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad x_2 = 4\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

2



$$\Rightarrow \cos\varphi_1 = \frac{R}{R+h_1}$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{R}{R+h_2}$$

VZDÁLENOST JE PROSTĚ $R\cdot\varphi = R(\varphi_1+\varphi_2)$.

TAKŽE KDYŽ JE MAJÁK VIDĚT Z KOŠE, JE LOĎ VE VZDÁLENOSTI

$$d_1 = R\left[\arccos\frac{R}{R+h_p} + \arccos\frac{R}{R+h}\right],$$

h … VÝŠKA MAJÁKU

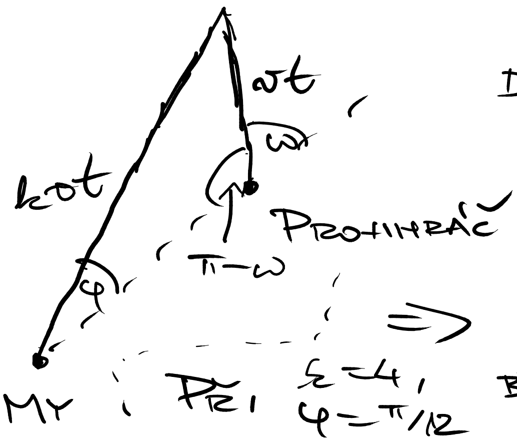
A POZDĚJI

$$d_2 = R\left[\arccos\frac{R}{R+h_r} + \arccos\frac{R}{R+h}\right].$$

PO ODEČTENÍ MÁME UJETOU VZDÁLENOST

$$d_1 - d_2 = R\left[\arccos\frac{R}{R+h_p} - \arccos\frac{R}{R+h_r}\right].$$

3



ZA ČAS t UBĚHNE PROTIHRÁČ DRÁHU vt, MÍČ ULETÍ kvt.

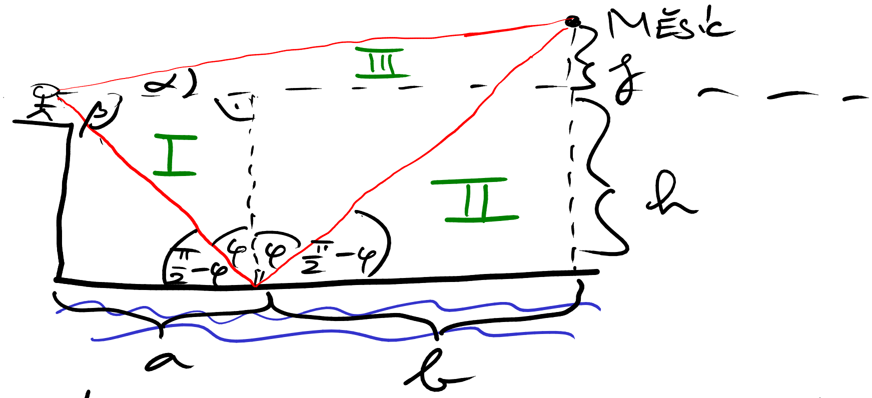
SINOVÁ VĚTA:

$$\frac{vt}{\sin\varphi} = \frac{kvt}{\sin(\pi-\omega)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sin\omega}{k}.$$

PŘI $k=4$, $\varphi = \pi/12$ BY MUSELO BÝT $\sin\omega = 4\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{6}-\sqrt{2} > 1$, COŽ JE BLBOST.

4



Z trojúhelníku I: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$; $a = h\,\mathrm{ctg}\,\beta$.

Z —"— II: $\frac{h+y}{b} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \mathrm{tg}\,\beta \Rightarrow$

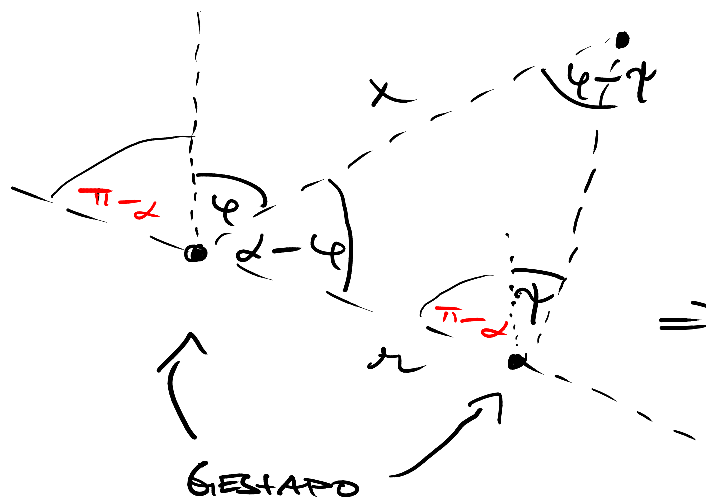
$\Rightarrow b = (h+y)\,\mathrm{ctg}\,\beta$

Z —"— III: $y = (a+b)\,\mathrm{tg}\,\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow y = (2h+y)\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta \Rightarrow y(\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha) = 2h\,\mathrm{tg}\,\alpha$

$\Rightarrow y = \frac{2h\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha} \Rightarrow y + h = h\,\frac{\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha} = h\,\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$

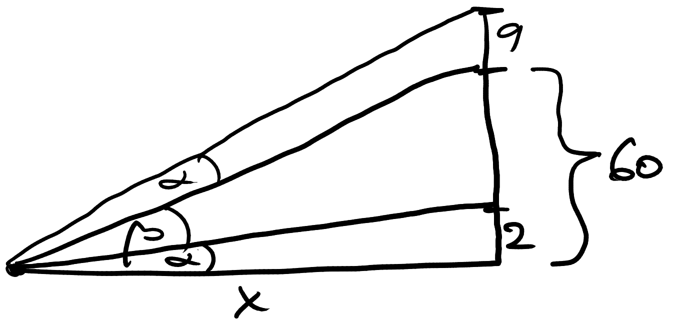
5



$$\frac{x}{\sin(\pi - \alpha + \psi)} = \frac{r}{\sin(\varphi - \psi)}$$

$$\Rightarrow x = r\,\frac{\sin(\alpha - \psi)}{\sin(\varphi - \psi)}$$

6



$\frac{2}{x} = \mathrm{tg}\,\alpha$

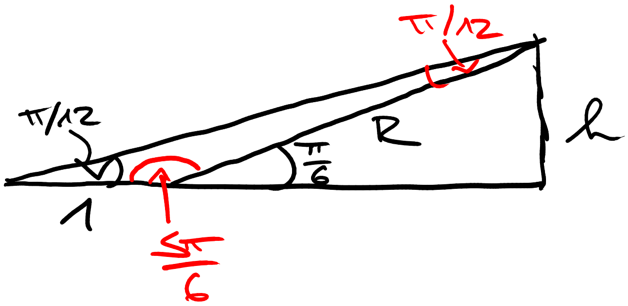
$\Rightarrow \frac{60}{x} = \mathrm{tg}(\alpha + \beta)$

$\frac{69}{x} = \mathrm{tg}(2\alpha + \beta)$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\left[(2\alpha+\beta) - (\alpha+\beta)\right] = \frac{\mathrm{tg}(2\alpha+\beta) - \mathrm{tg}(\alpha+\beta)}{1 + \mathrm{tg}(2\alpha+\beta)\,\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{\frac{69}{x} - \frac{60}{x}}{1 + \frac{69}{x}\cdot\frac{60}{x}} \Rightarrow \cdots \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2\cdot 60\cdot 69}{7}}.$$

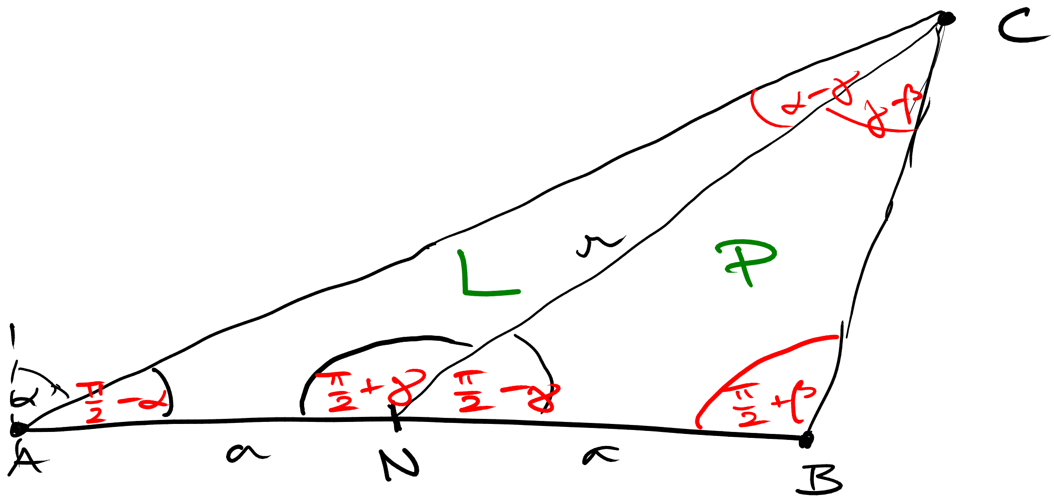
7



V levém trojúhelníku jsou dva stejné úhly ⇒ protější strany jsou stejné ⇒ $R=1$.

V pravém: $h = R\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

8



Sinová věta v L: $\frac{r}{\cos\alpha} = \frac{a}{\sin(\alpha-\gamma)}$ (1)

— " — v P: $\frac{r}{\cos\beta} = \frac{a}{\sin(\gamma-\beta)}$ (2)

Dělením získám $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\alpha-\gamma)} = \frac{\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma} =$

$= \frac{\operatorname{tg}\gamma\cos\beta - \sin\beta}{\sin\alpha - \operatorname{tg}\gamma\cos\alpha} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\gamma} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2}$.

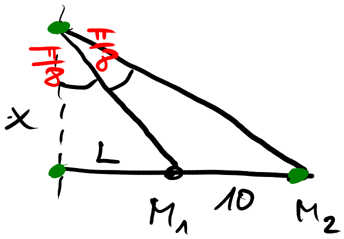
Pak už např. z (1): $r = \frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma} = \frac{a/\cos\gamma}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\gamma} =$

$= \frac{2a}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}\sqrt[2]{1+\operatorname{tg}^2\gamma} = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}\sqrt[2]{4 + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^2}$.

Lze to ale napsat více způsoby, např. též platí

$$r = \frac{a}{\sin(\alpha-\beta)}\sqrt[2]{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)}.$$

9

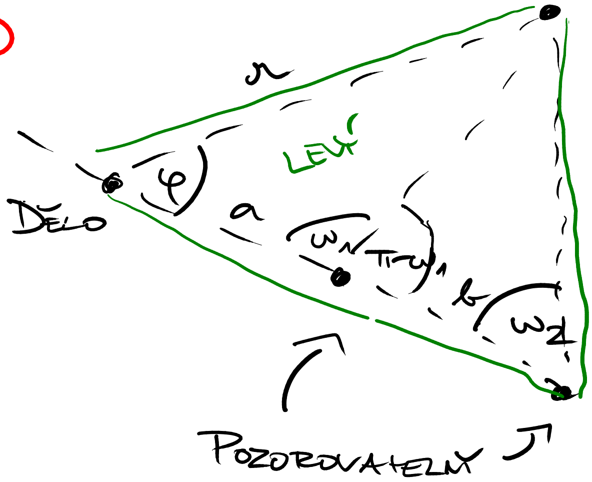


Z velkého trojúhelníka: $10 + L = x$.

Z levého: $\frac{L}{x} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt[2]{2} - 1$

$\Rightarrow x = \frac{10}{2-\sqrt{2}} = 10\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

10



Z LEVÉHO:

$$\frac{r}{\sin\omega_1} = \frac{a}{\sin(\varphi+\omega_1)}$$

Z VELKÉHO:

$$\frac{r}{\sin\omega_2} = \frac{a+b}{\sin(\alpha+\omega_2)}$$

$$\Leftrightarrow \Rightarrow \quad a = r\sin\varphi\left(\mathrm{cotg}\,\omega_1 + \mathrm{cotg}\,\varphi\right) \quad (1)$$

$$a+b = r\sin\varphi\left(\mathrm{cotg}\,\omega_2 + \mathrm{cotg}\,\varphi\right) \quad (2)$$

DĚLÍM:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{\mathrm{cotg}\,\omega_1 + \mathrm{cotg}\,\varphi}{\mathrm{cotg}\,\omega_2 + \mathrm{cotg}\,\varphi} \Rightarrow (\ldots)$$

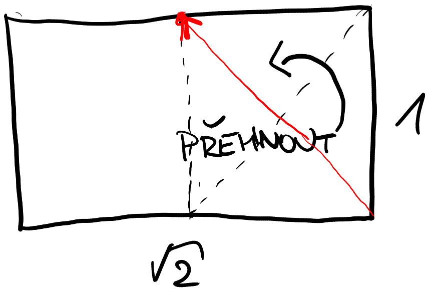
$$\Rightarrow \mathrm{cotg}\,\varphi = \frac{a\left(\mathrm{cotg}\,\omega_2 - \mathrm{cotg}\,\omega_1\right) - b\,\mathrm{cotg}\,\omega_1}{b}.$$

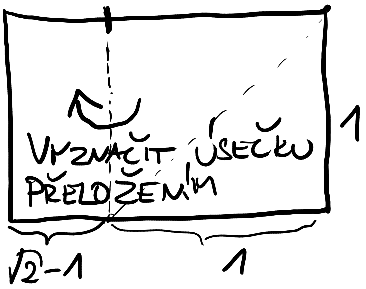
Z ROVNICE (1):

$$r = \frac{a}{\sin\varphi}\,\frac{1}{\mathrm{cotg}\,\omega_1 + \mathrm{cotg}\,\varphi} = (\ldots) =$$

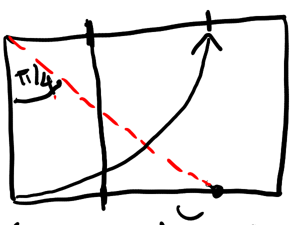
$$= \frac{1}{\sin(\omega_1-\omega_2)}\sqrt{b^2\sin^2\omega_2 + a^2\sin^2(\omega_1-\omega_2) - 2ab\sin\omega_2\cos\omega_1\sin(\omega_1-\omega_2)}\,.$$

11

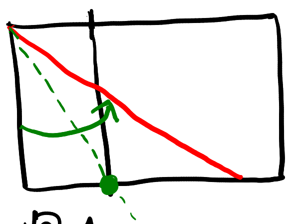




V LEVÉM HORNÍM ROHU UTVOŘÍME ÚHEL $\frac{\pi}{8}$ ...



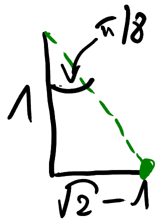
OPĚT VYZNAČIT PŘELOŽENÍM



PŘILOŽIT SVISLOU STRANU K ČERVENÉMU DŘÍVE VYZNAČENÉMU PŘEKLADU.

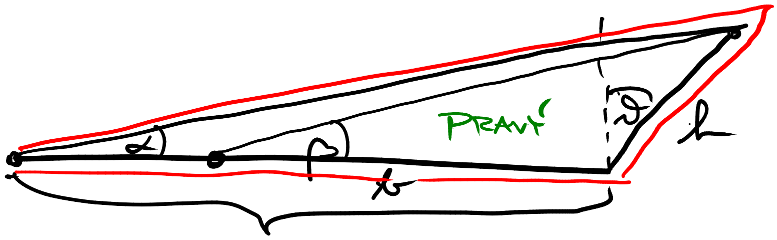
VYZNAČIT ZELENĚ ZAKRESLENÝ PŘEKLAD. UKÁŽE SE, ŽE SE PRÁVĚ PROTÍNÁ S ČERNĚ VYZNAČENÝM PŘEKLADEM.

A PAK MÁME



$$\Rightarrow \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1.$$

12



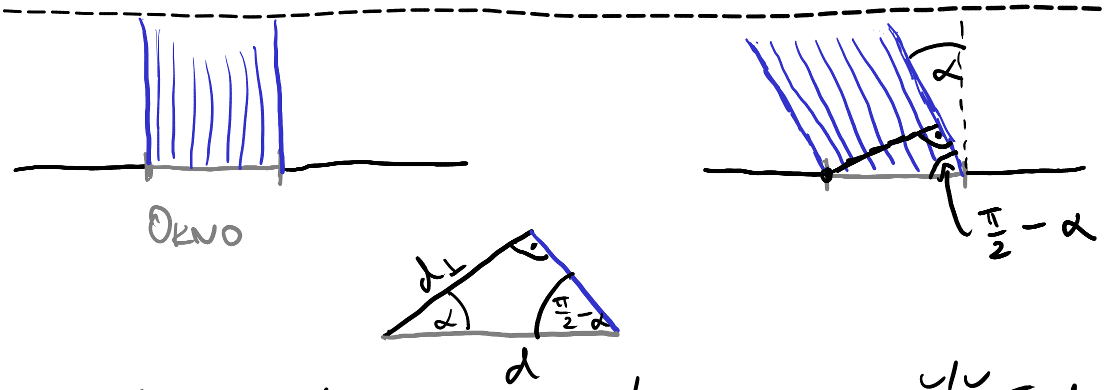
Z VELKÉHO:
$$\frac{a}{\cos(\vartheta+\alpha)} = \frac{h}{\sin\alpha}$$

Z PRAVÉHO:
$$\frac{b}{\cos(\vartheta+\beta)} = \frac{h}{\sin\beta}$$

$$\frac{\cos(\vartheta+\alpha)}{a\sin\alpha} = \frac{\cos(\vartheta+\beta)}{b\sin\beta} \Rightarrow \frac{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\vartheta}{a} = \frac{\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{tg}\vartheta}{b}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\vartheta = \frac{b\operatorname{cotg}\alpha - a\operatorname{cotg}\beta}{a-b}.$$

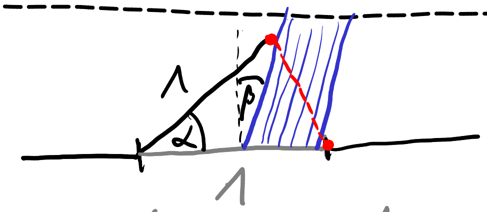
13



PADÁ-LI DÉŠŤ POD ÚHLEM α, ZASÁHNE OKNO O ŠÍŘCE d JEN SVAZEK DEŠTĚ O ŠÍŘCE $d_\perp$. JE PŘITOM $\frac{d_\perp}{d} = \cos\alpha \Rightarrow d_\perp = d\cos\alpha$.

PROTO I INTENSITA DEŠTĚ KLESNE NA $I\cos\alpha$.

14

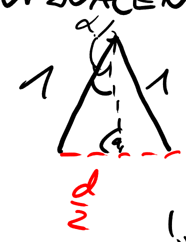


OZNAČME ŠÍŘKU OKNA 1.

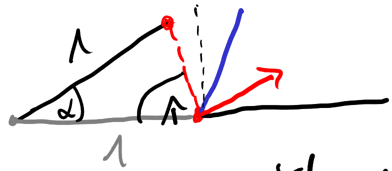
ŘEKNĚME, ŽE KDYBY PRŠELO KOLMO PŘÍMO DO OTVORU (BEZ OKNA), NAPRŠELO BY MNOŽSTVÍ V_0.

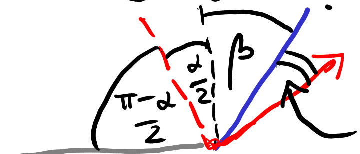
PAK, POKUD BY OKNO CHYBĚLO, ALE PRŠELO BY POD ÚHLEM β, NAPRŠELO BY $V_0\cos\beta$.

DO POKOJE PROJDE VŠECHEN DÉŠŤ, KTERÝ ZASÁHNE ČERVENĚ VYZNAČENOU ROVINU. JEJÍ ŠÍŘKA JE $d = 2\sin\frac{\alpha}{2}$.



JAKÝ JE ÚHEL MEZI DEŠTĚM A KOLMICÍ K ROVINĚ?





JE TO TENTO ÚHEL, TJ. $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \beta$

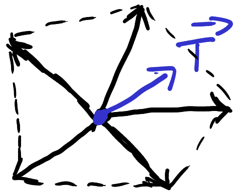
PROTO DOVNITŘ NAPRŠÍ $V_0 \cdot d \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \beta\right) = V_0 \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$.

TAKŽE OPROTI PŘÍPADU BEZ OKNA NAPRŠÍ V POMĚRU

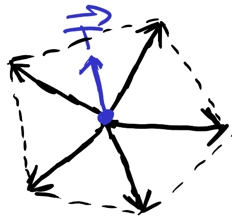
$$\frac{V_0\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\beta\right)}{V_0\cos\beta} = 2\underbrace{\sin^2\frac{\alpha}{2}}_{\frac{1-\cos\alpha}{2}} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta} =$$

$$= 1 - \frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta} = 1-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}.$$

15

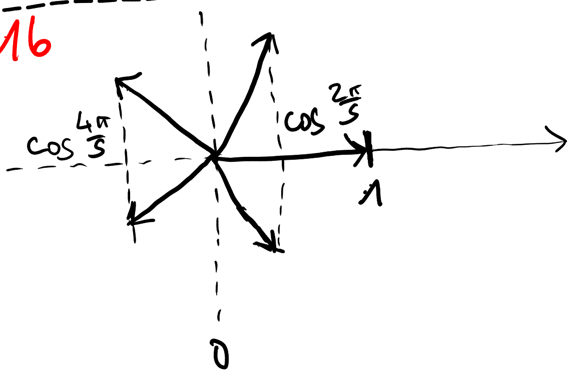


OTOČÍME O $\frac{2\pi}{n}$:



PO OTOČENÍ n-ÚHELNÍKA JE n-ÚHELNÍK ÚPLNĚ TÝŽ — ALE SOUČET $\vec T$ BY SE TÍM MĚL ZMĚNIT. TO JE NESMYSL. JEDINĚ V PŘÍPADĚ $\vec T = 0$ KE SPORU NEDOJDE. PROTO SOUČET MUSÍ BÝT NULOVÝ.

16



$$\Rightarrow \quad 1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\underbrace{\cos\frac{4\pi}{5}}_{(2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1)} = 0$$

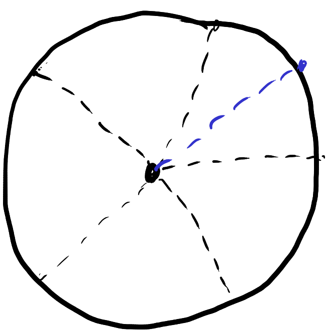
MÁME TEDY ROVNICI

$$4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0$$

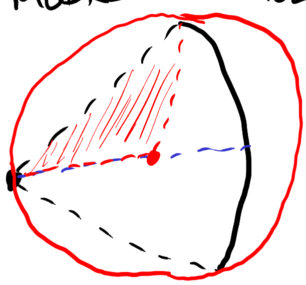
$$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot4}}{8} = \begin{cases}\frac{\sqrt5-1}{4}\\ -\frac{\sqrt5+1}{4}\end{cases}$$

PŘITOM JE ZÁPORNÝ KOŘEN NEMOŽNÝ — TEN KOSINUS MUSÍ BÝT KLADNÝ. PROTO $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt5-1}{4}$.

17



KAŽDOU VÝSEČ POKRYJEME JEDNÍM KOTOUČEM. STŘED BY MĚL LEŽET V MODŘE OZNAČENÉ OSE.

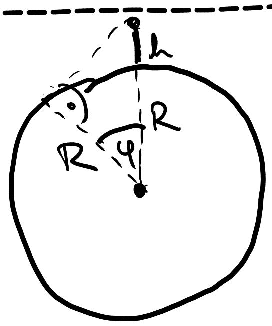


PAK MUSÍ BÝT STŘED POLOŽEN TAK, ABY KOTOUČ PRÁVĚ POKRYL VŠECHNY TŘI ROHY VÝSEČE. JEHO POLOMĚRY JSOU VYZNAČENY ČERVENĚ. V ČERVENĚ VYZNAČENÉHO TROJÚHELNÍKU MÁME

Z poloviny tohoto trojúhelníka máme $\frac{R}{2r} = \cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$. Jelikož $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, máme

$$\frac{R}{r} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow r = \frac{R}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot R.$$

18



Z vyznačeného trojúhelníka zjistíme

$$\cos\varphi = \frac{R}{R+h}.$$

Vzdálenost podél povrchu Země je pak prostě $R\varphi = R\arccos\frac{R}{R+h}$.

---

19 Pro jednoduchost uvažme, že oheň je jen zářící bod na Zemi. Pak máme $d \geq R\arccos\frac{R}{R+h}$ (z výšky h byl oheň vidět) a $d \leq R\arccos\frac{R}{R+h'}$ (z výšky h' už nebyl).

Proto musí být $\arccos\frac{R}{R+h} \leq \frac{d}{R} \leq \arccos\frac{R}{R+h'}$.